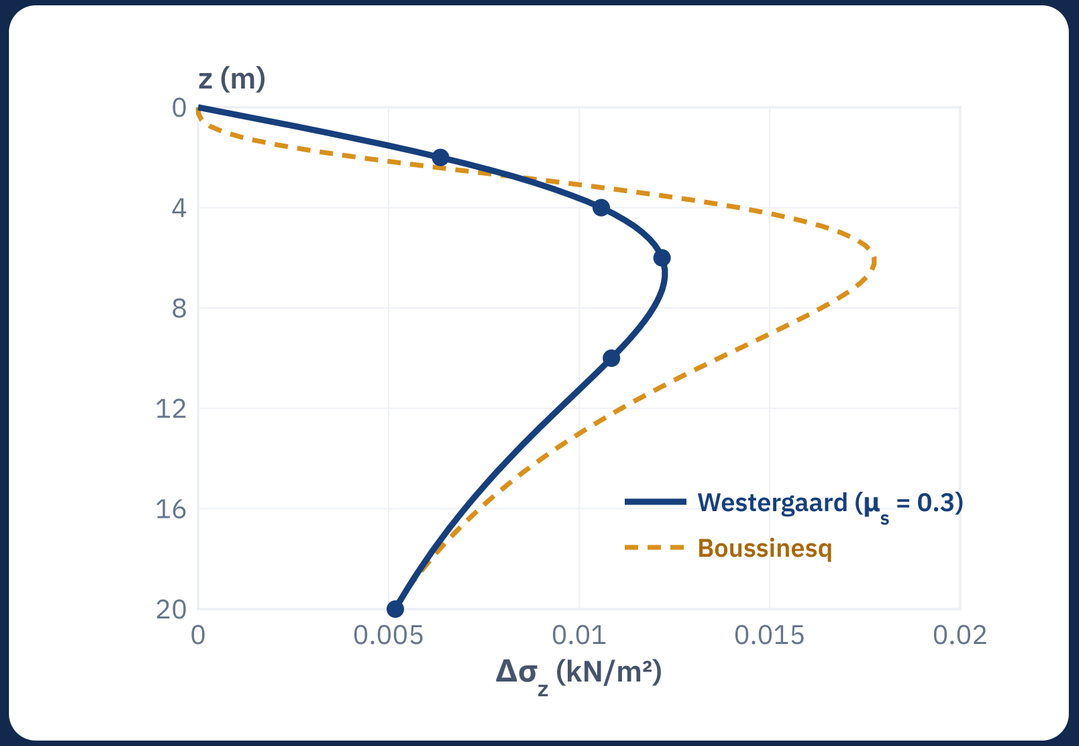
岩土工程讲义 · 土体中的应力

Westergaard：集中荷载下的应力

讲义：侧向变形受刚性板约束的层状土体中，集中荷载作用下的应力；对其中一点从头至尾手算求解。

Westergaard介质 | η与I_5 | μ_s的影响 | 与Boussinesq对比 | 叠加原理



引言

本讲内容

Westergaard介质：弹性土体的一种理想化模型，其中含有不允许侧向变形的薄而刚性的水平板

集中荷载下的竖向附加应力：**η**、**影响系数I_5**以及**$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$**

Westergaard应力在何处小于、何处大于**Boussinesq**应力；泊松比**μ_s**的作用

随深度和水平距离的变化；最大应力的深度

多个集中荷载的叠加

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：公式及其依据

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

算例：P = 5 kN，A点距荷载r = 5 m，深度z = 4 m；薄板之间的土体中$\mu_s = 0.3$。

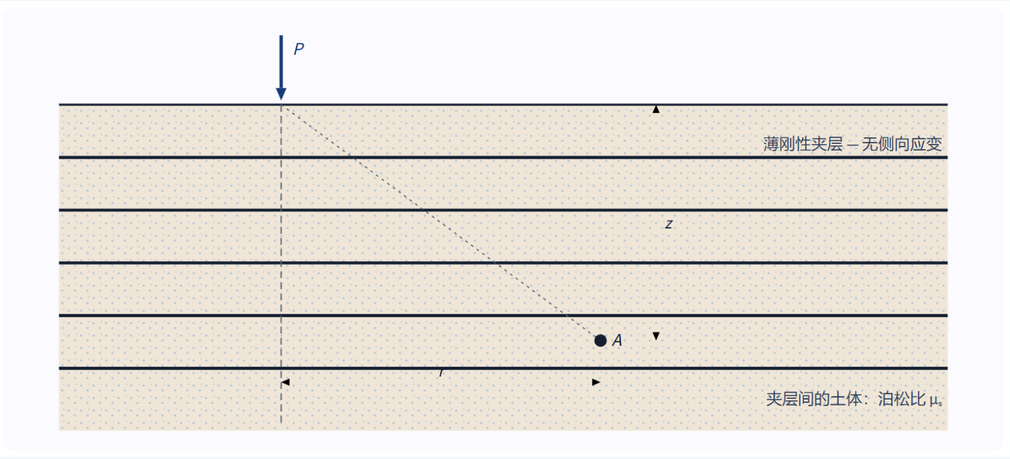
含刚性水平板的土体

理论

基于Boussinesq的解答建立在对**均质、各向同性**半空间的集中荷载解进行积分的基础上。然而许多土体是**成层的**

算例：含薄砂夹层、水平变形受刚度较大的土层约束的黏土

Westergaard (1938)将这种土体理想化为：含有大量不允许侧向变形的**薄而刚性的水平薄板**的弹性介质



竖向附加应力与η

理论

地表集中荷载**P**在A点（水平距离为**r**，深度为**z**）产生的竖向应力增量；μ_s为刚性薄板之间土体的泊松比，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

与Boussinesq的I_1一样，解答改用**影响值**重新表示

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\,\eta}{2\pi z^2}\left[\frac{1}{\eta^2 + (r/z)^2}\right]^{3/2}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s}}$$

$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$

理论

Westergaard解与Boussinesq解一样，写成$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$的形式；$I_5$仅取决于$r/(\eta z)$和$\eta$

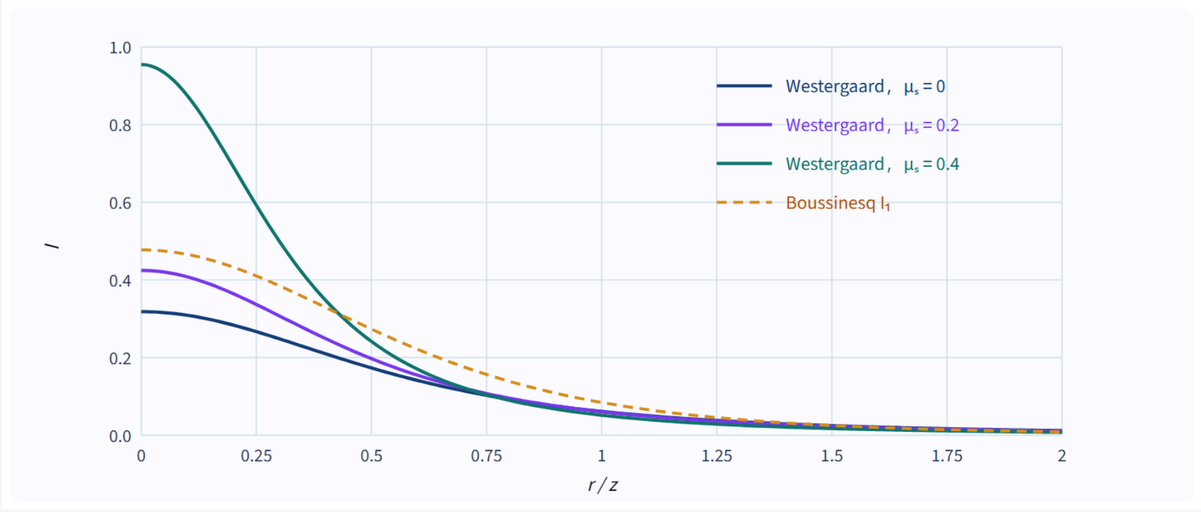
作为对比，Boussinesq解为：$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$，$I_1$仅取决于$r/z$（竖向应力与泊松比无关）

$$\Delta\sigma_z = \left(\frac{P}{z^2}\right) I_5 \qquad I_5 = \frac{1}{2\pi\eta^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2}$$

$$\text{Boussinesq:}\quad I_1 = \frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1\right]^{-5/2}$$

影响值随r/z的变化

r/z	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1	1.5	2	3	5
$\mu_s = 0$	0.3183	0.3090	0.2836	0.2483	0.2099	0.1733	0.1411	0.0925	0.0613	0.0247	0.0118	0.0038	0.0009
$\mu_s = 0.2$	0.4244	0.4080	0.3646	0.3074	0.2491	0.1972	0.1547	0.0953	0.0604	0.0229	0.0107	0.0034	0.0008
$\mu_s = 0.4$	0.9549	0.8750	0.6916	0.4997	0.3480	0.2416	0.1700	0.0897	0.0516	0.0173	0.0076	0.0023	0.0005
Boussinesq I_1	0.4775	0.4657	0.4329	0.3849	0.3295	0.2733	0.2214	0.1386	0.0844	0.0251	0.0085	0.0015	0.0001



荷载下方的Westergaard与Boussinesq解

理论

荷载正下方(r = 0)，当**μ_s = 0**时，Westergaard应力**低于**Boussinesq应力：$I_5 = 1/\pi = 0.3183$；Boussinesq解的$I_1 = 3/2\pi = 0.4775$。刚性薄板将荷载向两侧扩散

荷载下方的应力**随μ_s增大而增大**；在**μ_s = 0.5**时$\eta = 0$，解**失去有效性**。模块接受的μ_s取值范围为0至0.49

μ_s	0.00	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.45	0.49
η	0.7071	0.6667	0.6124	0.5774	0.5345	0.4082	0.3015	0.1400
η^2	0.5000	0.4444	0.3750	0.3333	0.2857	0.1667	0.0909	0.0196
$I_5\ (r = 0) = 1/(2\pi\eta^2)$	0.3183	0.3581	0.4244	0.4775	0.5570	0.9549	1.7507	8.1169

叠加原理

理论

由于Westergaard介质是**弹性**的，每个荷载产生的应力按其到A点的**各自距离r**求得，各应力再**叠加**

各荷载位于地面上各自的位置；最多可输入八个荷载，且任意两个荷载不得位于同一位置

Boussinesq对比值也以同样方式叠加

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{P_k}{z^2} I_{5,k} \qquad r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \qquad I_{5,k} = I_5\left(\frac{r_k}{\eta z}\right)$$

题目

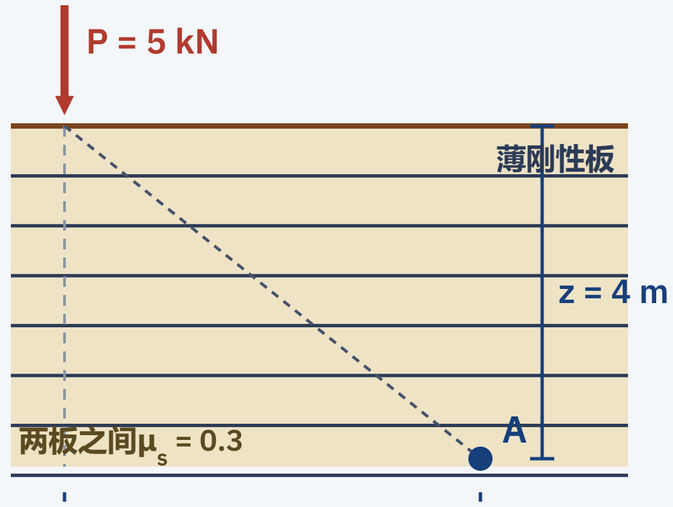
算例

求

η、r/(ηz)、影响值I_5、$\Delta\sigma_z$，以及与Boussinesq应力的比较。

已知条件

荷载	**地表处**$P = 5$ **kN**，$(x_L;\, y_L) = (0;\, 0)$
A点	$x = 3$ **m**, $y = 4$ **m**, $z = 4$ **m**
土	**板间**$\mu_s = 0.3$



解答 (1/3)

解答

1 Westergaard常数η

$$\eta = \sqrt{\frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s}} = \sqrt{\frac{1-0.6}{2-0.6}} = \sqrt{0.2857} = \mathbf{0.5345}$$

2 水平距离与r/(ηz)

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \mathbf{5.00}\ \text{m}$$

$$\frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.5345\,(4)} = \mathbf{2.3385}$$

η = **0.5345** (η^2 = 0.2857)。A点距荷载**r = 5 m**；在Boussinesq解中，该距离以r/z = 1.25代入，而在Westergaard解中则以r/(ηz) = **2.3385**代入。

解答 (2/3)

解答

3 影响值I_5

$$I_5 = \frac{1}{2\pi\eta^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2} = \frac{1}{2\pi\,(0.2857)}\left[2.3385^2 + 1\right]^{-3/2}$$

$$= 0.5570 \times [6.4687]^{-3/2} = 0.5570 \times 0.06078 = \mathbf{0.03386}$$

4 竖向附加应力

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_5 = \frac{5}{4^2}(0.03386) = 0.3125 \times 0.03386 = \mathbf{0.01058}\ \text{kN/m}^2$$

地表5 kN的集中荷载在Westergaard介质中的A点产生**$\Delta\sigma_z$ = 0.01058 kN/m²**的增量(I_5 = 0.03386)。

解答 (3/3)

解答

5 按公式的原始形式验算

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\eta}{2\pi z^2}\left[\frac{1}{\eta^2+(r/z)^2}\right]^{3/2} = \frac{5\,(0.5345)}{2\pi\,(16)}\left[\frac{1}{0.2857+1.5625}\right]^{3/2} = \mathbf{0.01058}$$

6 Boussinesq（对比）

$$I_1 = \frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{r}{z}\right)^2+1\right]^{-5/2} = \frac{3}{2\pi}\left[2.5625\right]^{-5/2} = \mathbf{0.04542}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = \frac{5}{4^2}\,(0.04542) = \mathbf{0.01419}\ \text{kN/m}^2 \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = 0.745$$

两种表达形式给出相同的结果。该点处Westergaard应力约为Boussinesq应力的**74.5%**：由于刚性薄层将荷载向侧向扩散，中等深度处的应力较小。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

荷载与点位	$P = 5$ kN；A点距荷载$r = 5$ m；$\mu_s = 0.3$
深度	$z = 2,\ 4,\ 6 \ldots 20$ m（模块的地层剖面表）

求

各深度处的r/(ηz)、I_5、Westergaard应力和Boussinesq应力；**最大应力所在的深度。**

解答 (1/2)

解答

z (m)	r/(ηz)	I_5	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	比值W/B
2	4.677	0.0051	**0.00636**	0.00422	1.509
4	2.339	0.0339	**0.01058**	0.01419	0.745
6	1.559	0.0877	**0.01218**	0.01774	0.686
8	1.169	0.1529	**0.01195**	0.01636	0.731
10	0.935	0.2170	**0.01085**	0.01367	0.794
12	0.780	0.2733	**0.00949**	0.01111	0.854
14	0.668	0.3202	**0.00817**	0.00902	0.905
16	0.585	0.3584	**0.00700**	0.00739	0.948
18	0.520	0.3892	**0.00601**	0.00612	0.982
20	0.468	0.4140	**0.00518**	0.00513	1.009

z = 2 m处Westergaard应力较大（0.00636和0.00422）；**在中间深度处较小**（z = 6 m：0.01218和0.01774）；**z = 20 m**处两种解趋于接近（0.00518和0.00513）。

解答 (2/2)

解答

1 z = 10 m时手算

$$\frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.5345\,(10)} = 0.9354$$

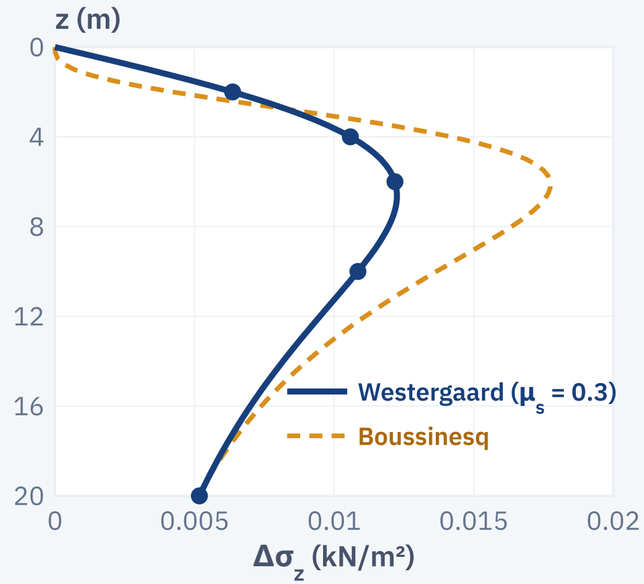
$$I_5 = 0.5570\,[1.8750]^{-3/2} = 0.2170$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{10^2}\,(0.2170) = \mathbf{0.01085}\ \text{kN/m}^2$$

2 最大应力所在深度($d\Delta\sigma_z/dz = 0$)

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\eta}{2\pi}\,z\,(r^2 + \eta^2 z^2)^{-3/2}$$

$$z^* = \frac{r}{\sqrt{2}\,\eta} = \frac{5}{1.4142\,(0.5345)} = \mathbf{6.61}\ \text{m}$$



最大应力：Westergaard解在**z = 6.61 m**处(0.01225)，Boussinesq解($z^* = r\sqrt{1.5}$)在**z = 6.12 m**处(0.01775 kN/m²)。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

荷载与点位	$P = 5$ kN，$r = 5$ m，$z = 4$ m（算例1中的点）
变化	$\mu_s = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.45;\ 0.49$

求

对每个μ_s，求**η**、**r/(ηz)**、**I_5**、**$\Delta\sigma_z$**以及与Boussinesq解之比。

解答 (1/3)

解答

μ_s	η	$r/(\eta z)$	I_5	$\Delta\sigma_z$ (kN/m²)	$\Delta\sigma_z$ / Boussinesq
0.00	0.7071	1.768	0.03799	**0.01187**	0.836
0.10	0.6667	1.875	0.03732	**0.01166**	0.822
0.20	0.6124	2.041	0.03614	**0.01129**	0.796
0.30	0.5345	2.339	0.03386	**0.01058**	0.745
0.40	0.4082	3.062	0.02858	**0.00893**	0.629
0.45	0.3015	4.146	0.02257	**0.00705**	0.497
0.49	0.1400	8.927	0.01120	**0.00350**	0.247

在该点(r/z = 1.25)处，**μ_s增大时Westergaard应力减小**：μ_s = 0时为0.01187，μ_s = 0.49时为0.00350 kN/m²。在荷载轴线上则相反（算例4）：影响的方向取决于计算点的位置。

解答 (2/3)

解答

1 μ_s = 0

$$\eta^2 = \frac{1}{2} = 0.5000\,, \quad \eta = 0.7071\,, \quad \frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.7071(4)} = 1.7678$$

$$I_5 = \frac{1}{\pi}\left[4.1250\right]^{-3/2} = 0.3183 \times 0.11936 = 0.03799$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.03799) = \mathbf{0.01187}$$

泊松比为零时，η = 1/√2 = 0.7071；此点处得**$\Delta\sigma_z$ = 0.01187 kN/m²**（为Boussinesq解的83.6%）。

解答 (3/3)

解答

2 μ_s = 0.4

$$\eta^2 = \frac{1-0.8}{2-0.8} = 0.1667\,,\quad \eta = 0.4082\,,\quad \frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.4082(4)} = 3.0619$$

$$I_5 = 0.9549\,[10.3750]^{-3/2} = 0.9549 \times 0.02992 = 0.02858$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.02858) = \mathbf{0.00893}$$

随着薄板之间土体泊松比的增大，η减小；r/(ηz)增大，该点处的I_5减小：**0.01187 → 0.00893 kN/m²**(μ_s = 0 → 0.4)。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

荷载	$P = 5$ kN, $\mu_s = 0.3$
深度	$z = 4$ m；**水平距离**$r = 0, 1, 2 \ldots 10$ m
题目	**在荷载轴线上Westergaard应力与Boussinesq应力如何比较；μ_s取何值时两种解相等?**

求

荷载下方的$\Delta\sigma_z$(r = 0)，μ_s = 0时的相同值，以及**水平剖面表。**

解答 (1/3)

解答

1 $\mu_s = 0.3$时，$r = 0$

$$I_5(0) = \frac{1}{2\pi\eta^2} = \frac{1}{2\pi\,(0.2857)} = 0.5570 \qquad \Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.5570) = \mathbf{0.1741}$$

$$\text{Boussinesq: } I_1(0) = \frac{3}{2\pi} = 0.4775 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_{z,B} = \frac{5}{16}\,(0.4775) = \mathbf{0.1492}$$

2 $\mu_s = 0$时，$r = 0$

$$I_5(0) = \frac{1}{\pi} = 0.3183 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.3183) = \mathbf{0.0995} \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = \frac{1/\pi}{3/2\pi} = \frac{2}{3}$$

$\mu_s = 0$：Westergaard值为Boussinesq值的**2/3**（0.0995和0.1492）；**$\mu_s = 0.3$**：前者大于后者(0.1741)；两种解在**$\mu_s = 0.25$**时相等。

解答 (2/3)

解答

3 两种解在轴线上相等时的μ_s

$$\frac{1}{2\pi\eta^2} = \frac{3}{2\pi} \Rightarrow \eta^2 = \frac{1}{3} = \frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s} \Rightarrow \mu_s = \mathbf{0.25}$$

4 轴线上的比值：Westergaard / Boussinesq = $(1/2\pi\eta^2) / (3/2\pi) = 1/(3\eta^2)$

μ_s	0.00	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.45	0.49
η^2	0.5000	0.4444	0.3750	0.3333	0.2857	0.1667	0.0909	0.0196
$\Delta\sigma_z$ Westergaard / Boussinesq	0.667	0.750	0.889	1.000	1.167	2.000	3.667	17.000

在荷载轴线上，该比值随μ_s迅速增大：μ_s = 0时为2/3，μ_s = 0.25时为1，μ_s = 0.45时为3.67；当μ_s趋近0.5时，$\eta \to 0$，比值无限增大。

解答 (3/3)

解答

r (m)	r/z	r/(ηz)	I_5	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	比值W/B
0	0.00	0.000	0.5570	**0.17408**	0.14921	1.167
1	0.25	0.468	0.4140	**0.12938**	0.12822	1.009
2	0.50	0.935	0.2170	**0.06780**	0.08541	0.794
3	0.75	1.403	0.1089	**0.03403**	0.04889	0.696
4	1.00	1.871	0.0584	**0.01824**	0.02638	0.691
5	1.25	2.339	0.0339	**0.01058**	0.01419	0.745
6	1.50	2.806	0.0211	**0.00658**	0.00784	0.840
8	2.00	3.742	0.0096	**0.00300**	0.00267	1.123
10	2.50	4.677	0.0051	**0.00159**	0.00105	1.509

Westergaard应力在轴线上大于Boussinesq解；在**r/z ≈ 0.26**之后降至Boussinesq解以下（r = 2 m时：0.06780和0.08541），在**r/z ≈ 1.81**(r ≈ 7.2 m)之后又重新超过后者（r = 10 m时：0.00159和0.00105）：远处Westergaard应力衰减较慢。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

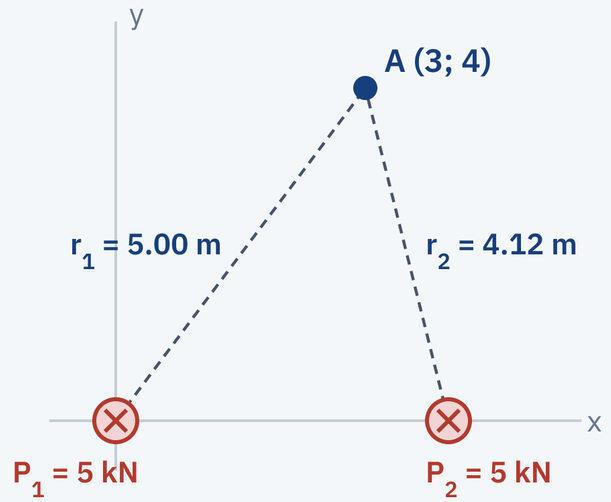
算例

已知条件

荷载	$P_1 = 5$ kN，$(0;\ 0)$与$P_2 = 5$ kN，$(4;\ 0)$
A点	$x = 3$ m, $y = 4$ m, $z = 4$ m
土	$\mu_s = 0.3$

求

各荷载的r、I_5、$\Delta\sigma_z$值；总应力及Boussinesq解的总和。



解答 (1/2)

解答

1 P_1 (0; 0)

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.000 \text{ m}$$

$$\frac{r_1}{\eta z} = \frac{5.000}{0.5345(4)} = 2.3385\,, \quad I_5 = 0.03386$$

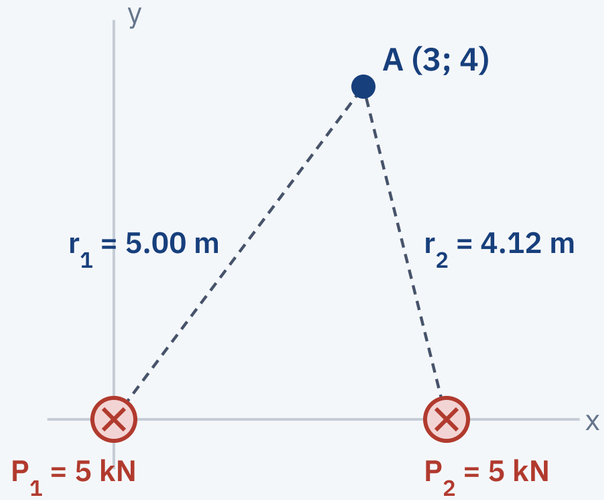
$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{5}{16}(0.03386) = \mathbf{0.01058} \text{ kN/m}^2$$

2 P_2 (4; 0)

$$r_2 = \sqrt{(3-4)^2 + 4^2} = 4.123 \text{ m}$$

$$\frac{r_2}{\eta z} = \frac{4.123}{0.5345(4)} = 1.9284\,, \quad I_5 = 0.05434$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{5}{16}(0.05434) = \mathbf{0.01698} \text{ kN/m}^2$$



荷载2更近：**0.01698**；荷载1：**0.01058 kN/m²**。

解答 (2/2)

解答

1 应力叠加

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.01058 + 0.01698 = \mathbf{0.02756}\ \text{kN/m}^2$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 0.01419 + 0.02442 = 0.03862\ \text{kN/m}^2$$

2 同一点下方沿深度的分布（两个荷载之和）

z (m)	2	4	6	8	10	12	16	20
$\Delta\sigma_z$ Westergaard	0.0174	0.0276	0.0301	0.0282	0.0247	0.0210	0.0150	0.0108
$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	0.0137	0.0386	0.0430	0.0371	0.0298	0.0237	0.0153	0.0105

在A点(z = 4 m)处，两个荷载共同产生**$\Delta\sigma_z$ = 0.02756 kN/m²**；Boussinesq解之和为0.03862 kN/m²。合计值为各荷载单独计算所得数值之和；单个荷载的值（算例1）是该合计值的一部分。

在GeoTerva中验算解答 ↗

小结

要点回顾

Westergaard介质：薄而刚性的水平板阻止侧向变形；$\boldsymbol{\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5}$，$I_5 = [1/(2\pi\eta^2)]\,[(r/\eta z)^2 + 1]^{-3/2}$，$\eta = \sqrt{[(1 - 2\mu_s)/(2 - 2\mu_s)]}$

算例($P = 5$ kN, $r = 5$ m, $z = 4$ m, $\mu_s = 0.3$)：η 0.5345；$r/(\eta z)$ 2.339；I_5 0.03386 → $\boldsymbol{\Delta\sigma_z = 0.01058}$ **kN/m²**；Boussinesq解：0.01419

荷载轴线上$I_5 = 1/(2\pi\eta^2)$：$\mu_s = 0$时为$1/\pi = 0.3183$(Boussinesq $3/2\pi = 0.4775$)；应力随μ_s增大，$\mu_s = 0.5$时该解失去有效性

深度：在中等深度处Westergaard应力较小，在很大深度处两种解趋于接近；最大应力出现在$z = r/(\sqrt{2}\,\eta) = 6.61$ m处(Boussinesq: $r\sqrt{1.5} = 6.12$ m)

叠加：每个荷载按各自的距离r计算，应力相加（算例中两个荷载：0.02756 kN/m²）

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1938). A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics: soft material reinforced by numerous strong horizontal sheets. In Contributions to the Mechanics of Solids, Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume. Macmillan, New York, 268–277.

注

所有数值算例均由模块自身的计算引擎生成，模块给出相同的数值。模块的初始算例为P = 5 kN, r = 5 m, μ_s = 0.3和z = 4 m。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入集中荷载、A点和μ_s值；模块一并给出η、影响系数I_5、各荷载的贡献、与Boussinesq解的对比、深度剖面、分步解答和报告。

打开模块→　**理论页面 →**

用手机打开
试用模块无需注册。