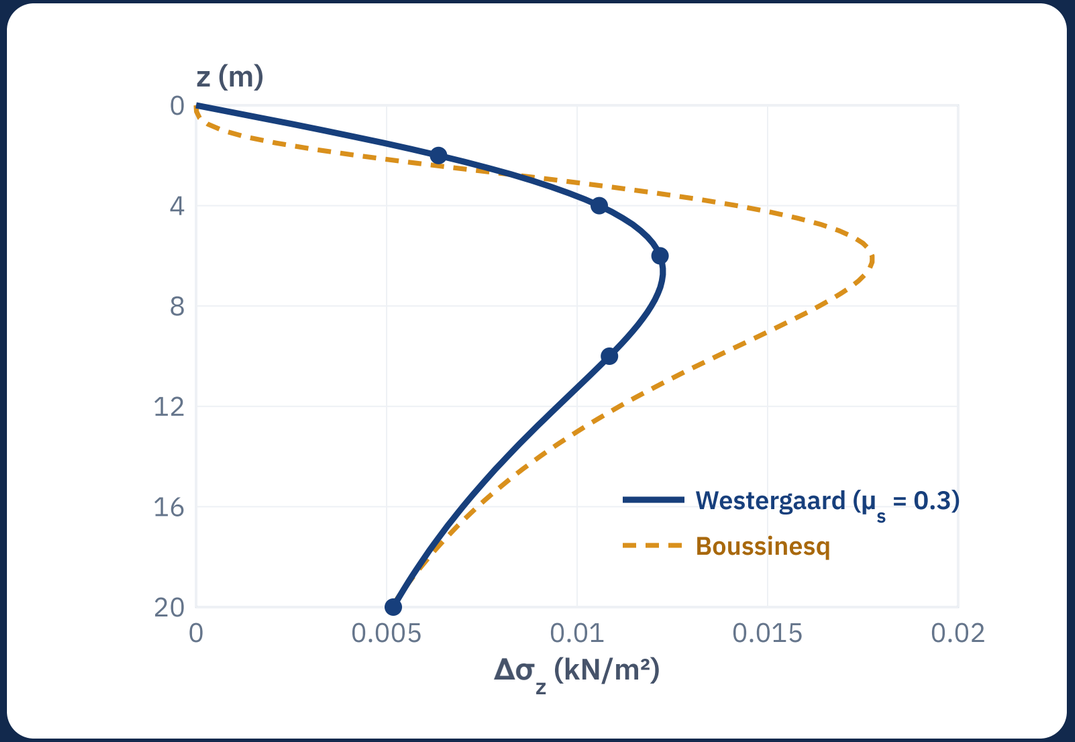
Apresentação de aula de geotecnia · Tensões no solo

# Westergaard: tensão sob uma carga pontual

Aula: tensão sob uma carga pontual em solo estratificado cujas deformações laterais são restringidas por placas rígidas; um ponto é resolvido à mão do início ao fim.

- Meio de Westergaard
- η e $I_5$
- Efeito de $\mu_s$
- Comparação com Boussinesq
- Superposição



Introdução

# O que veremos nesta aula?

- O **meio de Westergaard**: idealização de solo elástico que contém placas horizontais finas e rígidas, que não permitem deformação lateral
- Acréscimo de tensão vertical sob carga pontual: **η**, o **fator de influência $I_5$** e **$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$**
- Onde a tensão de Westergaard é menor e onde é maior que a tensão de **Boussinesq**; o papel do coeficiente de Poisson **$\mu_s$**
- A variação com a profundidade e com a distância horizontal, a profundidade da tensão máxima
- Superposição de **várias cargas pontuais**

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: fórmula e justificativa

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Exemplo: P = 5 kN, o ponto A está a r = 5 m da carga e a z = 4 m de profundidade; no solo entre as placas, $\mu_s$ = 0.3.

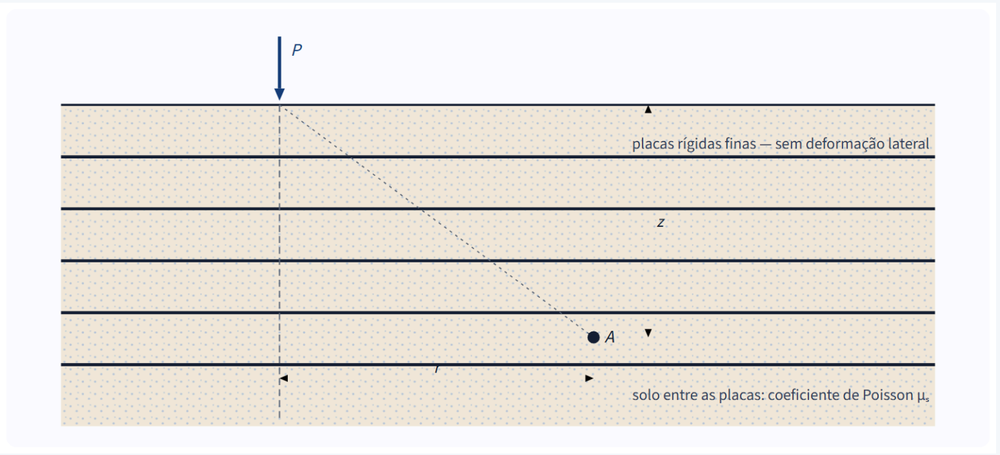
# Solo com placa horizontal rígida

TEORIA

As soluções baseadas em Boussinesq apoiam-se na integração da solução da carga pontual para um semiespaço **homogêneo e isótropo**. Muitos solos, porém, são **estratificados**

Exemplo: uma argila que contém finas lentes de areia e cuja deformação horizontal é limitada por camadas mais rígidas

**Westergaard (1938)** idealizou este solo da seguinte forma: um meio elástico com grande número de **lâminas horizontais finas e rígidas** que não permitem deformação lateral



# Acréscimo de tensão vertical e η

TEORIA

Acréscimo de tensão vertical produzido pela carga pontual **P** na superfície, no ponto A, situado à distância horizontal **r** e à profundidade **z**; $\mu_s$ é o coeficiente de Poisson do solo entre placas rígidas, $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

A solução é reescrita com um **valor de influência**, como no $I_1$ de Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\,\eta}{2\pi z^2}\left[\frac{1}{\eta^2 + (r/z)^2}\right]^{3/2}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1 - 2\mu_s}{2 - 2\mu_s}}$$

# $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$

TEORIA

A solução de Westergaard escreve-se, como a de Boussinesq, na forma **$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$**; $I_5$ depende apenas de **$r/(\eta z)$** e de **$\eta$**

Para comparação, a solução de Boussinesq: $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$, em que $I_1$ depende apenas de $r/z$ (a tensão vertical independe do coeficiente de Poisson)

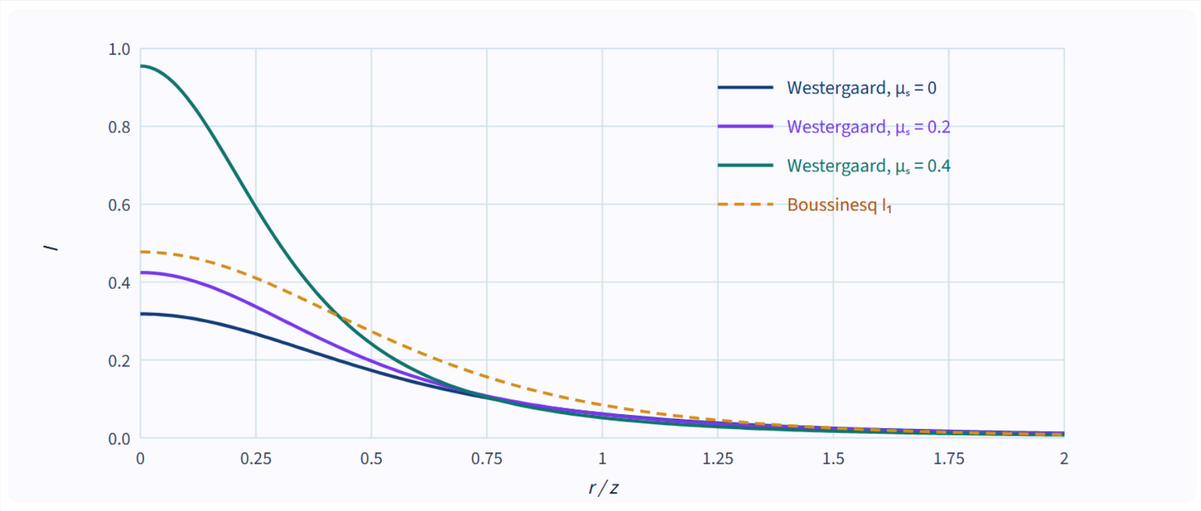
$$\Delta\sigma_z = \left(\frac{P}{z^2}\right) I_5 \qquad I_5 = \frac{1}{2\pi\eta^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2}$$

$$\text{Boussinesq:} \quad I_1 = \frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1\right]^{-5/2}$$

# Variação do valor de influência com r/z

TEORIA

| r/z | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.8 | 1 | 1.5 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_s = 0$ | 0.3183 | 0.3090 | 0.2836 | 0.2483 | 0.2099 | 0.1733 | 0.1411 | 0.0925 | 0.0613 | 0.0247 | 0.0118 | 0.0038 | 0.0009 |
| $\mu_s = 0.2$ | 0.4244 | 0.4080 | 0.3646 | 0.3074 | 0.2491 | 0.1972 | 0.1547 | 0.0953 | 0.0604 | 0.0229 | 0.0107 | 0.0034 | 0.0008 |
| $\mu_s = 0.4$ | 0.9549 | 0.8750 | 0.6916 | 0.4997 | 0.3480 | 0.2416 | 0.1700 | 0.0897 | 0.0516 | 0.0173 | 0.0076 | 0.0023 | 0.0005 |
| Boussinesq $I_1$ | 0.4775 | 0.4657 | 0.4329 | 0.3849 | 0.3295 | 0.2733 | 0.2214 | 0.1386 | 0.0844 | 0.0251 | 0.0085 | 0.0015 | 0.0001 |



# Westergaard e Boussinesq sob a carga

TEORIA

Diretamente sob a carga (r = 0), a tensão de Westergaard é **menor** que a de Boussinesq para **$\mu_s$ = 0**: $I_5 = 1/\pi = 0.3183$; para Boussinesq, $I_1 = 3/2\pi = 0.4775$. Placas rígidas espalham a carga lateralmente

Sob a carga, a tensão **cresce à medida que $\mu_s$ aumenta**; para **$\mu_s$ = 0.5**, $\eta = 0$ e a solução **perde a validade**. O módulo aceita $\mu_s$ entre 0 e 0.49

| $\mu_s$ | 0.00 | 0.10 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.40 | 0.45 | 0.49 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta$ | 0.7071 | 0.6667 | 0.6124 | 0.5774 | 0.5345 | 0.4082 | 0.3015 | 0.1400 |
| $\eta^2$ | 0.5000 | 0.4444 | 0.3750 | 0.3333 | 0.2857 | 0.1667 | 0.0909 | 0.0196 |
| $I_5$ (r = 0) = $1/(2\pi\eta^2)$ | 0.3183 | 0.3581 | 0.4244 | 0.4775 | 0.5570 | 0.9549 | 1.7507 | 8.1169 |

# Superposição

TEORIA

Como o meio de Westergaard é **elástico**, a tensão de cada carga é obtida com **sua própria distância r** ao ponto A, e as tensões são **somadas**

As cargas estão em suas próprias posições sobre o terreno; podem ser inseridas até oito cargas e duas delas nunca podem ocupar a mesma posição

O valor de comparação de Boussinesq também é somado da mesma forma

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{P_k}{z^2}\, I_{5,k} \qquad r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \qquad I_{5,k} = I_5\left(\frac{r_k}{\eta z}\right)$$

# Enunciado

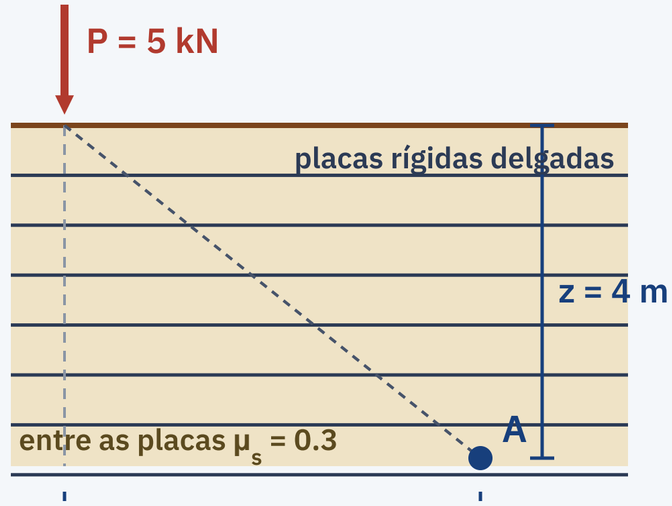
EXEMPLO

**Dados**

| | |
|---|---|
| Carga | **na superfície** $P = 5$ **kN,** $(x_L;\, y_L) = (0;\, 0)$ |
| Ponto A | $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m,** $z = 4$ **m** |
| Solo | **entre placas** $\mu_s = 0.3$ |

**PEDE-SE**

**η**, **r/(ηz)**, fator de influência $\mathbf{I_5}$, $\mathbf{\Delta\sigma_z}$ e comparação com a tensão de Boussinesq.



# Solução (1/3)

SOLUÇÃO

**1** Constante de Westergaard η

$$\eta = \sqrt{\frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s}} = \sqrt{\frac{1-0.6}{2-0.6}} = \sqrt{0.2857} = \mathbf{0.5345}$$

**2** Distância horizontal e r/(ηz)

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \mathbf{5.00\ m}$$

$$\frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.5345\,(4)} = \mathbf{2.3385}$$

η = **0.5345** (η² = 0.2857). O ponto A está a uma distância **r = 5 m** da carga; em Boussinesq essa distância entraria com r/z = 1.25, em Westergaard entra com r/(ηz) = **2.3385**.

# Solução (2/3)

SOLUÇÃO

**3** Valor de influência $I_5$

$$I_5 = \frac{1}{2\pi\eta^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2} = \frac{1}{2\pi\,(0.2857)}\left[2.3385^2 + 1\right]^{-3/2}$$

$$= 0.5570 \times [6.4687]^{-3/2} = 0.5570 \times 0.06078 = \mathbf{0.03386}$$

**4** Acréscimo de tensão vertical

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2}\,I_5 = \frac{5}{4^2}\,(0.03386) = 0.3125 \times 0.03386 = \mathbf{0.01058}\ \mathrm{kN/m^2}$$

A carga pontual de 5 kN na superfície produz, no ponto A, em meio de Westergaard, um acréscimo de **$\Delta\sigma_z$ = 0.01058 kN/m²** ($I_5$ = 0.03386).

# Solução (3/3)

SOLUÇÃO

**5** Verificação com a primeira forma da equação

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\eta}{2\pi z^2}\left[\frac{1}{\eta^2 + (r/z)^2}\right]^{3/2} = \frac{5\,(0.5345)}{2\pi\,(16)}\left[\frac{1}{0.2857 + 1.5625}\right]^{3/2} = \mathbf{0.01058}$$

**6** Boussinesq (comparação)

$$I_1 = \frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1\right]^{-5/2} = \frac{3}{2\pi}\left[2.5625\right]^{-5/2} = \mathbf{0.04542}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = \frac{5}{4^2}\,(0.04542) = \mathbf{0.01419}\ \mathrm{kN/m^2} \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = 0.745$$

As duas formulações fornecem o mesmo resultado. Nesse ponto, a tensão de Westergaard é cerca de **74.5%** da de Boussinesq: como as lâminas rígidas espalham a carga lateralmente, a tensão em profundidade intermediária é menor.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Enunciado

EXEMPLO

**Dados**

| | |
|---|---|
| Carga e ponto | $P = 5$ **kN; o ponto A está a** $r = 5$ **m da carga;** $\mu_s = 0.3$ |
| Profundidades | $z = 2,\ 4,\ 6 \ldots 20$ **m (tabela de perfil do módulo)** |

**PEDE-SE**

Em cada profundidade: **r/(ηz)**, $\mathbf{I_5}$, tensões de Westergaard e de Boussinesq; e a **profundidade da tensão máxima**.

# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

| z (m) | r/(ηz) | $I_5$ | $\Delta\sigma_z$ Westergaard | $\Delta\sigma_z$ Boussinesq | Razão W/B |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4.677 | 0.0051 | **0.00636** | 0.00422 | 1.509 |
| 4 | 2.339 | 0.0339 | **0.01058** | 0.01419 | 0.745 |
| 6 | 1.559 | 0.0877 | **0.01218** | 0.01774 | 0.686 |
| 8 | 1.169 | 0.1529 | **0.01195** | 0.01636 | 0.731 |
| 10 | 0.935 | 0.2170 | **0.01085** | 0.01367 | 0.794 |
| 12 | 0.780 | 0.2733 | **0.00949** | 0.01111 | 0.854 |
| 14 | 0.668 | 0.3202 | **0.00817** | 0.00902 | 0.905 |
| 16 | 0.585 | 0.3584 | **0.00700** | 0.00739 | 0.948 |
| 18 | 0.520 | 0.3892 | **0.00601** | 0.00612 | 0.982 |
| 20 | 0.468 | 0.4140 | **0.00518** | 0.00513 | 1.009 |

Em **z = 2 m** a tensão de Westergaard é maior (0.00636 e 0.00422); **em profundidades intermediárias é menor** (z = 6 m: 0.01218 e 0.01774); em **z = 20 m** as duas soluções se aproximam (0.00518 e 0.00513).

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

**1** à mão, para z = 10 m

$$\frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.5345\,(10)} = 0.9354$$

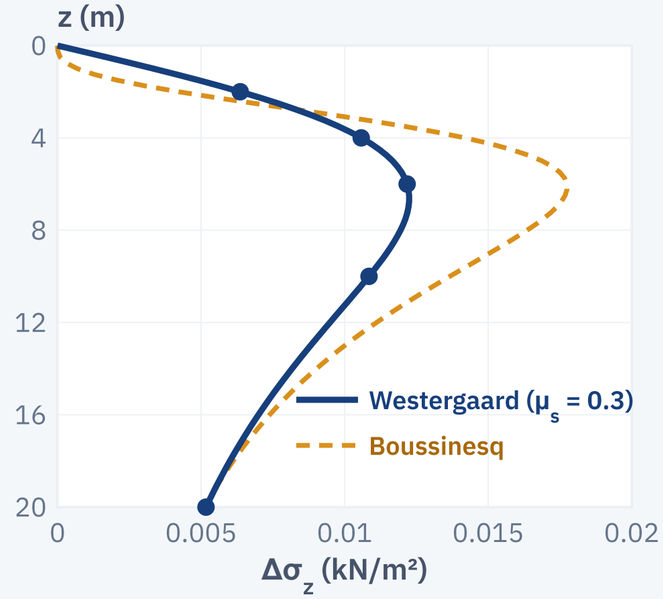
$$I_5 = 0.5570\,[1.8750]^{-3/2} = 0.2170$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{10^2}\,(0.2170) = \mathbf{0.01085}\ \mathrm{kN/m^2}$$

**2** Profundidade da tensão máxima ($d\Delta\sigma_z/dz = 0$)

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\eta}{2\pi}\,z\,(r^2 + \eta^2 z^2)^{-3/2}$$

$$z^* = \frac{r}{\sqrt{2}\,\eta} = \frac{5}{1.4142\,(0.5345)} = \mathbf{6.61}\ \mathrm{m}$$




Tensão máxima: Westergaard em **z = 6.61 m** (0.01225), Boussinesq (z* = r√1.5) em **z = 6.12 m** (0.01775 kN/m²).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Enunciado

EXEMPLO

**Dados**

| | |
|---|---|
| Carga e ponto | $P = 5$ **kN,** $r = 5$ **m,** $z = 4$ **m (ponto do Exemplo 1)** |
| Variável | $\mu_s = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.45;\ 0.49$ |

**PEDE-SE**

Para cada $\mu_s$, **η**, **r/(ηz)**, $\mathbf{I_5}$, $\mathbf{\Delta\sigma_z}$ e a razão em relação a Boussinesq.

# Solução (1/3)

SOLUÇÃO

| $\mu_s$ | $\eta$ | $r/(\eta z)$ | $I_5$ | $\Delta\sigma_z$ (kN/m²) | $\Delta\sigma_z$ / Boussinesq |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.7071 | 1.768 | 0.03799 | **0.01187** | 0.836 |
| 0.10 | 0.6667 | 1.875 | 0.03732 | **0.01166** | 0.822 |
| 0.20 | 0.6124 | 2.041 | 0.03614 | **0.01129** | 0.796 |
| 0.30 | 0.5345 | 2.339 | 0.03386 | **0.01058** | 0.745 |
| 0.40 | 0.4082 | 3.062 | 0.02858 | **0.00893** | 0.629 |
| 0.45 | 0.3015 | 4.146 | 0.02257 | **0.00705** | 0.497 |
| 0.49 | 0.1400 | 8.927 | 0.01120 | **0.00350** | 0.247 |

Neste ponto (r/z = 1.25), **à medida que $\mu_s$ aumenta, a tensão de Westergaard diminui**: 0.01187 em $\mu_s$ = 0 e 0.00350 kN/m² em $\mu_s$ = 0.49. No eixo da carga ocorre o inverso (Exemplo 4): o sentido do efeito depende da posição do ponto.

# Solução (2/3)

SOLUÇÃO

**1** $\mu_s = 0$

$$\eta^2 = \frac{1}{2} = 0.5000\,, \quad \eta = 0.7071\,, \quad \frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.7071(4)} = 1.7678$$

$$I_5 = \frac{1}{\pi}\left[4.1250\right]^{-3/2} = 0.3183 \times 0.11936 = 0.03799$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.03799) = \mathbf{0.01187}$$

Quando o coeficiente de Poisson é zero, η = 1/√2 = 0.7071; nesse ponto obtém-se **$\Delta\sigma_z$ = 0.01187 kN/m²** (83.6% do valor de Boussinesq).

# Solução (3/3)

SOLUÇÃO

**2** $\mu_s = 0.4$

$$\eta^2 = \frac{1 - 0.8}{2 - 0.8} = 0.1667\,, \quad \eta = 0.4082\,, \quad \frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.4082(4)} = 3.0619$$

$$I_5 = 0.9549\,[10.3750]^{-3/2} = 0.9549 \times 0.02992 = 0.02858$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.02858) = \mathbf{0.00893}$$

À medida que o coeficiente de Poisson do solo entre as placas aumenta, η diminui; r/(ηz) aumenta e $I_5$ nesse ponto diminui: **0.01187 → 0.00893 kN/m²** ($\mu_s$ = 0 → 0.4).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Enunciado

EXEMPLO

**Dados**

| | |
|---|---|
| Carga | $P = 5$ **kN,** $\mu_s = 0.3$ |
| Profundidade | $z = 4$ **m; distância horizontal** $r = 0,\ 1,\ 2 \ldots 10$ **m** |
| Enunciado | **como se comparam as tensões de Westergaard e Boussinesq no eixo da carga; para que valor de** $\mu_s$ **as duas soluções são iguais?** |

**PEDE-SE**

**$\Delta\sigma_z$** sob a carga (r = 0), o mesmo valor para $\mu_s = 0$ e a **tabela do perfil horizontal**.

# Solução (1/3)

SOLUÇÃO

**1** r = 0 para $\mu_s = 0.3$

$$I_5(0) = \frac{1}{2\pi\eta^2} = \frac{1}{2\pi\,(0.2857)} = 0.5570 \qquad \Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.5570) = \mathbf{0.1741}$$

$$\text{Boussinesq: } I_1(0) = \frac{3}{2\pi} = 0.4775 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_{z,B} = \frac{5}{16}\,(0.4775) = \mathbf{0.1492}$$

**2** Para $\mu_s = 0$, r = 0

$$I_5(0) = \frac{1}{\pi} = 0.3183 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.3183) = \mathbf{0.0995} \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = \frac{1/\pi}{3/2\pi} = \frac{2}{3}$$

**$\mu_s$ = 0**: Westergaard é **2/3** de Boussinesq (0.0995 e 0.1492); **$\mu_s$ = 0.3**: supera o valor de Boussinesq (0.1741); as duas soluções se igualam em **$\mu_s$ = 0.25**.

# Solução (2/3)

SOLUÇÃO

**3** $\mu_s$ para o qual as duas soluções são iguais no eixo

$$\frac{1}{2\pi\eta^2} = \frac{3}{2\pi} \Rightarrow \eta^2 = \frac{1}{3} = \frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s} \Rightarrow \mu_s = \mathbf{0.25}$$

**4** Razão no eixo: Westergaard / Boussinesq = $(1/2\pi\eta^2) / (3/2\pi) = 1/(3\eta^2)$

| $\mu_s$ | 0.00 | 0.10 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.40 | 0.45 | 0.49 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta^2$ | 0.5000 | 0.4444 | 0.3750 | 0.3333 | 0.2857 | 0.1667 | 0.0909 | 0.0196 |
| $\Delta\sigma_z$ Westergaard / Boussinesq | 0.667 | 0.750 | 0.889 | 1.000 | 1.167 | 2.000 | 3.667 | 17.000 |

No eixo da carga, a razão cresce rapidamente com $\mu_s$: 2/3 para $\mu_s = 0$, 1 para $\mu_s = 0.25$, 3.67 para $\mu_s = 0.45$; quando $\mu_s$ se aproxima de 0.5, $\eta \to 0$ e a razão aumenta sem limite.

# Solução (3/3)

SOLUÇÃO

| r (m) | r/z | r/(ηz) | $I_5$ | $\Delta\sigma_z$ Westergaard | $\Delta\sigma_z$ Boussinesq | Razão W/B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00 | 0.000 | 0.5570 | **0.17408** | 0.14921 | 1.167 |
| 1 | 0.25 | 0.468 | 0.4140 | **0.12938** | 0.12822 | 1.009 |
| 2 | 0.50 | 0.935 | 0.2170 | **0.06780** | 0.08541 | 0.794 |
| 3 | 0.75 | 1.403 | 0.1089 | **0.03403** | 0.04889 | 0.696 |
| 4 | 1.00 | 1.871 | 0.0584 | **0.01824** | 0.02638 | 0.691 |
| 5 | 1.25 | 2.339 | 0.0339 | **0.01058** | 0.01419 | 0.745 |
| 6 | 1.50 | 2.806 | 0.0211 | **0.00658** | 0.00784 | 0.840 |
| 8 | 2.00 | 3.742 | 0.0096 | **0.00300** | 0.00267 | 1.123 |
| 10 | 2.50 | 4.677 | 0.0051 | **0.00159** | 0.00105 | 1.509 |

A tensão de Westergaard está acima da de Boussinesq no eixo; a partir de **r/z ≈ 0.26** passa abaixo da de Boussinesq (r = 2 m: 0.06780 e 0.08541) e, a partir de **r/z ≈ 1.81** (r ≈ 7.2 m), volta a ficar acima dela (r = 10 m: 0.00159 e 0.00105): ao longe, a tensão de Westergaard diminui mais lentamente.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Enunciado

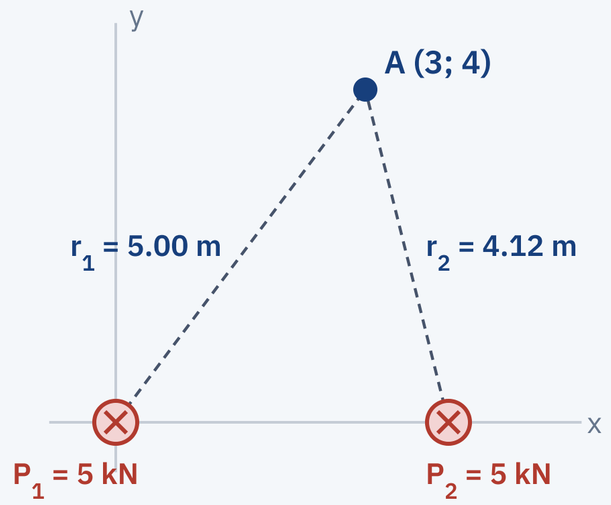
EXEMPLO

**PEDE-SE**

Os valores de **r**, $\mathbf{I_5}$ e $\mathbf{\Delta\sigma_z}$ de cada carga; tensão total e soma de Boussinesq.

**Dados**

| | |
|---|---|
| Cargas | $P_1 = 5$ **kN,** $(0;\ 0)$ **e** $P_2 = 5$ **kN,** $(4;\ 0)$ |
| Ponto A | $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m,** $z = 4$ **m** |
| Solo | $\mu_s = 0.3$ |



# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

**1** $P_1$ (0; 0)

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.000 \text{ m}$$

$$\frac{r_1}{\eta z} = \frac{5.000}{0.5345(4)} = 2.3385\ , \quad I_5 = 0.03386$$

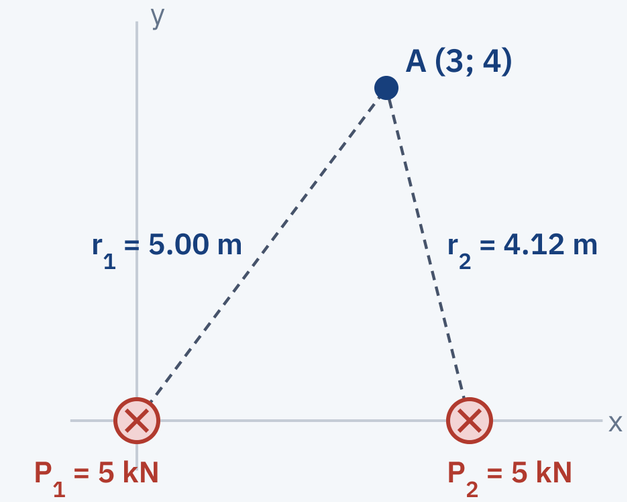
$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{5}{16}\,(0.03386) = \mathbf{0.01058}\ \text{kN/m}^2$$

**2** $P_2$ (4; 0)

$$r_2 = \sqrt{(3-4)^2 + 4^2} = 4.123 \text{ m}$$

$$\frac{r_2}{\eta z} = \frac{4.123}{0.5345(4)} = 1.9284\ , \quad I_5 = 0.05434$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{5}{16}\,(0.05434) = \mathbf{0.01698}\ \text{kN/m}^2$$




A carga 2 está mais próxima: **0.01698**; carga 1: **0.01058 kN/m²**.

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

**1** As tensões são somadas

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.01058 + 0.01698 = \mathbf{0.02756}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 0.01419 + 0.02442 = 0.03862\ \mathrm{kN/m^2}$$

**2** Perfil de profundidade sob o mesmo ponto (soma das duas cargas)

| z (m) | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 16 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta\sigma_z$ Westergaard | 0.0174 | 0.0276 | 0.0301 | 0.0282 | 0.0247 | 0.0210 | 0.0150 | 0.0108 |
| $\Delta\sigma_z$ Boussinesq | 0.0137 | 0.0386 | 0.0430 | 0.0371 | 0.0298 | 0.0237 | 0.0153 | 0.0105 |

No ponto A (z = 4 m), as duas cargas produzem em conjunto **$\Delta\sigma_z$ = 0.02756 kN/m²**; a soma de Boussinesq é 0.03862 kN/m². O total é a soma dos valores obtidos para cada carga isoladamente; o valor de uma única carga (Exemplo 1) é uma parcela desse total.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Resumo

# Pontos-chave

**Meio de Westergaard**: placas horizontais rígidas e finas impedem a deformação lateral; $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$, $I_5 = [1/(2\pi\eta^2)]\,[(r/\eta z)^2 + 1]^{-3/2}$, $\eta = \sqrt{[(1 - 2\mu_s)/(2 - 2\mu_s)]}$

**Exemplo (P = 5 kN, r = 5 m, z = 4 m, $\mu_s$ = 0.3)**: η 0.5345; r/(ηz) 2.339; $I_5$ 0.03386 → **$\Delta\sigma_z$ = 0.01058 kN/m²**; Boussinesq 0.01419

**No eixo da carga**, $I_5 = 1/(2\pi\eta^2)$: para $\mu_s = 0$, $1/\pi = 0.3183$ (Boussinesq $3/2\pi = 0.4775$); a tensão aumenta com $\mu_s$ e, em $\mu_s = 0.5$, a solução perde a validade

**Profundidade**: em profundidades intermediárias, a tensão de Westergaard é menor e, em grande profundidade, as duas soluções se aproximam; a maior tensão ocorre em $z = r/(\sqrt{2}\,\eta) = 6.61$ m (Boussinesq: $r\sqrt{1.5} = 6.12$ m)

**Superposição**: cada carga é considerada com sua própria distância r e as tensões são somadas (no exemplo, duas cargas: 0.02756 kN/m²)

# Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1938). A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics: soft material reinforced by numerous strong horizontal sheets. In Contributions to the Mechanics of Solids, Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume. Macmillan, New York, 268–277.

**NOTA**

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o mecanismo de cálculo do próprio módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O exemplo inicial do módulo é P = 5 kN, r = 5 m, $\mu_s$ = 0.3 e z = 4 m.

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

# Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva as cargas pontuais, o ponto A e o valor de $\mu_s$; o módulo fornece η, o fator de influência $I_5$, a contribuição de cada carga, a comparação com Boussinesq, o perfil em profundidade, a solução passo a passo e o relatório.

**Abrir o módulo →** | **Página de teoria →**

**Abrir no celular**
Os módulos de teste não exigem cadastro.