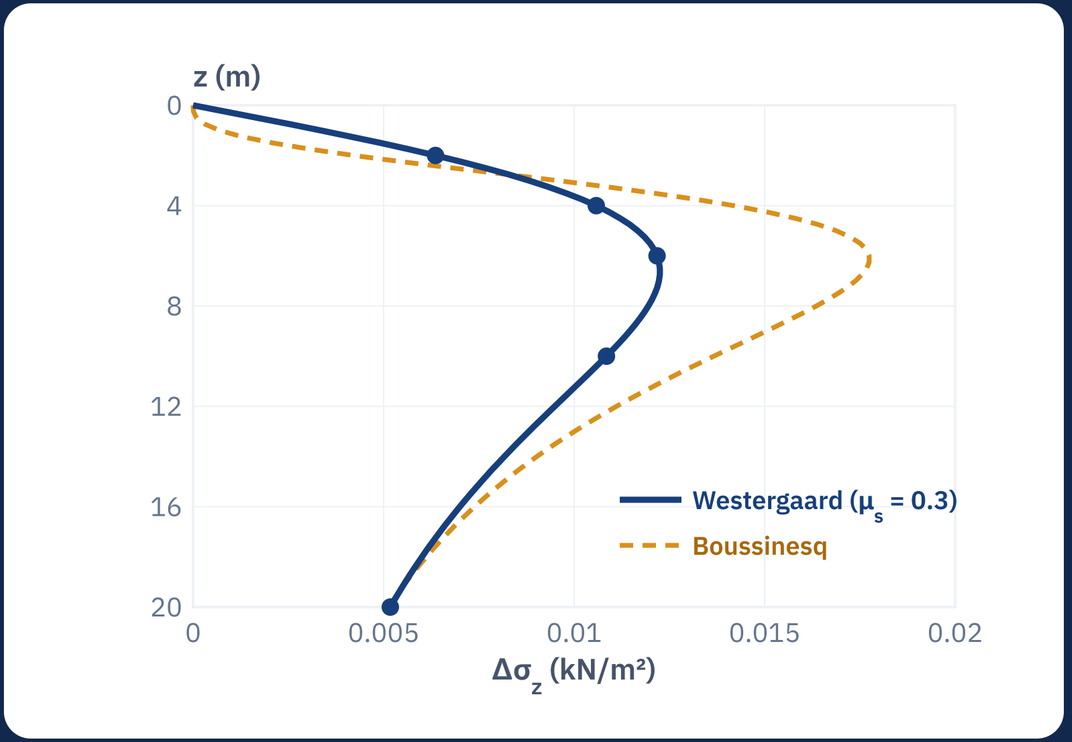
GeoTerva

지반공학 강의 자료 · 지반 내 응력

Westergaard: 집중하중 아래의 응력

강의: 횡방향 변형률이 강성판으로 구속된 층상 지반에서 집중하중 아래의 응력; 한 점을 처음부터 끝까지 손으로 푼다.

- Westergaard 매질
- η와 I_5
- μ_s의 영향
- Boussinesq와의 비교
- 중첩



개요

이 강의에서 다루는 내용

Westergaard 매질: 측방 변형을 허용하지 않는 얇고 강성인 수평판을 포함한 탄성 지반의 이상화 모델

집중하중 아래의 연직응력 증가량: **η**, **영향값 I_5** 및 **$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$**

Westergaard 응력이 **Boussinesq** 응력보다 어디에서 작고 어디에서 큰지; 포아송비 **μ_s**의 역할

깊이와 수평거리에 따른 변화, 최대 응력이 발생하는 깊이

여러 집중하중의 중첩

강의 흐름

각 주제는 **세 단계**로 다룬다:

1 · **이론**: 공식과 그 근거

2 · **문제**: 조건과 구하는 값

3 · **풀이**: 단계별 수치 계산

예제: P = 5 kN, A점은 하중으로부터 r = 5 m 떨어져 있고 깊이 z = 4 m에 있다; 판 사이의 지반에서 $\mu_s = 0.3$.

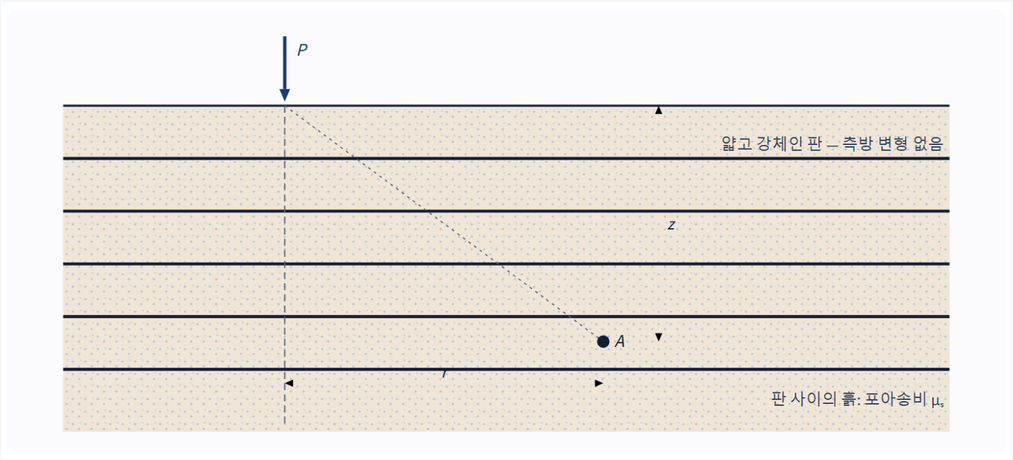
강성 수평판이 있는 지반

이론

Boussinesq에 기초한 해는 **균질하고 등방성인** 반무한체에 대한 집중하중 해를 적분하는 데 기초한다. 그러나 많은 지반은 **층상**이다

예제: 얇은 모래 협재층을 포함하고 수평 변형이 더 강성인 지층에 의해 구속되는 점토

Westergaard(1938)는 이 지반을 다음과 같이 이상화하였다: 횡방향 변형을 허용하지 않는 다수의 **얇고 강성인 수평 판**을 포함하는 탄성 매질



수직응력 증가량과 η

이론

지표면의 집중하중 **P**가 수평거리 **r**, 깊이 **z**인 점 A에 일으키는 연직응력 증가량이며, μ_s는 강성 판 사이 지반의 포아송비이고 $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$이다

해는 Boussinesq I_1에서와 같이 **영향값**으로 다시 나타낸다

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\,\eta}{2\pi z^2}\left[\frac{1}{\eta^2 + (r/z)^2}\right]^{3/2}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s}}$$

$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$

이론

Westergaard 해는 Boussinesq에서와 같이 **$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$** 형태로 쓰이며, I_5는 **$r/(\eta z)$**와 **η**에만 의존한다

비교를 위한 Boussinesq 해: $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$, I_1은 r/z에만 의존한다(연직응력은 포아송비와 무관하다)

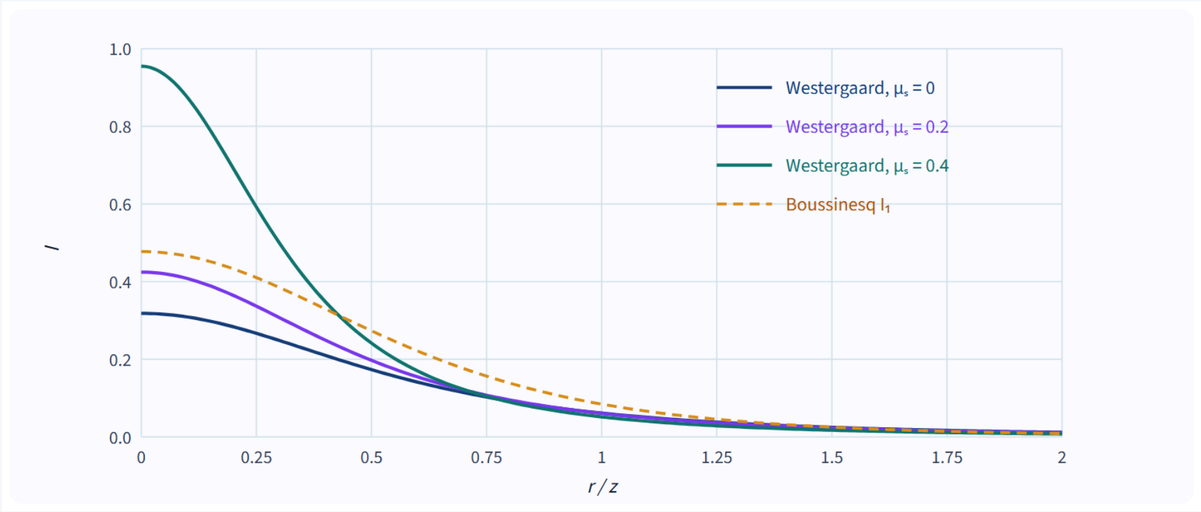
$$\Delta\sigma_z = \left(\frac{P}{z^2}\right) I_5 \qquad I_5 = \frac{1}{2\pi\eta^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2}$$

$$\text{Boussinesq:}\quad I_1 = \frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1\right]^{-5/2}$$

r/z에 따른 영향값의 변화

이론

r/z	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1	1.5	2	3	5
$\mu_s = 0$	0.3183	0.3090	0.2836	0.2483	0.2099	0.1733	0.1411	0.0925	0.0613	0.0247	0.0118	0.0038	0.0009
$\mu_s = 0.2$	0.4244	0.4080	0.3646	0.3074	0.2491	0.1972	0.1547	0.0953	0.0604	0.0229	0.0107	0.0034	0.0008
$\mu_s = 0.4$	0.9549	0.8750	0.6916	0.4997	0.3480	0.2416	0.1700	0.0897	0.0516	0.0173	0.0076	0.0023	0.0005
Boussinesq I_1	0.4775	0.4657	0.4329	0.3849	0.3295	0.2733	0.2214	0.1386	0.0844	0.0251	0.0085	0.0015	0.0001



하중 아래의 Westergaard와 Boussinesq

이론

하중 바로 아래(r = 0)에서 Westergaard 응력은 **$\mu_s = 0$**일 때 Boussinesq 응력보다 **작다**: $I_5 = 1/\pi = 0.3183$; Boussinesq의 경우 $I_1 = 3/2\pi = 0.4775$. 강성 판은 하중을 옆으로 분산시킨다

하중 아래에서 응력은 **μ_s가 커질수록 증가**하며, **$\mu_s = 0.5$**에서는 $\eta = 0$이 되어 해가 **유효성을 잃는다**. 모듈은 μ_s를 0에서 0.49 사이로 받는다

μ_s	0.00	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.45	0.49
η	0.7071	0.6667	0.6124	0.5774	0.5345	0.4082	0.3015	0.1400
η^2	0.5000	0.4444	0.3750	0.3333	0.2857	0.1667	0.0909	0.0196
I_5 (r = 0) = $1/(2\pi\eta^2)$	0.3183	0.3581	0.4244	0.4775	0.5570	0.9549	1.7507	8.1169

중첩

이론

Westergaard 매질은 **탄성**이므로 각 하중에 의한 응력은 A점까지의 **각자의 거리 r**로 구하며, 응력은 **합산**한다

하중은 지반 위의 각자의 위치에 놓이며, 최대 8개의 하중을 입력할 수 있고 어떤 두 하중도 같은 위치에 있을 수 없다

Boussinesq 비교값도 같은 방식으로 합산한다

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{P_k}{z^2} I_{5,k} \qquad r_k = \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2} \qquad I_{5,k} = I_5\left(\frac{r_k}{\eta z}\right)$$

문제

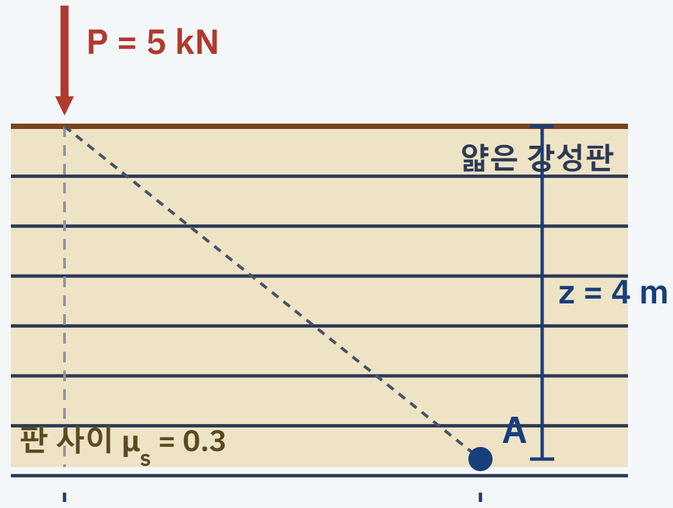
예제

구하는 값

η, **r/(ηz)**, 영향값 $\mathbf{I_5}$, $\mathbf{\Delta\sigma_z}$, 그리고 Boussinesq 응력과의 비교.

조건

하중	**지표면에서** $P = 5$ **kN,** $(x_L;\, y_L) = (0;\, 0)$
점 A	$x = 3$ **m,** $y = 4$ **m,** $z = 4$ **m**
지반	**판 사이** $\mu_s = 0.3$



풀이 (1/3)

풀이

1 Westergaard 상수 η

$$\eta = \sqrt{\frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s}} = \sqrt{\frac{1-0.6}{2-0.6}} = \sqrt{0.2857} = \mathbf{0.5345}$$

2 수평거리와 r/(ηz)

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \mathbf{5.00}\ \text{m}$$

$$\frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.5345\,(4)} = \mathbf{2.3385}$$

η = **0.5345** (η² = 0.2857). A점은 하중으로부터 **r = 5 m** 떨어져 있다. Boussinesq 해에서는 이 거리가 r/z = 1.25로 들어가지만, Westergaard 해에서는 r/(ηz) = **2.3385**가 들어간다.

풀이 (2/3)

풀이

3 영향값 I_5

$$I_5 = \frac{1}{2\pi\eta^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2} = \frac{1}{2\pi\,(0.2857)}\left[2.3385^2 + 1\right]^{-3/2}$$

$$= 0.5570 \times [6.4687]^{-3/2} = 0.5570 \times 0.06078 = \mathbf{0.03386}$$

4 수직응력 증가량

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_5 = \frac{5}{4^2}\,(0.03386) = 0.3125 \times 0.03386 = \mathbf{0.01058}\ \text{kN/m}^2$$

지표면의 5 kN 집중하중은 Westergaard 매질의 A점에서 **$\Delta\sigma_z$ = 0.01058 kN/m²**의 증가를 일으킨다(I_5 = 0.03386).

풀이 (3/3)

풀이

5 식의 첫 번째 형태를 이용한 검토

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\eta}{2\pi z^2}\left[\frac{1}{\eta^2 + (r/z)^2}\right]^{3/2} = \frac{5\,(0.5345)}{2\pi\,(16)}\left[\frac{1}{0.2857 + 1.5625}\right]^{3/2} = \mathbf{0.01058}$$

6 Boussinesq (비교)

$$I_1 = \frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1\right]^{-5/2} = \frac{3}{2\pi}\left[2.5625\right]^{-5/2} = \mathbf{0.04542}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = \frac{5}{4^2}\,(0.04542) = \mathbf{0.01419}\ \text{kN/m}^2 \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = 0.745$$

두 표현은 동일한 결과를 준다. 이 지점에서 Westergaard 응력은 Boussinesq 응력의 약 **74.5%** 이다: 강성 판이 하중을 측방으로 분산시키므로 중간 깊이에서 응력이 더 작다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

예제

조건

하중과 점	$P = 5$ kN; A점은 하중에서 $r = 5$ m 떨어짐; $\mu_s = 0.3$
깊이	$z = 2,\ 4,\ 6 \ldots 20$ m (모듈의 프로필 표)

구하는 값

각 깊이에서 **r/(ηz)**, **I_5**, Westergaard 및 Boussinesq 응력; **최대 응력의 깊이**.

풀이 (1/2)

풀이

z (m)	r/(ηz)	I_5	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	비 W/B
2	4.677	0.0051	**0.00636**	0.00422	1.509
4	2.339	0.0339	**0.01058**	0.01419	0.745
6	1.559	0.0877	**0.01218**	0.01774	0.686
8	1.169	0.1529	**0.01195**	0.01636	0.731
10	0.935	0.2170	**0.01085**	0.01367	0.794
12	0.780	0.2733	**0.00949**	0.01111	0.854
14	0.668	0.3202	**0.00817**	0.00902	0.905
16	0.585	0.3584	**0.00700**	0.00739	0.948
18	0.520	0.3892	**0.00601**	0.00612	0.982
20	0.468	0.4140	**0.00518**	0.00513	1.009

z = 2 m에서는 Westergaard 응력이 더 크고(0.00636과 0.00422), **중간 깊이에서는 더 작으며**(z = 6 m: 0.01218과 0.01774), **z = 20 m**에서는 두 해가 서로 가까워진다(0.00518과 0.00513).

풀이 (2/2)

풀이

1 z = 10 m에 대한 수계산

$$\frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.5345\,(10)} = 0.9354$$

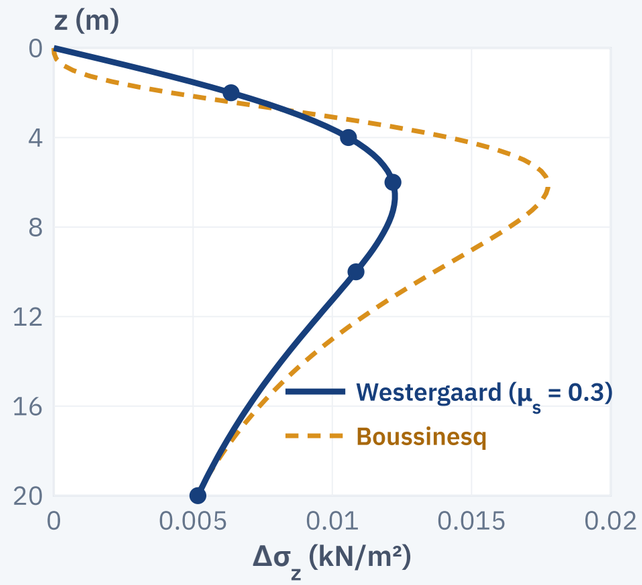
$$I_5 = 0.5570\,[1.8750]^{-3/2} = 0.2170$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{10^2}\,(0.2170) = \mathbf{0.01085}\ \text{kN/m}^2$$

2 최대 응력의 깊이 ($d\Delta\sigma_z/dz = 0$)

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\eta}{2\pi}\,z\,(r^2 + \eta^2 z^2)^{-3/2}$$

$$z^* = \frac{r}{\sqrt{2}\,\eta} = \frac{5}{1.4142\,(0.5345)} = \mathbf{6.61}\ \text{m}$$



최대 응력: Westergaard는 **z = 6.61 m**에서 (0.01225), Boussinesq(z* = r√1.5)는 **z = 6.12 m**에서 (0.01775 kN/m²).

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

예제

조건

하중과 점	$P = 5$ kN, $r = 5$ m, $z = 4$ m (예제 1의 점)
변화	$\mu_s = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.45;\ 0.49$

구하는 값

각 μ_s에 대한 η, $r/(\eta z)$, I_5, $\Delta\sigma_z$ 및 Boussinesq 값에 대한 비.

풀이 (1/3)

풀이

μ_s	η	$r/(\eta z)$	I_5	$\Delta\sigma_z$ (kN/m²)	$\Delta\sigma_z$ / Boussinesq
0.00	0.7071	1.768	0.03799	**0.01187**	0.836
0.10	0.6667	1.875	0.03732	**0.01166**	0.822
0.20	0.6124	2.041	0.03614	**0.01129**	0.796
0.30	0.5345	2.339	0.03386	**0.01058**	0.745
0.40	0.4082	3.062	0.02858	**0.00893**	0.629
0.45	0.3015	4.146	0.02257	**0.00705**	0.497
0.49	0.1400	8.927	0.01120	**0.00350**	0.247

이 지점(r/z = 1.25)에서는 **μ_s가 커질수록 Westergaard 응력이 작아진다**: μ_s = 0에서 0.01187, μ_s = 0.49에서 0.00350 kN/m²이다. 하중 축 위에서는 반대가 된다(예제 4): 영향의 방향은 지점의 위치에 따라 달라진다.

풀이 (2/3)

풀이

1 $\mu_s = 0$

$$\eta^2 = \frac{1}{2} = 0.5000\,, \quad \eta = 0.7071\,, \quad \frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.7071(4)} = 1.7678$$

$$I_5 = \frac{1}{\pi}\left[4.1250\right]^{-3/2} = 0.3183 \times 0.11936 = 0.03799$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.03799) = \mathbf{0.01187}$$

포아송비가 영이면 $\eta = 1/\sqrt{2} = 0.7071$이고, 이 점에서 **$\Delta\sigma_z$ = 0.01187 kN/m²**이다(Boussinesq 값의 83.6%).

풀이 (3/3)

풀이

2 μ_s = 0.4

$$\eta^2 = \frac{1-0.8}{2-0.8} = 0.1667\,, \quad \eta = 0.4082\,, \quad \frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.4082(4)} = 3.0619$$

$$I_5 = 0.9549\,[10.3750]^{-3/2} = 0.9549 \times 0.02992 = 0.02858$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.02858) = \mathbf{0.00893}$$

판 사이 지반의 포아송비가 증가하면 η는 작아지고 r/(ηz)는 커지며, 이 점에서 I_5는 감소한다: **0.01187 → 0.00893 kN/m²** (μ_s = 0 → 0.4).

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

예제

조건

하중	$P = 5$ kN, $\mu_s = 0.3$
깊이	$z = 4$ m; 수평 거리 $r = 0,\ 1,\ 2 \ldots 10$ m
문제	**하중 축 위에서 Westergaard 응력과 Boussinesq 응력은 어떻게 비교되는가; μ_s의 값이 얼마일 때 두 해가 같아지는가?**

구하는 값

하중 직하의 $\Delta\sigma_z$(r = 0), μ_s = 0일 때의 동일한 값 및 **수평 분포표**.

풀이 (1/3)

풀이

1 $\mu_s = 0.3$일 때 r = 0

$$I_5(0) = \frac{1}{2\pi\eta^2} = \frac{1}{2\pi\,(0.2857)} = 0.5570 \qquad \Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.5570) = \mathbf{0.1741}$$

$$\text{Boussinesq: } I_1(0) = \frac{3}{2\pi} = 0.4775 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_{z,B} = \frac{5}{16}\,(0.4775) = \mathbf{0.1492}$$

2 $\mu_s = 0$인 경우 r = 0

$$I_5(0) = \frac{1}{\pi} = 0.3183 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.3183) = \mathbf{0.0995} \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = \frac{1/\pi}{3/2\pi} = \frac{2}{3}$$

$\mu_s = 0$: Westergaard 값은 Boussinesq의 **2/3**이다(0.0995와 0.1492); **$\mu_s = 0.3$**: Westergaard 값이 더 크다(0.1741); 두 해는 **$\mu_s = 0.25$**에서 같아진다.

풀이 (2/3)

풀이

3 축 상에서 두 해가 일치하는 μ_s 값

$$\frac{1}{2\pi\eta^2} = \frac{3}{2\pi} \Rightarrow \eta^2 = \frac{1}{3} = \frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s} \Rightarrow \mu_s = \mathbf{0.25}$$

4 축 위에서의 비: Westergaard / Boussinesq = $(1/2\pi\eta^2) / (3/2\pi) = 1/(3\eta^2)$

μ_s	0.00	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.45	0.49
η^2	0.5000	0.4444	0.3750	0.3333	0.2857	0.1667	0.0909	0.0196
$\Delta\sigma_z$ Westergaard / Boussinesq	0.667	0.750	0.889	1.000	1.167	2.000	3.667	17.000

하중 축 위에서 비는 μ_s에 따라 급격히 커진다: μ_s = 0에서 2/3, μ_s = 0.25에서 1, μ_s = 0.45에서 3.67이며, μ_s가 0.5에 가까워지면 $\eta \to 0$이 되어 비는 한없이 증가한다.

풀이 (3/3)

풀이

r (m)	r/z	r/(ηz)	I_5	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	비 W/B
0	0.00	0.000	0.5570	**0.17408**	0.14921	1.167
1	0.25	0.468	0.4140	**0.12938**	0.12822	1.009
2	0.50	0.935	0.2170	**0.06780**	0.08541	0.794
3	0.75	1.403	0.1089	**0.03403**	0.04889	0.696
4	1.00	1.871	0.0584	**0.01824**	0.02638	0.691
5	1.25	2.339	0.0339	**0.01058**	0.01419	0.745
6	1.50	2.806	0.0211	**0.00658**	0.00784	0.840
8	2.00	3.742	0.0096	**0.00300**	0.00267	1.123
10	2.50	4.677	0.0051	**0.00159**	0.00105	1.509

Westergaard 응력은 축 상에서 Boussinesq 값보다 크다. **r/z ≈ 0.26** 이후에는 Boussinesq 값보다 작아지고(r = 2 m: 0.06780 및 0.08541), **r/z ≈ 1.81**(r ≈ 7.2 m) 이후에는 다시 그 값보다 커진다(r = 10 m: 0.00159 및 0.00105). 멀리 떨어진 곳에서는 Westergaard 응력이 더 느리게 감소한다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

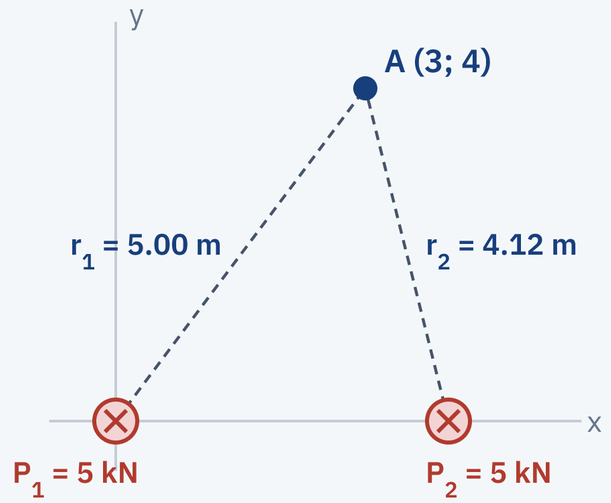
예제

구하는 값

각 하중의 **r**, $\mathbf{I_5}$, $\mathbf{\Delta\sigma_z}$ 값; 전체 응력과 Boussinesq 합.

조건

하중	$P_1 = 5$ **kN,** $(0;\ 0)$ **및** $P_2 = 5$ **kN,** $(4;\ 0)$
점 A	$x = 3$ **m,** $y = 4$ **m,** $z = 4$ **m**
지반	$\mu_s = 0.3$



풀이 (1/2)

풀이

1 P_1 (0; 0)

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.000 \text{ m}$$

$$\frac{r_1}{\eta z} = \frac{5.000}{0.5345(4)} = 2.3385\,, \quad I_5 = 0.03386$$

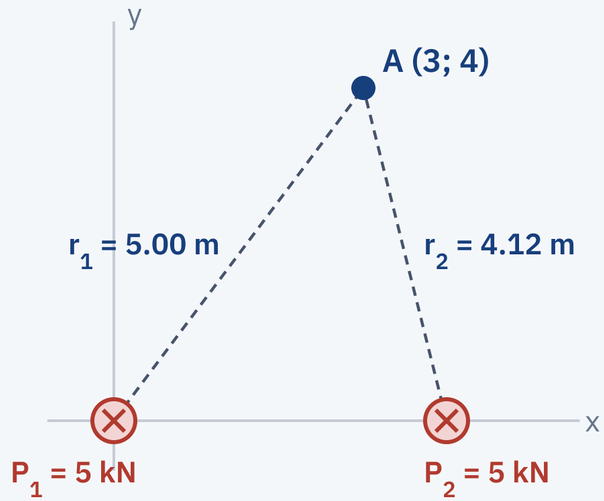
$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{5}{16}\,(0.03386) = \mathbf{0.01058}\ \text{kN/m}^2$$

2 P_2 (4; 0)

$$r_2 = \sqrt{(3-4)^2 + 4^2} = 4.123 \text{ m}$$

$$\frac{r_2}{\eta z} = \frac{4.123}{0.5345(4)} = 1.9284\,, \quad I_5 = 0.05434$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{5}{16}\,(0.05434) = \mathbf{0.01698}\ \text{kN/m}^2$$



하중 2가 더 가깝다: **0.01698**; 하중 1: **0.01058 kN/m²**.

풀이 (2/2)

풀이

1 응력의 합산

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.01058 + 0.01698 = \mathbf{0.02756}\ \text{kN/m}^2$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 0.01419 + 0.02442 = 0.03862\ \text{kN/m}^2$$

2 동일한 지점 아래의 깊이별 분포 (두 하중의 합)

z (m)	2	4	6	8	10	12	16	20
$\Delta\sigma_z$ Westergaard	0.0174	0.0276	0.0301	0.0282	0.0247	0.0210	0.0150	0.0108
$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	0.0137	0.0386	0.0430	0.0371	0.0298	0.0237	0.0153	0.0105

A 지점(z = 4 m)에서 두 하중이 함께 만드는 값은 **$\Delta\sigma_z$ = 0.02756 kN/m²**이며, Boussinesq 합은 0.03862 kN/m²이다. 합계는 각 하중을 단독으로 구한 값의 합이며, 단일 하중의 값(예제 1)은 이 합계의 일부이다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

요약

핵심 정리

Westergaard 매질: 얇은 강성 수평판이 수평 방향 변형을 억제한다; $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$, $I_5 = [1/(2\pi\eta^2)]\,[(r/\eta z)^2 + 1]^{-3/2}$, $\eta = \sqrt{[(1 - 2\mu_s)/(2 - 2\mu_s)]}$

예제 ($P = 5$ kN, $r = 5$ m, $z = 4$ m, $\mu_s = 0.3$): η 0.5345; $r/(\eta z)$ 2.339; I_5 0.03386 → $\Delta\sigma_z = 0.01058$ kN/m²; Boussinesq 0.01419

하중 축 상에서 $I_5 = 1/(2\pi\eta^2)$: $\mu_s = 0$이면 $1/\pi = 0.3183$ (Boussinesq $3/2\pi = 0.4775$); 응력은 μ_s와 함께 증가하고, $\mu_s = 0.5$에서 해는 유효성을 잃는다

깊이: 중간 깊이에서는 Westergaard 응력이 더 작고 매우 깊은 곳에서는 두 해가 서로 가까워지며, 최대 응력은 $z = r/(\sqrt{2}\,\eta) = 6.61$ m에서 나타난다(Boussinesq: $r\sqrt{1.5} = 6.12$ m)

중첩: 각 하중을 자신의 거리 r로 취급하여 응력을 합산한다(예제의 두 하중: 0.02756 kN/m²)

참고문헌

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1938). A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics: soft material reinforced by numerous strong horizontal sheets. In Contributions to the Mechanics of Solids, Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume. Macmillan, New York, 268–277.

참고

수치 예제는 모두 모듈 자체의 계산 엔진으로 산출하였으며, 모듈도 같은 값을 준다. 모듈의 초기 예제는 P = 5 kN, r = 5 m, μ_s = 0.3, z = 4 m이다.

GeoTerva

온라인 지반공학 계산

이론에서 실무로

집중하중, A 지점, μ_s 값을 GeoTerva에 입력하면 모듈이 η, 영향값 I_5, 각 하중의 기여분, Boussinesq와의 비교, 깊이 프로필, 단계별 풀이와 보고서를 함께 제공한다.

모듈 열기 →

이론 페이지 →

스마트폰으로 열기

체험 모듈은 가입 없이 이용할 수 있습니다.