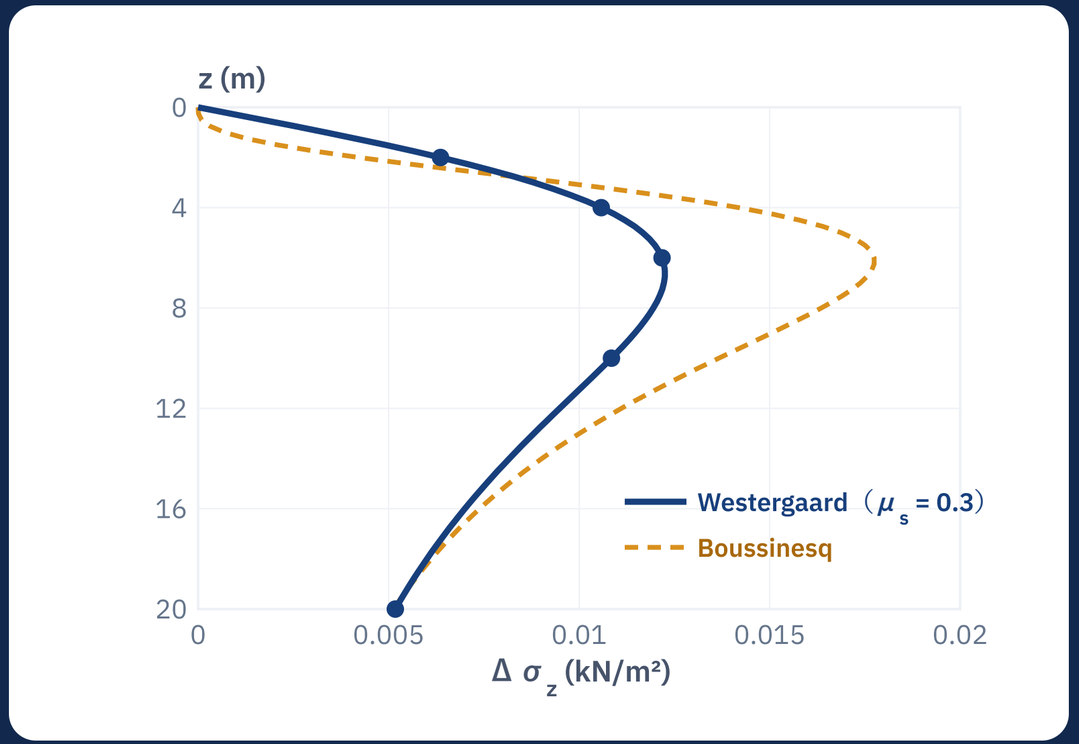
GeoTerva

地盤工学の講義スライド・地盤内の応力

Westergaard：集中荷重下の応力

講義：側方変形が剛な板で拘束された成層地盤における集中荷重下の応力。1点を最初から最後まで手計算で解く。

- Westergaard媒体
- η と I_5
- μ_s の影響
- Boussinesqとの比較
- 重ね合わせ



この講義で学ぶこと

- **Westergaard媒体**：水平変形を許さない薄い剛な水平板を含む弾性地盤の理想化
- 集中荷重による鉛直応力の増分：η、**影響値** I_5、$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\,I_5$
- Westergaardの応力が**Boussinesq**の応力よりどこで小さく、どこで大きくなるか；ポアソン比μ_sの役割
- 深さおよび水平距離による変化、最大応力の深さ
- **複数の集中荷重の**重ね合わせ

講義の流れ

各項目は**3つの手順**で扱う：

1. **理論**：式とその根拠
2. **問題**：与条件と求めるもの
3. **解答**：数値を用いて手順ごとに

例題：P = 5 kN、点Aは荷重からr = 5 m離れ、深さz = 4 mにある；板の間の地盤では$\mu_s = 0.3$。

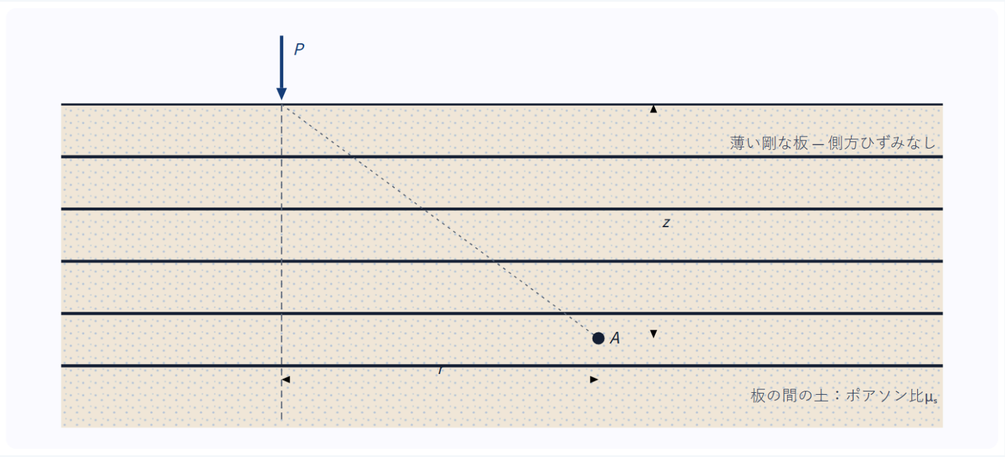
剛な水平板を有する地盤

理論

Boussinesqに基づく解は、**均質かつ等方**な半無限体に対する集中荷重解を積分することに基づく。しかし多くの地盤は**層状**である

例：細砂の脈を含み、水平変形がより剛な層によって拘束される粘土

Westergaard（1938）はこの地盤を次のように理想化した：横方向の変形を許さない多数の**薄い剛な水平板**を含む弾性体



鉛直応力増分と η

理論

地表面のP集中荷重が、水平距離r、深さzの点Aに生じさせる鉛直応力増分；μ_sは剛な板間の地盤のポアソン比であり、$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

解は、Boussinesq I_1と同様に**影響値**を用いて書き直される

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\,\eta}{2\pi z^2}\left[\frac{1}{\eta^2 + (r/z)^2}\right]^{3/2}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1 - 2\mu_s}{2 - 2\mu_s}}$$

$\Delta \sigma_z = (P/z^2)\, I_5$

理論

Westergaardの解はBoussinesqと同様に $\Delta \sigma_z = (P/z^2)\, I_5$ の形で表される；I_5 は $r/(\eta z)$ と η のみに依存する

比較のためBoussinesq解：$\Delta \sigma_z = (P/z^2)\, I_1$、$I_1$ はr/zのみに依存する（鉛直応力はポアソン比に依存しない）

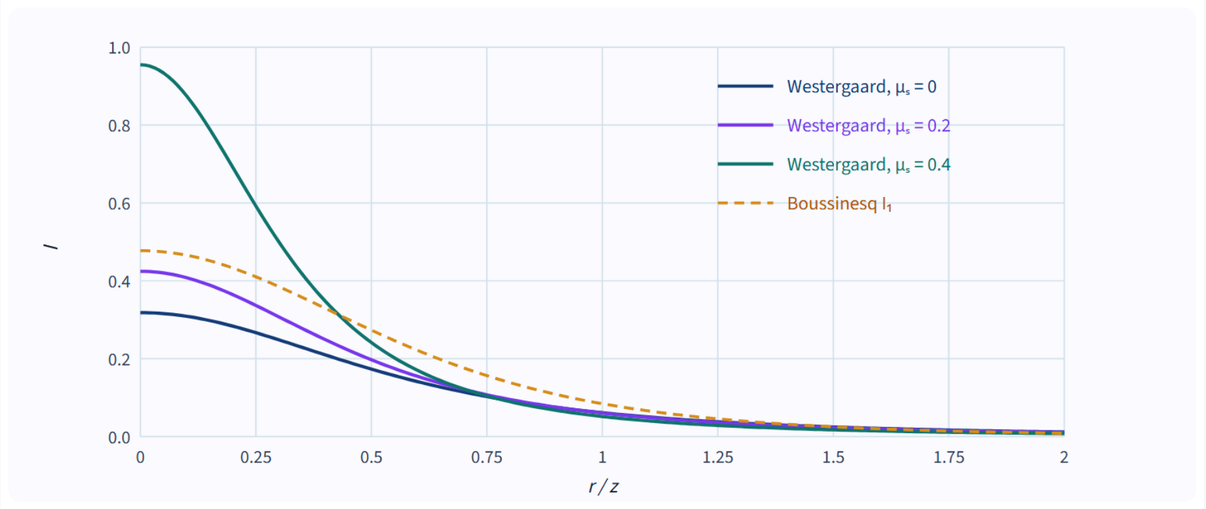
$$\Delta\sigma_z = \left(\frac{P}{z^2}\right) I_5 \qquad I_5 = \frac{1}{2\pi\eta^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2}$$

Boussinesq：$$I_1 = \frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1\right]^{-5/2}$$

影響値のr/zによる変化

理論

r/z	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1	1.5	2	3	5
$\mu_s = 0$	0.3183	0.3090	0.2836	0.2483	0.2099	0.1733	0.1411	0.0925	0.0613	0.0247	0.0118	0.0038	0.0009
$\mu_s = 0.2$	0.4244	0.4080	0.3646	0.3074	0.2491	0.1972	0.1547	0.0953	0.0604	0.0229	0.0107	0.0034	0.0008
$\mu_s = 0.4$	0.9549	0.8750	0.6916	0.4997	0.3480	0.2416	0.1700	0.0897	0.0516	0.0173	0.0076	0.0023	0.0005
Boussinesq I_1	0.4775	0.4657	0.4329	0.3849	0.3295	0.2733	0.2214	0.1386	0.0844	0.0251	0.0085	0.0015	0.0001



荷重直下のWestergaardとBoussinesq

理論

載荷重の直下（r = 0）では、**$\mu_s = 0$**に対するWestergaardの応力はBoussinesqの応力より**低い**：$I_5 = 1/\pi = 0.3183$；Boussinesqでは$I_1 = 3/2\pi = 0.4775$。剛なスラブは荷重を側方へ分散する

載荷重の下方では**μ_sが増すほど応力は大きくなる。$\mu_s = 0.5$**では$\eta = 0$となり、解は**妥当性を失う**。モジュールはμ_sを0から0.49の範囲で受け付ける

μ_s	0.00	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.45	0.49
η	0.7071	0.6667	0.6124	0.5774	0.5345	0.4082	0.3015	0.1400
η^2	0.5000	0.4444	0.3750	0.3333	0.2857	0.1667	0.0909	0.0196
$I_5\ (r = 0) = 1/(2\pi\ \eta^2)$	0.3183	0.3581	0.4244	0.4775	0.5570	0.9549	1.7507	8.1169

重ね合わせ

理論

Westergaard媒体は**弾性**であるため、各荷重による応力はA点までの**それぞれの距離r**を用いて求められ、応力は**重ね合わせられる**

荷重は地盤上のそれぞれの位置に配置される。最大8個の荷重を入力でき、いずれの2つも同じ位置にあってはならない

Boussinesqによる比較値も同様に合計する

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{P_k}{z^2} I_{5,k} \qquad r_k = \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2} \qquad I_{5,k} = I_5\left(\frac{r_k}{\eta z}\right)$$

問題

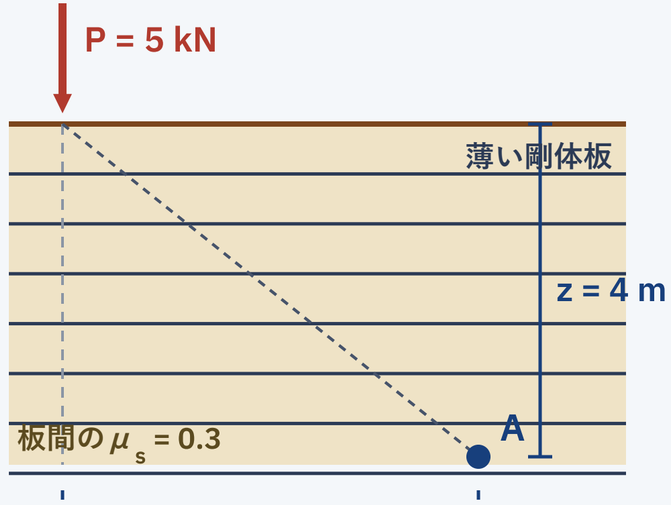
例題

求めるもの

η、r/(η z)、影響値 I_5、$\Delta\sigma_z$、および Boussinesq の応力との比較。

与条件

荷重	**地表面で**$P = 5$ **kN、**$(x_L;\, y_L) = (0;\, 0)$
点A	$x = 3$ **m,** $y = 4$ **m,** $z = 4$ **m**
地盤	**板の間の**$\mu_s = 0.3$



解答 (1/3)

解答

1 Westergaardの定数 η

$$\eta = \sqrt{\frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s}} = \sqrt{\frac{1-0.6}{2-0.6}} = \sqrt{0.2857} = \mathbf{0.5345}$$

2 水平距離とr/(η z)

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \mathbf{5.00}\ \text{m}$$

$$\frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.5345\,(4)} = \mathbf{2.3385}$$

η = **0.5345**（η^2 = 0.2857）。点 A は荷重から**r = 5 m** の距離にある；Boussinesq ではこの距離は r/z = 1.25 として入るが、Westergaard では r/(η z) = **2.3385** として入る。

解答 (2/3)

解答

3 影響値 I_5

$$I_5 = \frac{1}{2\pi\eta^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2} = \frac{1}{2\pi\,(0.2857)}\left[2.3385^2 + 1\right]^{-3/2}$$

$$= 0.5570 \times [6.4687]^{-3/2} = 0.5570 \times 0.06078 = \mathbf{0.03386}$$

4 鉛直応力の増分

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_5 = \frac{5}{4^2}\,(0.03386) = 0.3125 \times 0.03386 = \mathbf{0.01058}\ \text{kN/m}^2$$

表面の5 kNの集中荷重は、Westergaard媒質中の点Aにおいて **$\Delta\,\sigma_z$ = 0.01058 kN/m²** の増分を生じさせる（I_5 = 0.03386）。

解答 (3/3)

解答

5 式の最初の形で照査する

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\eta}{2\pi z^2}\left[\frac{1}{\eta^2+(r/z)^2}\right]^{3/2} = \frac{5\,(0.5345)}{2\pi\,(16)}\left[\frac{1}{0.2857+1.5625}\right]^{3/2} = \mathbf{0.01058}$$

6 Boussinesq（比較）

$$I_1 = \frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{r}{z}\right)^2+1\right]^{-5/2} = \frac{3}{2\pi}\left[2.5625\right]^{-5/2} = \mathbf{0.04542}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = \frac{5}{4^2}\,(0.04542) = \mathbf{0.01419}\ \text{kN/m}^2 \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = 0.745$$

2つの定式化は同じ結果を与える。この点ではWestergaardの応力はBoussinesqの応力の約**74.5%**である：剛な板は荷重を側方に広げるため、中間深さでは応力がより小さくなる。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

例題

与条件

載荷重と点	$P = 5$ kN；点Aは荷重から$r = 5$ mの位置；$\mu_s = 0.3$
深さ	$z = 2,\ 4,\ 6 \ldots 20$ m（モジュールの土層表）

求めるもの

各深さで**r/(η z)**、**I_5**、Westergaardおよび Boussinesqの応力；**最大応力の深さ**。

解答 (1/2)

解答

z (m)	r/(η z)	I_5	Δ σ_z Westergaard	Δ σ_z Boussinesq	比 W/B
2	4.677	0.0051	**0.00636**	0.00422	1.509
4	2.339	0.0339	**0.01058**	0.01419	0.745
6	1.559	0.0877	**0.01218**	0.01774	0.686
8	1.169	0.1529	**0.01195**	0.01636	0.731
10	0.935	0.2170	**0.01085**	0.01367	0.794
12	0.780	0.2733	**0.00949**	0.01111	0.854
14	0.668	0.3202	**0.00817**	0.00902	0.905
16	0.585	0.3584	**0.00700**	0.00739	0.948
18	0.520	0.3892	**0.00601**	0.00612	0.982
20	0.468	0.4140	**0.00518**	0.00513	1.009

z = 2 mではWestergaardの応力の方が大きい（0.00636と0.00422）；**中間深さでは小さい**（z = 6 m：0.01218と0.01774）；**z = 20 m**では両解は互いに近づく（0.00518と0.00513）。

解答 (2/2)

解答

1 z = 10 m に対して手計算で

$$\frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.5345\,(10)} = 0.9354$$

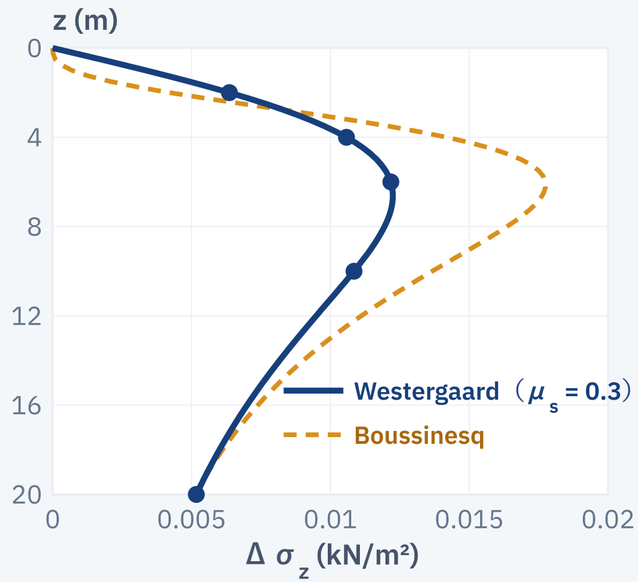
$$I_5 = 0.5570\,[1.8750]^{-3/2} = 0.2170$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{10^2}\,(0.2170) = \mathbf{0.01085}\ \text{kN/m}^2$$

2 最大応力の深さ（d Δ σ z/dz = 0）

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\eta}{2\pi}\,z\,(r^2 + \eta^2 z^2)^{-3/2}$$

$$z^* = \frac{r}{\sqrt{2}\,\eta} = \frac{5}{1.4142\,(0.5345)} = \mathbf{6.61}\ \text{m}$$



最大応力：Westergaardは**z = 6.61 m**（0.01225）、Boussinesq（z* = r√1.5）は**z = 6.12 m**（0.01775 kN/m²）である。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

例題

与条件

載荷重と点	$P = 5$ kN, $r = 5$ m, $z = 4$ m（**例題1の点**）
変化する	$\mu_s = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.45;\ 0.49$

求めるもの

各 μ_s について η、$r/(\eta z)$、I_5、$\Delta\sigma_z$ およびBoussinesqとの比。

解答 (1/3)

解答

μ_s	η	r/(η z)	I_5	$\Delta\sigma_z$ (kN/m²)	$\Delta\sigma_z$ / Boussinesq
0.00	0.7071	1.768	0.03799	**0.01187**	0.836
0.10	0.6667	1.875	0.03732	**0.01166**	0.822
0.20	0.6124	2.041	0.03614	**0.01129**	0.796
0.30	0.5345	2.339	0.03386	**0.01058**	0.745
0.40	0.4082	3.062	0.02858	**0.00893**	0.629
0.45	0.3015	4.146	0.02257	**0.00705**	0.497
0.49	0.1400	8.927	0.01120	**0.00350**	0.247

この点（r/z = 1.25）では**μ_sが大きくなるほどWestergaardの応力は小さくなる**：μ_s = 0で0.01187、μ_s = 0.49で0.00350 kN/m²。荷重軸上では逆になる（例題4）：影響の向きは点の位置に依存する。

解答 (2/3)

解答

1 $\mu_s = 0$

$$\eta^2 = \frac{1}{2} = 0.5000\,, \quad \eta = 0.7071\,, \quad \frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.7071(4)} = 1.7678$$

$$I_5 = \frac{1}{\pi}\left[4.1250\right]^{-3/2} = 0.3183 \times 0.11936 = 0.03799$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.03799) = \mathbf{0.01187}$$

ポアソン比が零のとき $\eta = 1/\sqrt{2} = 0.7071$ となり、この点で**$\Delta\,\sigma_z = 0.01187$ kN/m²**が得られる（Boussinesqの83.6%）。

解答 (3/3)

解答

2 μ_s = 0.4

$$\eta^2 = \frac{1-0.8}{2-0.8} = 0.1667\,, \quad \eta = 0.4082\,, \quad \frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.4082(4)} = 3.0619$$

$$I_5 = 0.9549\,[10.3750]^{-3/2} = 0.9549 \times 0.02992 = 0.02858$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.02858) = \mathbf{0.00893}$$

プレート間の地盤のポアソン比が増加すると η は小さくなり、r/(η z)は大きくなり、この点でI_5は減少する：**0.01187 → 0.00893 kN/m²**（μ_s = 0 → 0.4）。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

例題

与条件

荷重	$P = 5$ kN, $\mu_s = 0.3$
深さ	$z = 4$ m；水平距離$r = 0,\ 1,\ 2 \ldots 10$ m
問題	**載荷軸上でWestergaardとBoussinesqの応力はどのように比較されるか。μ_sがいくらのとき両解は等しくなるか。**

求めるもの

荷重下の$\Delta\sigma_z$（r = 0）、$\mu_s = 0$の場合の同じ値、および**水平分布表**。

解答 (1/3)

解答

1 $\mu_s = 0.3$ に対する r = 0

$$I_5(0) = \frac{1}{2\pi\eta^2} = \frac{1}{2\pi\,(0.2857)} = 0.5570 \qquad \Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.5570) = \mathbf{0.1741}$$

Boussinesq： $I_1(0) = \dfrac{3}{2\pi} = 0.4775 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_{z,B} = \dfrac{5}{16}\,(0.4775) = \mathbf{0.1492}$

2 $\mu_s = 0$の場合、r = 0

$$I_5(0) = \frac{1}{\pi} = 0.3183 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.3183) = \mathbf{0.0995} \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = \frac{1/\pi}{3/2\pi} = \frac{2}{3}$$

$\mu_s = 0$：WestergaardはBoussinesqの**2/3**である（0.0995と0.1492）；**$\mu_s = 0.3$**：それより大きい（0.1741）；2つの解は**$\mu_s = 0.25$**で等しくなる。

解答 (2/3)

解答

3 軸上で2つの解が等しくなる μ_s

$$\frac{1}{2\pi\eta^2} = \frac{3}{2\pi} \Rightarrow \eta^2 = \frac{1}{3} = \frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s} \Rightarrow \mu_s = \mathbf{0.25}$$

4 軸上の比：Westergaard / Boussinesq = $(1/2\pi\,\eta^2) / (3/2\pi) = 1/(3\eta^2)$

μ_s	0.00	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.45	0.49
η^2	0.5000	0.4444	0.3750	0.3333	0.2857	0.1667	0.0909	0.0196
$\Delta\sigma_z$ Westergaard / Boussinesq	0.667	0.750	0.889	1.000	1.167	2.000	3.667	17.000

荷重軸上では比はμ_sとともに急速に増大する：$\mu_s = 0$で2/3、$\mu_s = 0.25$で1、$\mu_s = 0.45$で3.67；μ_sが0.5に近づくと$\eta \to 0$となり、比は限りなく増大する。

解答 (3/3)

解答

r (m)	r/z	r/(η z)	I_5	Δ σ_z Westergaard	Δ σ_z Boussinesq	比 W/B
0	0.00	0.000	0.5570	**0.17408**	0.14921	1.167
1	0.25	0.468	0.4140	**0.12938**	0.12822	1.009
2	0.50	0.935	0.2170	**0.06780**	0.08541	0.794
3	0.75	1.403	0.1089	**0.03403**	0.04889	0.696
4	1.00	1.871	0.0584	**0.01824**	0.02638	0.691
5	1.25	2.339	0.0339	**0.01058**	0.01419	0.745
6	1.50	2.806	0.0211	**0.00658**	0.00784	0.840
8	2.00	3.742	0.0096	**0.00300**	0.00267	1.123
10	2.50	4.677	0.0051	**0.00159**	0.00105	1.509

Westergaardの応力は軸上ではBoussinesqより大きい；**r/z ≈ 0.26**より後ではBoussinesqを下回り（r = 2 m：0.06780と0.08541）、**r/z ≈ 1.81**（r ≈ 7.2 m）より後で再び上回る（r = 10 m：0.00159と0.00105）：遠方ではWestergaardの応力のほうがゆっくり減少する。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

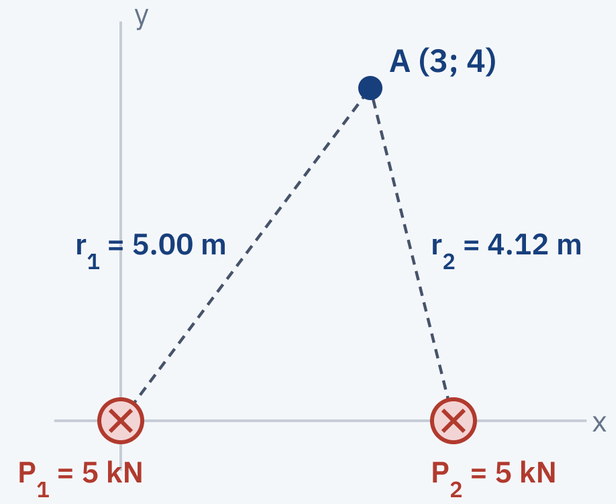
例題

求めるもの

各荷重の**r**、$\mathbf{I_5}$、$\mathbf{\Delta\,\sigma_z}$の値；合計応力とBoussinesqの総和。

与条件

荷重	$P_1 = 5$ **kN**、$(0;\,0)$ と $P_2 = 5$ **kN**、$(4;\,0)$
点A	$x = 3$ **m**, $y = 4$ **m**, $z = 4$ **m**
地盤	$\mu_s = 0.3$



解答 (1/2)

解答

1 P_1 (0; 0)

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.000 \text{ m}$$

$$\frac{r_1}{\eta z} = \frac{5.000}{0.5345(4)} = 2.3385\,, \quad I_5 = 0.03386$$

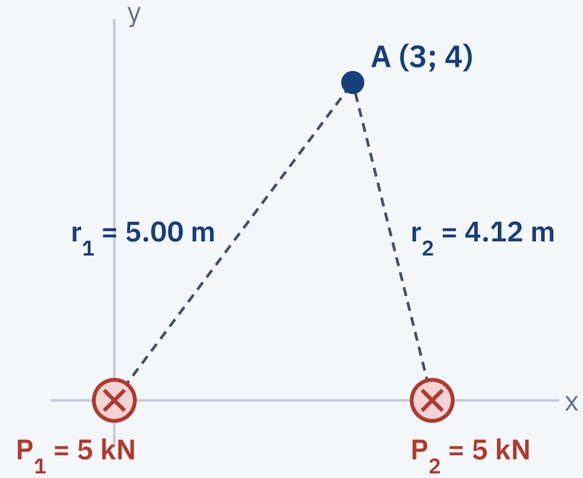
$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{5}{16}\,(0.03386) = \mathbf{0.01058}\ \text{kN/m}^2$$

2 P_2 (4; 0)

$$r_2 = \sqrt{(3-4)^2 + 4^2} = 4.123 \text{ m}$$

$$\frac{r_2}{\eta z} = \frac{4.123}{0.5345(4)} = 1.9284\,, \quad I_5 = 0.05434$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{5}{16}\,(0.05434) = \mathbf{0.01698}\ \text{kN/m}^2$$



載荷重2の方が近い：**0.01698**；載荷重1：**0.01058 kN/m²**。

解答 (2/2)

解答

1 応力を重ね合わせる

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.01058 + 0.01698 = \mathbf{0.02756}\ \text{kN/m}^2$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 0.01419 + 0.02442 = 0.03862\ \text{kN/m}^2$$

2 同一地点下の深さ方向分布（二つの荷重の和）

z (m)	2	4	6	8	10	12	16	20
Δ σ_z Westergaard	0.0174	0.0276	0.0301	0.0282	0.0247	0.0210	0.0150	0.0108
Δ σ_z Boussinesq	0.0137	0.0386	0.0430	0.0371	0.0298	0.0237	0.0153	0.0105

A点（z = 4 m）において2つの荷重が同時に作用すると**Δ σ_z = 0.02756 kN/m²**を生じる。Boussinesqの重ね合わせでは0.03862 kN/m²となる。総和は各荷重を単独で求めた値の和であり、単一荷重の値（例題1）はこの総和の一部である。

GeoTervaで解答を確認する ↗

まとめ

ポイントのまとめ

Westergaard媒体：薄い剛な水平板が横方向の変形を妨げる；**$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$**、$I_5 = [1/(2\pi\eta^2)]\,[(r/\eta z)^2 + 1]^{-3/2}$、$\eta = \sqrt{[(1 - 2\mu_s)/(2 - 2\mu_s)]}$

例（$P = 5$ kN、$r = 5$ m、$z = 4$ m、$\mu_s = 0.3$）：η 0.5345；$r/(\eta z)$ 2.339；I_5 0.03386 → **$\Delta\sigma_z = 0.01058$ kN/m²**；Boussinesq 0.01419

荷重軸上では $I_5 = 1/(2\pi\eta^2)$：$\mu_s = 0$ のとき $1/\pi = 0.3183$（Boussinesq では $3/2\pi = 0.4775$）。応力は μ_s とともに増大し、$\mu_s = 0.5$ では解は妥当性を失う。

深さ：中間深さではWestergaardの応力の方が小さく、非常に深い位置では両解は近づく。最大応力は$z = r/(\sqrt{2}\,\eta) = 6.61$ mで生じる（Boussinesq：$r\sqrt{1.5} = 6.12$ m）。

重ね合わせ：各荷重はそれぞれの距離rで扱い、応力を合算する（例では2つの荷重：0.02756 kN/m²）

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1938). A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics: soft material reinforced by numerous strong horizontal sheets. In Contributions to the Mechanics of Solids, Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume. Macmillan, New York, 268–277.

注記

数値例はすべてモジュール自身の計算エンジンで生成した；モジュールも同じ値を与える。モジュールの初期例は $P = 5$ kN、$r = 5$ m、$\mu_s = 0.3$、$z = 4$ mである。

GeoTerva

オンライン地盤工学計算

理論から実務へ

独自の集中荷重、点A、μ_sの値をGeoTervaに入力する。モジュールはη、影響値I_5、各荷重の寄与、Boussinesqとの比較、深さ方向の分布、手順ごとの解答、レポートをまとめて出力する。

モジュールを開く →

理論ページ →

スマートフォンで開く

お試しモジュールは登録不要です。

講義で使用したい場合：info@geoterva.com