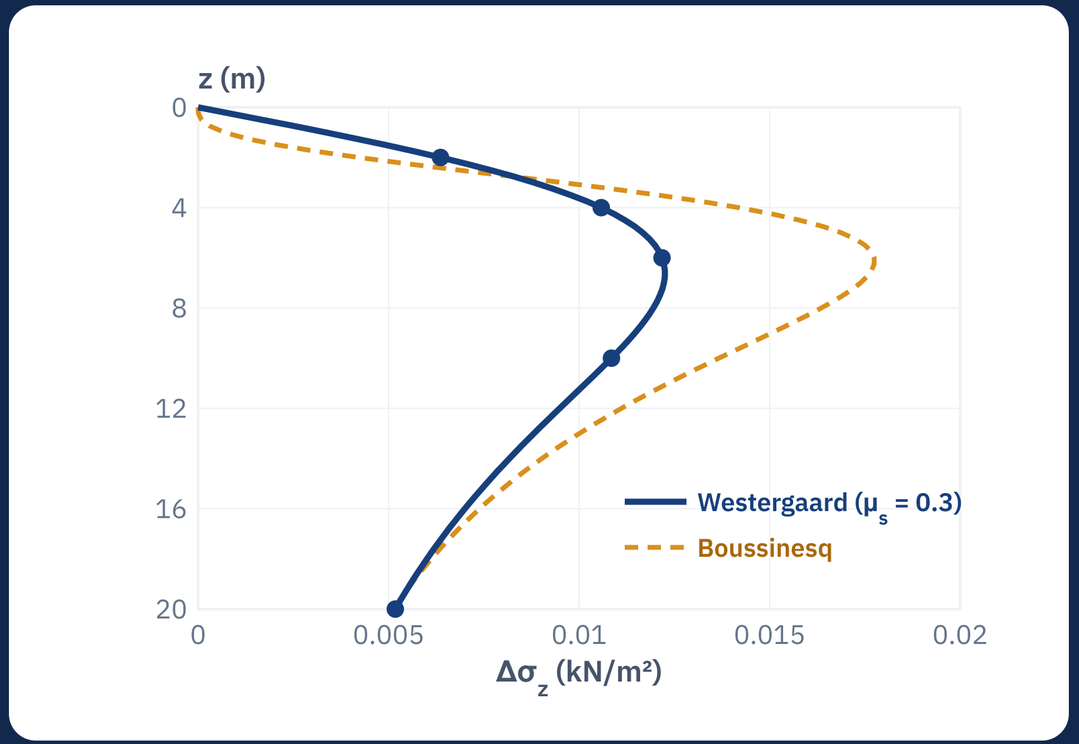
Presentación de clase de geotecnia · Tensiones en la masa de suelo

Westergaard: tensión bajo una carga puntual

Clase: tensión bajo una carga puntual en un terreno estratificado cuyas deformaciones laterales están limitadas por placas rígidas; un punto se resuelve a mano de principio a fin.

- Medio de Westergaard
- η e I_5
- Efecto de μ_s
- Comparación con Boussinesq
- Superposición



Se basa en la página de teoría de GeoTerva · geoterva.com

Introducción

¿Qué aprenderemos en esta clase?

- El **medio de Westergaard**: idealización de un suelo elástico que contiene láminas horizontales delgadas y rígidas que no permiten la deformación lateral
- Incremento de la tensión vertical bajo una carga puntual: **η**, **factor de influencia I_5** y $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$
- Dónde la tensión de Westergaard es menor y dónde mayor que la de **Boussinesq**; el papel del coeficiente de Poisson μ_s
- La variación con la profundidad y con la distancia horizontal, la profundidad de la tensión máxima
- Superposición de **varias cargas puntuales**

DESARROLLO DE LA CLASE

Cada tema se desarrolla en **tres pasos**:

1 · **Teoría**: fórmula y su justificación

2 · **Enunciado**: datos y se pide

3 · **Solución**: paso a paso, con números

Ejemplo: P = 5 kN, el punto A está a r = 5 m de la carga y a z = 4 m de profundidad; en el terreno entre las láminas $\mu_s = 0.3$.

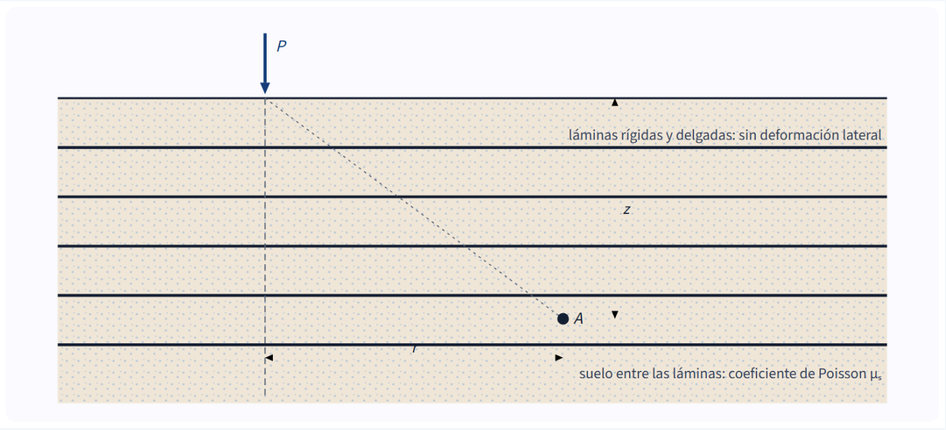
Suelo con placa horizontal rígida

TEORÍA

Las soluciones basadas en Boussinesq se apoyan en la integración de la solución de la carga puntual para un semiespacio **homogéneo e isótropo**. Sin embargo, muchos suelos son **estratificados**

Ejemplo: una arcilla con vetas finas de arena, cuya deformación horizontal está limitada por estratos más rígidos

Westergaard (1938) idealizó este suelo del siguiente modo: un medio elástico que contiene gran número de **láminas horizontales delgadas y rígidas** que no permiten la deformación lateral



Incremento de tensión vertical y η

TEORÍA

Incremento de tensión vertical producido por la carga puntual **P** en la superficie, en un punto A situado a la distancia horizontal **r** y a la profundidad **z**; μ_s es el coeficiente de Poisson del terreno entre placas rígidas, $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

La solución se reescribe con un **factor de influencia**, como en Boussinesq I_1

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\,\eta}{2\pi z^2}\left[\frac{1}{\eta^2 + (r/z)^2}\right]^{3/2}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1 - 2\mu_s}{2 - 2\mu_s}}$$

$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$

TEORÍA

La solución de Westergaard se escribe, como en Boussinesq, en la forma **$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$**; I_5 depende únicamente de **$r/(\eta z)$** y de **η**

Para comparar, la solución de Boussinesq: $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$, donde I_1 depende únicamente de r/z (la tensión vertical es independiente del coeficiente de Poisson)

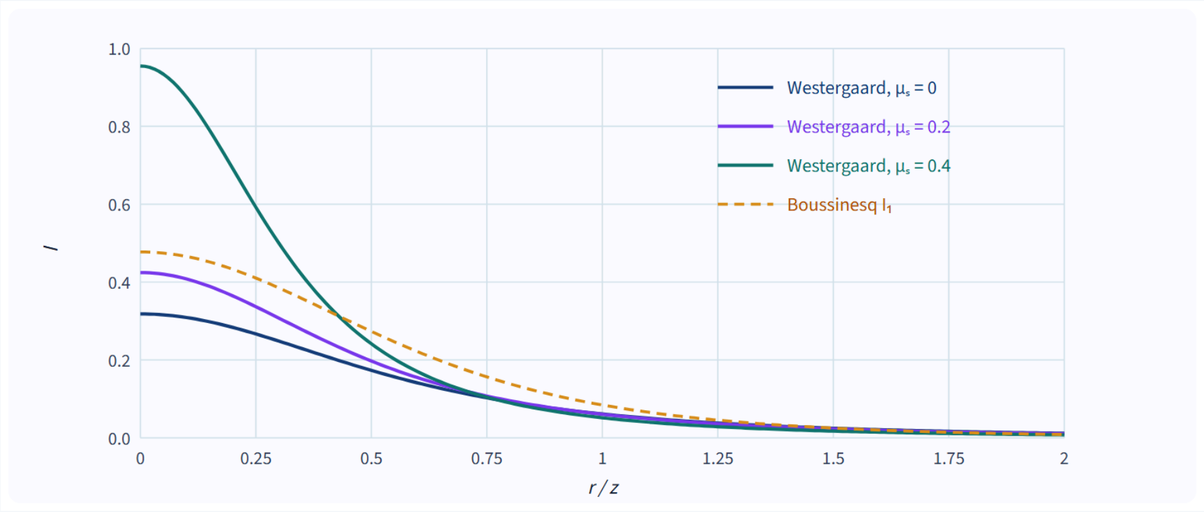
$$\Delta\sigma_z = \left(\frac{P}{z^2}\right) I_5 \qquad I_5 = \frac{1}{2\pi\eta^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2}$$

$$\text{Boussinesq:} \quad I_1 = \frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1\right]^{-5/2}$$

Variación del valor de influencia con r/z

TEORÍA

r/z	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1	1.5	2	3	5
$\mu_s = 0$	0.3183	0.3090	0.2836	0.2483	0.2099	0.1733	0.1411	0.0925	0.0613	0.0247	0.0118	0.0038	0.0009
$\mu_s = 0.2$	0.4244	0.4080	0.3646	0.3074	0.2491	0.1972	0.1547	0.0953	0.0604	0.0229	0.0107	0.0034	0.0008
$\mu_s = 0.4$	0.9549	0.8750	0.6916	0.4997	0.3480	0.2416	0.1700	0.0897	0.0516	0.0173	0.0076	0.0023	0.0005
Boussinesq I_1	0.4775	0.4657	0.4329	0.3849	0.3295	0.2733	0.2214	0.1386	0.0844	0.0251	0.0085	0.0015	0.0001



Westergaard y Boussinesq bajo la carga

TEORÍA

Directamente bajo la carga (r = 0), la tensión de Westergaard es **menor** que la de Boussinesq para **$\mu_s = 0$**: $I_5 = 1/\pi = 0.3183$; para Boussinesq, $I_1 = 3/2\pi = 0.4775$. Las placas rígidas reparten la carga lateralmente

Bajo la carga la tensión **aumenta al crecer μ_s**; para **$\mu_s = 0.5$**, $\eta = 0$ y la solución **pierde su validez**. El módulo admite μ_s entre 0 y 0.49

μ_s	0.00	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.45	0.49
η	0.7071	0.6667	0.6124	0.5774	0.5345	0.4082	0.3015	0.1400
η^2	0.5000	0.4444	0.3750	0.3333	0.2857	0.1667	0.0909	0.0196
I_5 (r = 0) = $1/(2\pi\eta^2)$	0.3183	0.3581	0.4244	0.4775	0.5570	0.9549	1.7507	8.1169

Superposición

TEORÍA

Como el medio de Westergaard es **elástico**, la tensión de cada carga se obtiene con su **propia distancia r** al punto A, y las tensiones se **suman**

Las cargas se sitúan sobre el terreno en sus propias posiciones; pueden introducirse hasta ocho cargas y no puede haber dos en la misma posición

El valor de comparación de Boussinesq también se suma de la misma forma

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{P_k}{z^2}\, I_{5,k} \qquad r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \qquad I_{5,k} = I_5\left(\frac{r_k}{\eta z}\right)$$

Enunciado

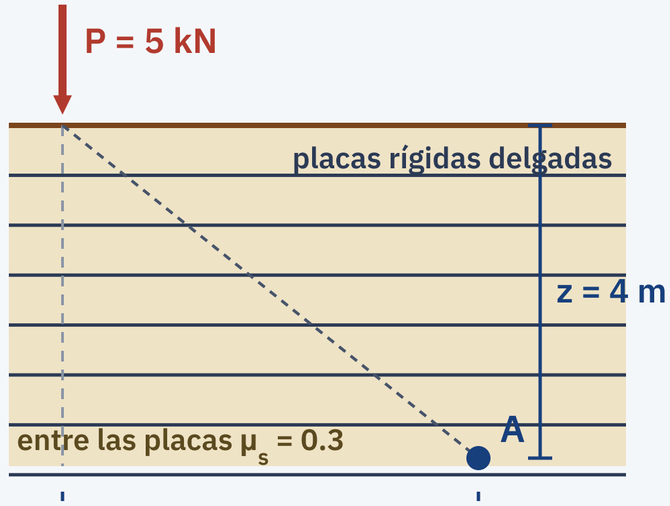
EJEMPLO

SE PIDE

η, **r/(ηz)**, valor de influencia $\mathbf{I_5}$, $\mathbf{\Delta\sigma_z}$ y comparación con la tensión de Boussinesq.

Datos

Carga	**en superficie** $P = 5$ **kN,** $(x_L;\, y_L) = (0;\, 0)$
Punto A	$x = 3$ **m,** $y = 4$ **m,** $z = 4$ **m**
Suelo	**entre placas** $\mu_s = 0.3$



Solución (1/3)

SOLUCIÓN

1 Constante de Westergaard η

$$\eta = \sqrt{\frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s}} = \sqrt{\frac{1-0.6}{2-0.6}} = \sqrt{0.2857} = \mathbf{0.5345}$$

2 Distancia horizontal y r/(ηz)

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \mathbf{5.00\ m}$$

$$\frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.5345\,(4)} = \mathbf{2.3385}$$

η = **0.5345** (η² = 0.2857). El punto A está a **r = 5 m** de la carga; en Boussinesq esta distancia entraría como r/z = 1.25, y en Westergaard entra r/(ηz) = **2.3385**.

Solución (2/3)

SOLUCIÓN

3 Valor de influencia I_5

$$I_5 = \frac{1}{2\pi\eta^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2} = \frac{1}{2\pi\,(0.2857)}\left[2.3385^2 + 1\right]^{-3/2}$$

$$= 0.5570 \times [6.4687]^{-3/2} = 0.5570 \times 0.06078 = \mathbf{0.03386}$$

4 Incremento de tensión vertical

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2}\,I_5 = \frac{5}{4^2}\,(0.03386) = 0.3125 \times 0.03386 = \mathbf{0.01058}\ \mathrm{kN/m^2}$$

La carga puntual de 5 kN en la superficie produce en el punto A, en un medio de Westergaard, un incremento de **$\Delta\sigma_z$ = 0.01058 kN/m²** (I_5 = 0.03386).

Solución (3/3)

SOLUCIÓN

5 Comprobación con la primera forma de la ecuación

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\eta}{2\pi z^2}\left[\frac{1}{\eta^2+(r/z)^2}\right]^{3/2} = \frac{5\,(0.5345)}{2\pi\,(16)}\left[\frac{1}{0.2857+1.5625}\right]^{3/2} = \mathbf{0.01058}$$

6 Boussinesq (comparación)

$$I_1 = \frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{r}{z}\right)^2+1\right]^{-5/2} = \frac{3}{2\pi}\left[2.5625\right]^{-5/2} = \mathbf{0.04542}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = \frac{5}{4^2}\,(0.04542) = \mathbf{0.01419}\ \mathrm{kN/m^2} \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = 0.745$$

Las dos formulaciones dan el mismo resultado. En este punto la tensión de Westergaard es aproximadamente el **74.5%** de la de Boussinesq: como las placas rígidas reparten la carga lateralmente, a profundidad intermedia la tensión es menor.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

EJEMPLO

Datos

Carga y punto	$P = 5$ **kN; el punto A está a** $r = 5$ **m de la carga;** $\mu_s = 0.3$
Profundidades	$z = 2,\ 4,\ 6 \ldots 20$ **m (tabla de perfil del módulo)**

SE PIDE

En cada profundidad: **r/(ηz)**, $\mathbf{I_5}$, tensiones de Westergaard y de Boussinesq; y la **profundidad de la tensión máxima**.

Solución (1/2)

SOLUCIÓN

z (m)	r/(ηz)	I_5	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	Relación W/B
2	4.677	0.0051	**0.00636**	0.00422	1.509
4	2.339	0.0339	**0.01058**	0.01419	0.745
6	1.559	0.0877	**0.01218**	0.01774	0.686
8	1.169	0.1529	**0.01195**	0.01636	0.731
10	0.935	0.2170	**0.01085**	0.01367	0.794
12	0.780	0.2733	**0.00949**	0.01111	0.854
14	0.668	0.3202	**0.00817**	0.00902	0.905
16	0.585	0.3584	**0.00700**	0.00739	0.948
18	0.520	0.3892	**0.00601**	0.00612	0.982
20	0.468	0.4140	**0.00518**	0.00513	1.009

A **z = 2 m** la tensión de Westergaard es mayor (0.00636 y 0.00422); **a profundidades intermedias es menor** (z = 6 m: 0.01218 y 0.01774); a **z = 20 m** las dos soluciones se aproximan (0.00518 y 0.00513).

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

1 A mano para z = 10 m

$$\frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.5345\,(10)} = 0.9354$$

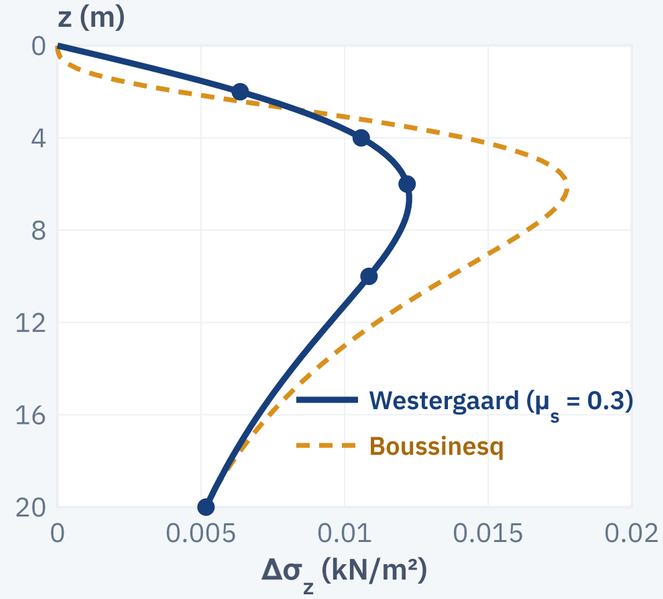
$$I_5 = 0.5570\,[1.8750]^{-3/2} = 0.2170$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{10^2}\,(0.2170) = \mathbf{0.01085}\ \mathrm{kN/m^2}$$

2 Profundidad de la tensión máxima ($d\Delta\sigma_z/dz = 0$)

$$\Delta\sigma_z = \frac{P\eta}{2\pi}\,z\,(r^2 + \eta^2 z^2)^{-3/2}$$

$$z^* = \frac{r}{\sqrt{2}\,\eta} = \frac{5}{1.4142\,(0.5345)} = \mathbf{6.61}\ \mathrm{m}$$



Tensión máxima: Westergaard a **z = 6.61 m** (0.01225), Boussinesq (z* = r√1.5) a **z = 6.12 m** (0.01775 kN/m²).

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

EJEMPLO

Datos

Carga y punto	$P = 5$ **kN,** $r = 5$ **m,** $z = 4$ **m (punto del Ejemplo 1)**
Variable	$\mu_s = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.45;\ 0.49$

SE PIDE

Para cada μ_s: **η**, **r/(ηz)**, **I_5**, **$\Delta\sigma_z$** y la relación respecto a Boussinesq.

Solución (1/3)

SOLUCIÓN

μ_s	η	$r/(\eta z)$	I_5	$\Delta\sigma_z$ (kN/m²)	$\Delta\sigma_z$ / Boussinesq
0.00	0.7071	1.768	0.03799	**0.01187**	0.836
0.10	0.6667	1.875	0.03732	**0.01166**	0.822
0.20	0.6124	2.041	0.03614	**0.01129**	0.796
0.30	0.5345	2.339	0.03386	**0.01058**	0.745
0.40	0.4082	3.062	0.02858	**0.00893**	0.629
0.45	0.3015	4.146	0.02257	**0.00705**	0.497
0.49	0.1400	8.927	0.01120	**0.00350**	0.247

En este punto (r/z = 1.25), **al aumentar μ_s disminuye la tensión de Westergaard**: 0.01187 para μ_s = 0 y 0.00350 kN/m² para μ_s = 0.49. En el eje de la carga ocurre lo contrario (Ejemplo 4): el sentido del efecto depende de la posición del punto.

Solución (2/3)

SOLUCIÓN

1 $\mu_s = 0$

$$\eta^2 = \frac{1}{2} = 0.5000\,, \quad \eta = 0.7071\,, \quad \frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.7071(4)} = 1.7678$$

$$I_5 = \frac{1}{\pi}\left[4.1250\right]^{-3/2} = 0.3183 \times 0.11936 = 0.03799$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.03799) = \mathbf{0.01187}$$

Cuando el coeficiente de Poisson es cero, $\eta = 1/\sqrt{2} = 0.7071$; en este punto resulta **$\Delta\sigma_z$ = 0.01187 kN/m²** (el 83.6% del de Boussinesq).

Solución (3/3)

SOLUCIÓN

2 $\mu_s = 0.4$

$$\eta^2 = \frac{1 - 0.8}{2 - 0.8} = 0.1667\,, \quad \eta = 0.4082\,, \quad \frac{r}{\eta z} = \frac{5}{0.4082(4)} = 3.0619$$

$$I_5 = 0.9549\,[10.3750]^{-3/2} = 0.9549 \times 0.02992 = 0.02858$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.02858) = \mathbf{0.00893}$$

A medida que aumenta el coeficiente de Poisson del suelo situado entre las placas, η disminuye; r/(ηz) aumenta e I_5 disminuye en este punto: **0.01187 → 0.00893 kN/m²** (μ_s = 0 → 0.4).

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

EJEMPLO

Datos

Carga	$P = 5$ **kN,** $\mu_s = 0.3$
Profundidad	$z = 4$ **m; distancia horizontal** $r = 0,\ 1,\ 2 \ldots 10$ **m**
Enunciado	**cómo se comparan las tensiones de Westergaard y de Boussinesq en el eje de la carga; ¿para qué valor de** μ_s **coinciden las dos soluciones?**

SE PIDE

$\Delta\sigma_z$ bajo la carga (r = 0), el mismo valor para $\mu_s = 0$ y la **tabla del perfil horizontal**.

Solución (1/3)

SOLUCIÓN

1 r = 0 para $\mu_s = 0.3$

$$I_5(0) = \frac{1}{2\pi\eta^2} = \frac{1}{2\pi\,(0.2857)} = 0.5570 \qquad \Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.5570) = \mathbf{0.1741}$$

$$\text{Boussinesq: } I_1(0) = \frac{3}{2\pi} = 0.4775 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_{z,B} = \frac{5}{16}\,(0.4775) = \mathbf{0.1492}$$

2 Para $\mu_s = 0$, r = 0

$$I_5(0) = \frac{1}{\pi} = 0.3183 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{5}{16}\,(0.3183) = \mathbf{0.0995} \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = \frac{1/\pi}{3/2\pi} = \frac{2}{3}$$

μ_s = 0: Westergaard es **2/3** de Boussinesq (0.0995 y 0.1492); **μ_s = 0.3**: es mayor que este (0.1741); las dos soluciones coinciden en **μ_s = 0.25**.

Solución (2/3)

SOLUCIÓN

3 μ_s para el cual las dos soluciones coinciden en el eje

$$\frac{1}{2\pi\eta^2} = \frac{3}{2\pi} \Rightarrow \eta^2 = \frac{1}{3} = \frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s} \Rightarrow \mu_s = \mathbf{0.25}$$

4 Relación en el eje: Westergaard / Boussinesq = $(1/2\pi\eta^2) / (3/2\pi) = 1/(3\eta^2)$

μ_s	0.00	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.45	0.49
η^2	0.5000	0.4444	0.3750	0.3333	0.2857	0.1667	0.0909	0.0196
$\Delta\sigma_z$ Westergaard / Boussinesq	0.667	0.750	0.889	1.000	1.167	2.000	3.667	17.000

En el eje de la carga la relación crece rápidamente con μ_s: 2/3 para $\mu_s = 0$, 1 para $\mu_s = 0.25$, 3.67 para $\mu_s = 0.45$; cuando μ_s tiende a 0.5, $\eta \to 0$ y la relación aumenta sin límite.

Solución (3/3)

SOLUCIÓN

r (m)	r/z	r/(ηz)	I_5	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	Relación W/B
0	0.00	0.000	0.5570	**0.17408**	0.14921	1.167
1	0.25	0.468	0.4140	**0.12938**	0.12822	1.009
2	0.50	0.935	0.2170	**0.06780**	0.08541	0.794
3	0.75	1.403	0.1089	**0.03403**	0.04889	0.696
4	1.00	1.871	0.0584	**0.01824**	0.02638	0.691
5	1.25	2.339	0.0339	**0.01058**	0.01419	0.745
6	1.50	2.806	0.0211	**0.00658**	0.00784	0.840
8	2.00	3.742	0.0096	**0.00300**	0.00267	1.123
10	2.50	4.677	0.0051	**0.00159**	0.00105	1.509

La tensión de Westergaard está por encima de la de Boussinesq en el eje; a partir de **r/z ≈ 0.26** queda por debajo de la de Boussinesq (r = 2 m: 0.06780 y 0.08541) y a partir de **r/z ≈ 1.81** (r ≈ 7.2 m) vuelve a superarla (r = 10 m: 0.00159 y 0.00105): a distancia la tensión de Westergaard disminuye más lentamente.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

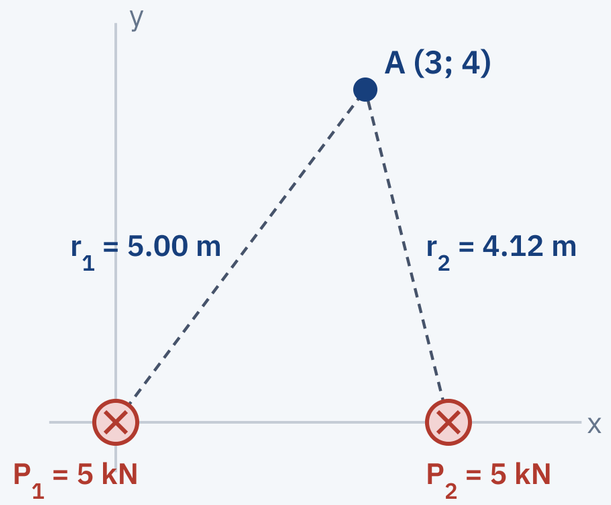
EJEMPLO

SE PIDE

Valores de **r**, $\mathbf{I_5}$ y $\mathbf{\Delta\sigma_z}$ de cada carga; tensión total y suma de Boussinesq.

Datos

Cargas	$P_1 = 5$ **kN,** $(0;\ 0)$ **y** $P_2 = 5$ **kN,** $(4;\ 0)$
Punto A	$x = 3$ **m,** $y = 4$ **m,** $z = 4$ **m**
Suelo	$\mu_s = 0.3$



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 P_1 (0; 0)

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.000 \text{ m}$$

$$\frac{r_1}{\eta z} = \frac{5.000}{0.5345(4)} = 2.3385\,, \quad I_5 = 0.03386$$

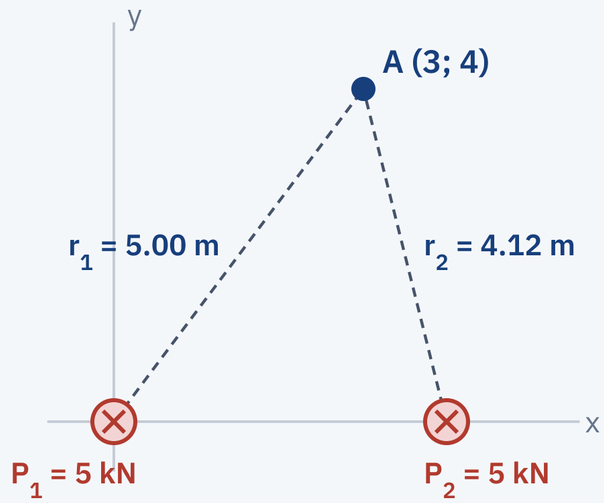
$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{5}{16}\,(0.03386) = \mathbf{0.01058}\ \text{kN/m}^2$$

2 P_2 (4; 0)

$$r_2 = \sqrt{(3-4)^2 + 4^2} = 4.123 \text{ m}$$

$$\frac{r_2}{\eta z} = \frac{4.123}{0.5345(4)} = 1.9284\,, \quad I_5 = 0.05434$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{5}{16}\,(0.05434) = \mathbf{0.01698}\ \text{kN/m}^2$$



La carga 2 está más cerca: **0.01698**; carga 1: **0.01058 kN/m²**.

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

1 Las tensiones se suman

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.01058 + 0.01698 = \mathbf{0.02756}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 0.01419 + 0.02442 = 0.03862\ \mathrm{kN/m^2}$$

2 Perfil en profundidad bajo el mismo punto (suma de las dos cargas)

z (m)	2	4	6	8	10	12	16	20
$\Delta\sigma_z$ Westergaard	0.0174	0.0276	0.0301	0.0282	0.0247	0.0210	0.0150	0.0108
$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	0.0137	0.0386	0.0430	0.0371	0.0298	0.0237	0.0153	0.0105

En el punto A (z = 4 m) las dos cargas producen conjuntamente **$\Delta\sigma_z$ = 0.02756 kN/m²**; la suma de Boussinesq es 0.03862 kN/m². El total es la suma de los valores obtenidos para cada carga por separado; el valor de una sola carga (Ejemplo 1) es una parte de este total.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Resumen

Puntos clave

Medio de Westergaard: placas horizontales rígidas delgadas impiden la deformación lateral; $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_5$, $I_5 = [1/(2\pi\eta^2)]\,[(r/\eta z)^2 + 1]^{-3/2}$, $\eta = \sqrt{[(1 - 2\mu_s)/(2 - 2\mu_s)]}$

Ejemplo (P = 5 kN, r = 5 m, z = 4 m, μ_s = 0.3): η 0.5345; r/(ηz) 2.339; I_5 0.03386 → **$\Delta\sigma_z$ = 0.01058 kN/m²**; Boussinesq 0.01419

En el eje de la carga $I_5 = 1/(2\pi\eta^2)$: para $\mu_s = 0$, $1/\pi = 0.3183$ (Boussinesq $3/2\pi = 0.4775$); la tensión aumenta con μ_s y, en $\mu_s = 0.5$, la solución pierde su validez

Profundidad: a profundidades intermedias la tensión de Westergaard es menor, y a gran profundidad las dos soluciones se aproximan; la mayor tensión se da en $z = r/(\sqrt{2}\,\eta) = 6.61$ m (Boussinesq: $r\sqrt{1.5} = 6.12$ m)

Superposición: cada carga se considera con su propia distancia r y las tensiones se suman (dos cargas en el ejemplo: 0.02756 kN/m²)

Referencias bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1938). A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics: soft material reinforced by numerous strong horizontal sheets. In Contributions to the Mechanics of Solids, Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume. Macmillan, New York, 268–277.

NOTA

Todos los ejemplos numéricos se han obtenido con el propio motor de cálculo del módulo; el módulo da los mismos valores. El ejemplo inicial del módulo es P = 5 kN, r = 5 m, μ_s = 0.3 y z = 4 m.

GeoTerva

Cálculos geotécnicos en línea

De la teoría a la práctica

Introducir en GeoTerva las cargas puntuales propias, el punto A y el valor de μ_s; el módulo proporciona η, el valor de influencia I_5, la contribución de cada carga, la comparación con Boussinesq, el perfil en profundidad, la solución paso a paso y el informe.

Abrir el módulo → | **Página de teoría →**

Abrir en el teléfono
Los módulos de prueba no requieren registro.

Si desea utilizarlas en sus clases: info@geoterva.com