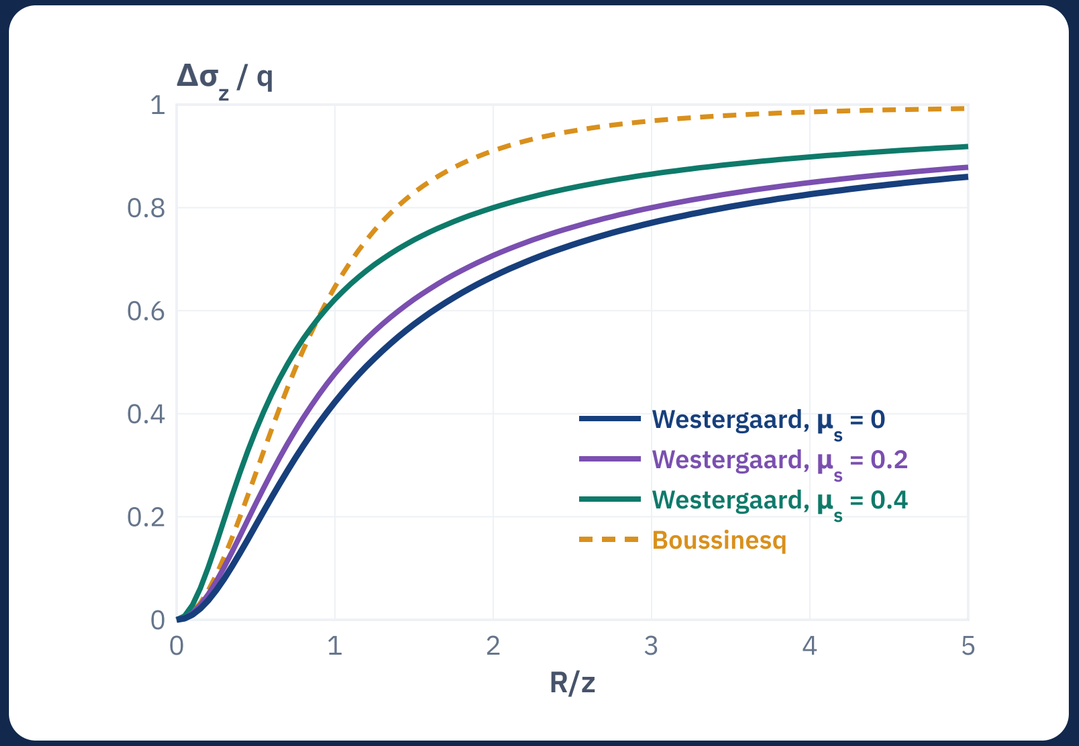
GeoTerva

岩土工程讲义 · 土体中的应力

Westergaard：面积荷载下的应力

讲义：Westergaard介质中均布荷载作用下圆形和矩形面积下方的应力；圆心和矩形角点手算求解。

Westergaard介质 | 圆心 | 矩形角点 | 角点矩形 | 叠加法



引言

本讲内容

将Westergaard集中荷载解在**荷载作用面积上积分**：两个封闭解

圆心下方：$\Delta\sigma_z = q\,\{1 - \eta/[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}\}$

矩形角点下方：$\Delta\sigma_z = q\,I_W$；其他点采用带符号的**四角点矩形**法

Westergaard应力与**Boussinesq**应力的比较；泊松比$\boldsymbol{\mu_s}$的影响

多个区域的**叠加**；随深度的变化

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：公式及其依据

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

算例：柔性圆形面积，R = 4 m，q = 300 kN/m²；圆心正下方z = 4 m处；薄板之间的土体中$\mu_s = 0$。

Westergaard介质中的受荷面积

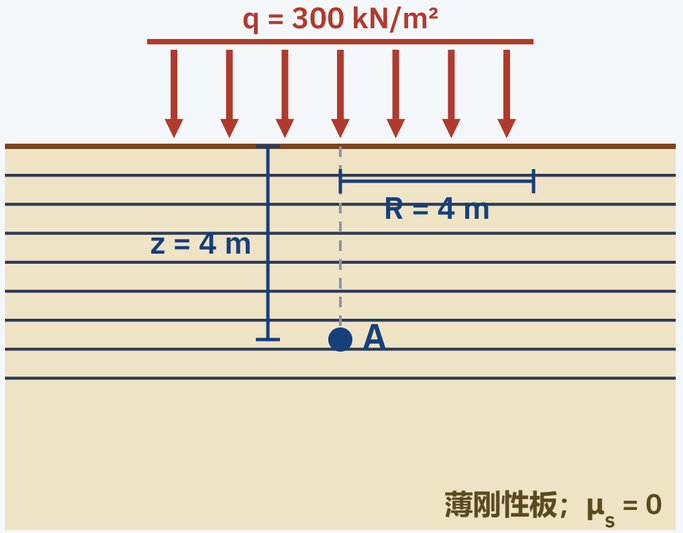
理论

与Boussinesq解对圆形和矩形的做法相同，Westergaard集中荷载解可在受荷**面积上积分**

对于柔性且均匀分布荷载的面积，可得到**两个闭式解**：**圆形中心**下方和**矩形角点**下方的应力

μ_s为两刚性层之间土体的泊松比；$\mu_s = 0$时$\eta = 1/\sqrt{2}$

$$\eta = \sqrt{\frac{1 - 2\mu_s}{2 - 2\mu_s}}$$



中心下方

理论

在承受均布荷载、半径为**R**的柔性圆形面积中心下方：

$$\Delta\sigma_z = q\left\{1 - \frac{\eta}{\left[\eta^2 + (R/z)^2\right]^{1/2}}\right\}$$

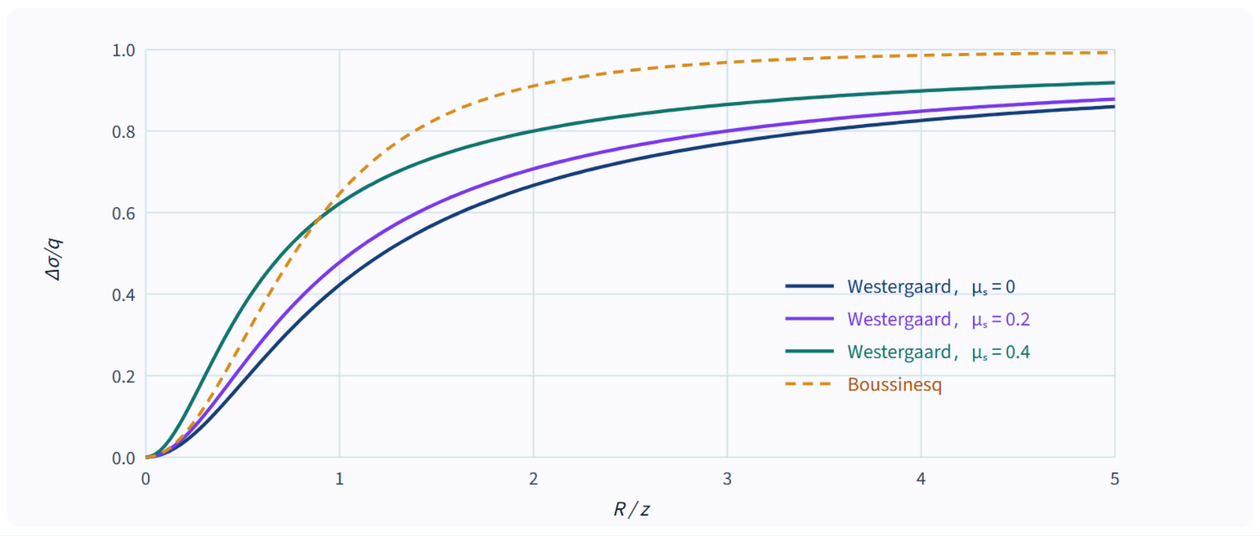
该关系式由集中荷载解导出：微元**r dr dα**承受荷载**q r dr dα**；利用集中荷载的影响值$\mathbf{I_5}$，对r的积分可用初等函数求出

$$\Delta\sigma_z = q\int_0^R \frac{r\,dr}{\eta^2 z^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2} = q\left\{1 - \left[\left(\frac{R}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}\right\}$$

$\Delta\sigma_z/q$值随R/z的变化

理论

R/z	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	2	2.5	3	4	5	10
Westergaard（$\mu_s = 0$）	0.0572	0.1835	0.3140	0.4226	0.5076	0.5736	0.6667	0.7278	0.7706	0.8259	0.8600	0.9295
Boussinesq	0.0869	0.2845	0.4880	0.6464	0.7562	0.8293	0.9106	0.9488	0.9684	0.9857	0.9925	0.9990



角点下：I_w

理论

在承受均布荷载、尺寸为B × L的柔性矩形角点下方，设m = B/z、n = L/z，则：

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{2\pi}\left[\cot^{-1}\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\eta^4\left(\frac{1}{m^2n^2}\right)}\right] = q\,I_w$$

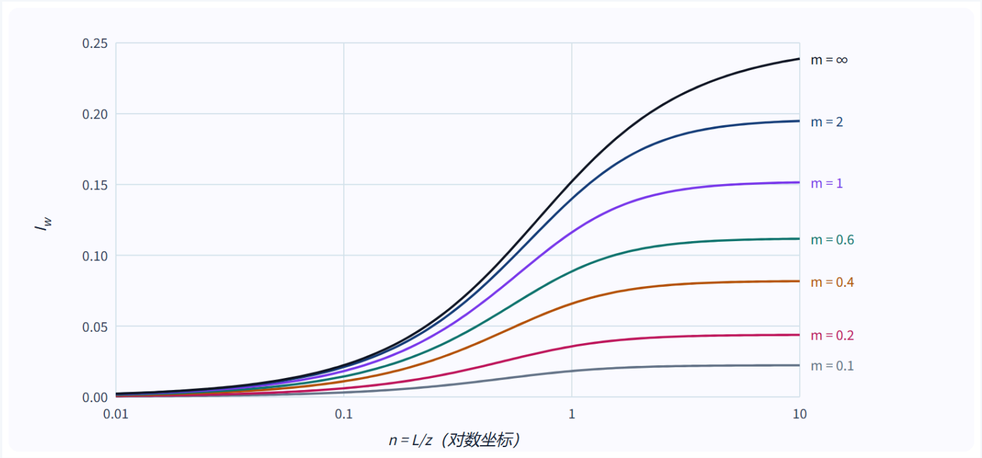
对于所有其他点，与Boussinesq矩形情形一样，采用**带符号的四角点矩形**；模块自动完成该运算

$$\Delta\sigma_z = q\,\left[\pm I_w(m_1,n_1)\pm I_w(m_2,n_2)\pm I_w(m_3,n_3)\pm I_w(m_4,n_4)\right]$$

I_w的值($\mu_s = 0$)

理论

m	n = 0.1	n = 0.4	n = 1	n = 2	n = 5	n = 10
0.1	0.0031	0.0110	0.0182	0.0211	0.0221	0.0223
0.2	0.0061	0.0214	0.0357	0.0413	0.0434	0.0438
0.5	0.0129	0.0459	0.0781	0.0916	0.0969	0.0977
1	0.0182	0.0658	0.1161	0.1398	0.1498	0.1515
2	0.0211	0.0768	0.1398	0.1743	0.1916	0.1948
10	0.0223	0.0817	0.1515	0.1948	0.2250	0.2341



圆形荷载的极坐标积分

理论

对于圆心以外的点不存在闭合关系式：模块将Westergaard集中荷载解在圆面上、相对于A点正下方的点，在**极坐标**中积分

沿每条射线，径向积分为封闭形式；仅角度积分为数值积分。在中心(r = 0)处，该结果可简化为上述封闭关系式

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\oint \left[G(\rho_1) - G(\rho_2)\right] d\varphi \qquad G(\rho) = \left[\left(\frac{\rho}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}$$

叠加原理

理论

可输入圆形和矩形荷载（最多八个），每个均由各自的**q**值、尺寸及其在地面上的中心位置定义；两个荷载面积可以相接，但不得重叠

由于Westergaard介质为**弹性**，各面积的应力按其到A点的各自距离求出，应力**叠加**；Boussinesq对比值也以同样方式叠加

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_k \left\{ 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R_k/z)^2}} \right\} \text{ 或 } q_k \sum \pm I_w$$

题目

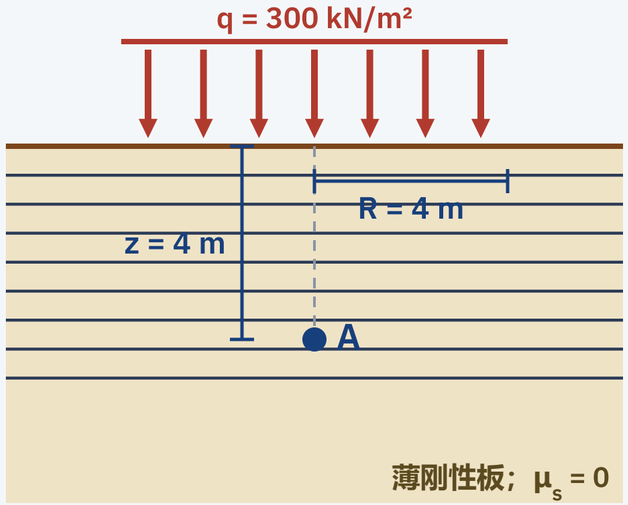
算例

已知条件

荷载	**柔性均布圆形荷载：$q = 300$ kN/m²，$R = 4$ m**
A点	**圆心下方，$z = 4$ m**
土	**板间$\mu_s = 0$**

求

η、**R/z**、**$\Delta\sigma_z/q$**、**$\Delta\sigma_z$**，以及与Boussinesq应力的比较。



解答 (1/2)

解答

1 Westergaard常数η

$$\eta = \sqrt{\frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \mathbf{0.7071} \qquad \eta^2 = 0.5000$$

2 比值与应力

$$\frac{R}{z} = \frac{4}{4} = 1 \qquad \sqrt{\eta^2 + (R/z)^2} = \sqrt{0.5000 + 1} = 1.2247$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R/z)^2}} = 1 - \frac{0.7071}{1.2247} = \mathbf{0.4226}$$

$$\Delta\sigma_z = q\,\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 300\,(0.4226) = \mathbf{126.79}\ \text{kN/m}^2$$

求得Westergaard应力为**126.79 kN/m²**（q的42.3%）。

解答 (2/2)

解答

4 Boussinesq（对比）

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{1}{\left[(R/z)^2+1\right]^{3/2}} = 1 - \frac{1}{2^{3/2}} = \mathbf{0.6464}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 300\,(0.6464) = \mathbf{193.93}\ \text{kN/m}^2 \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = \frac{126.79}{193.93} = 0.654$$

Westergaard**126.79 kN/m²**，Boussinesq**193.93 kN/m²**：由于刚性薄层将荷载向侧向扩散，中心下方的Westergaard应力仅为Boussinesq应力的**65.4%**。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

荷载　**圆形** $R = 4$ **m**，$q = 300$ **kN/m²**，$\mu_s = 0$

深度　$z = 0.4;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12$ **m** $(z/R = 0.1 \ldots 3)$

求

各深度处的$\Delta\sigma_z/q$、Westergaard应力和Boussinesq应力；z = 2 m和12 m时的手算验算。

解答 (1/2)

解答

z (m)	z/R	R/z	$\Delta\sigma_z/q$	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	比值W/B
0.4	0.1	10.00	0.9295	**278.84**	299.70	0.930
2	0.5	2.00	0.6667	**200.00**	273.17	0.732
4	1.0	1.00	0.4226	**126.79**	193.93	0.654
6	1.5	0.67	0.2724	**81.72**	127.19	0.642
8	2.0	0.50	0.1835	**55.05**	85.34	0.645
10	2.5	0.40	0.1296	**38.88**	59.88	0.649
12	3.0	0.33	0.0955	**28.64**	43.86	0.653

各深度处Westergaard应力均小于Boussinesq应力（z = 4 m：126.79与193.93 kN/m²；z = 12 m：28.64与43.86 kN/m²）。比值在近地表处从0.930开始，z = 4 m时为0.654，并在深处保持在0.65左右。

解答 (2/2)

解答

1 z = 2 m (R/z = 2)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.7071}{\sqrt{0.5000 + 4}} = 1 - \frac{0.7071}{2.1213} = \mathbf{0.6667}$$

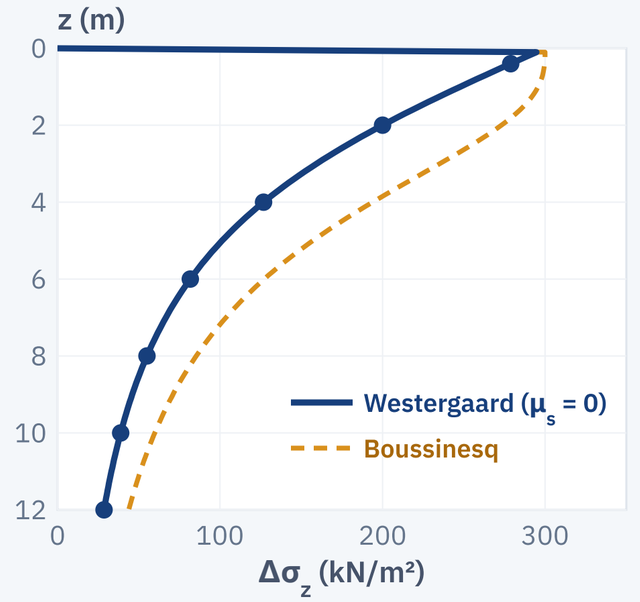
$$\Delta\sigma_z = 300\,(0.6667) = \mathbf{200.00}\ \text{kN/m}^2$$

2 z = 12 m (R/z = 1/3)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.7071}{\sqrt{0.5000 + 0.1111}} = 1 - \frac{0.7071}{0.7817} = \mathbf{0.0955}$$

$$\Delta\sigma_z = 300\,(0.0955) = \mathbf{28.64}\ \text{kN/m}^2$$

在z = 2 m处，应力恰为**2q/3 = 200.00 kN/m²**(Boussinesq: 273.17)；在z = 12 m处为**28.64 kN/m²**(Boussinesq: 43.86)。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

荷载与点位	**圆形荷载**$R = 4$ **m**，$q = 300$ **kN/m²**，**中心下方**$z = 4$ **m**
变化	$\mu_s = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.49$

求

对每个μ_s：**η**、**$\Delta\sigma_z/q$**、**$\Delta\sigma_z$**及与Boussinesq解的比值；μ_s = 0.2和0.4时手算。

解答 (1/2)

解答

μ_s	η	$\Delta\sigma_z/q$	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	$\Delta\sigma_z$ / Boussinesq
0.00	0.7071	0.4226	**126.79**	0.654
0.10	0.6667	0.4453	**133.59**	0.689
0.20	0.6124	0.4778	**143.33**	0.739
0.30	0.5345	0.5286	**158.58**	0.818
0.40	0.4082	0.6220	**186.61**	0.962
0.49	0.1400	0.8613	**258.40**	1.332

随着μ_s增大，中心下方的Westergaard应力**增大**：μ_s = 0时为126.79，μ_s = 0.4时为186.61 kN/m²（Boussinesq解：193.93）。μ_s = 0.49时为258.40 kN/m²，**超过**Boussinesq值。

解答 (2/2)

解答

1 μ_s = 0.2

$$\eta^2 = \frac{1-0.4}{2-0.4} = 0.3750\,,\quad \eta = 0.6124\,,\quad \sqrt{\eta^2+1} = 1.1726$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.6124}{1.1726} = 0.4778 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = 300\,(0.4778) = \mathbf{143.33}\ \text{kN/m}^2$$

2 μ_s = 0.4

$$\eta^2 = \frac{1-0.8}{2-0.8} = 0.1667\,,\quad \eta = 0.4082\,,\quad \sqrt{\eta^2+1} = 1.0801$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.4082}{1.0801} = 0.6220 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = 300\,(0.6220) = \mathbf{186.61}\ \text{kN/m}^2$$

η减小时，应力增大：**143.33 → 186.61 kN/m²**（μ_s = 0.2 → 0.4）。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

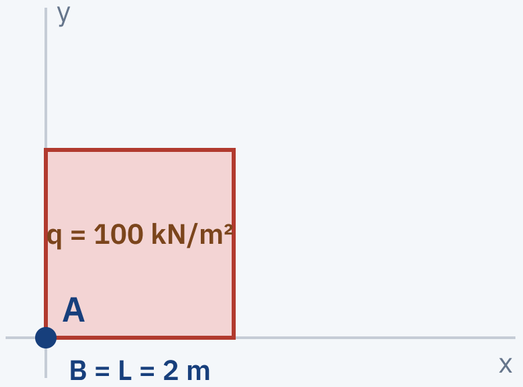
算例

已知条件

荷载	**柔性、均布的正方形荷载：** $B = L = 2$ **m，** $q = 100$ **kN/m²**
A点	**正方形的一个角点下方，** $z = 2$ **m**
土	**板间** $\mu_s = 0$

求

m、**n**、$\mathbf{I_w}$、$\mathbf{\Delta\sigma_z}$；与Boussinesq值的比较；μ_s的影响。



解答 (1/2)

解答

1 m、n和η

$$m = \frac{B}{z} = \frac{2}{2} = 1\,,\quad n = \frac{L}{z} = 1\,,\quad \eta^2 = \frac{1}{2} = 0.5000$$

2 影响值I_w

$$\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\eta^4}{m^2n^2}} = \sqrt{0.5\,(2)+0.25} = \sqrt{1.25} = 1.1180$$

$$I_w = \frac{1}{2\pi}\cot^{-1}(1.1180) = \frac{0.7297}{2\pi} = \mathbf{0.1161}$$

正方形角点下方、z = 2 m处求得**I_w = 0.1161**（页面上的表值：$I_w(1;1)$ = 0.1161）。

解答 (2/2)

解答

3 应力与Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = q\, I_w = 100\,(0.1161) = \mathbf{11.61}\ \text{kN/m}^2$$

$$\text{Boussinesq: } I_3(1;1) = 0.1752 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z,B} = \mathbf{17.52}\ \text{kN/m}^2$$

μ_s	η	I_w (m = n = 1)	$\Delta\sigma_z = q\, I_w$ (kN/m²)	Boussinesq I_3	$\Delta\sigma_{z,B}$ (kN/m²)
0.0	0.7071	0.1161	**11.61**	0.1752	17.52
0.2	0.6124	0.1296	**12.96**	0.1752	17.52
0.3	0.5345	0.1418	**14.18**	0.1752	17.52
0.4	0.4082	0.1639	**16.39**	0.1752	17.52

正方形角点下方，Westergaard应力为**11.61 kN/m²**，Boussinesq应力为17.52 kN/m²（比值0.663）。随着μ_s增大，I_w增大：0.1161 → 0.1639 (μ_s = 0 → 0.4)；Boussinesq值为I_3 = 0.1752。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

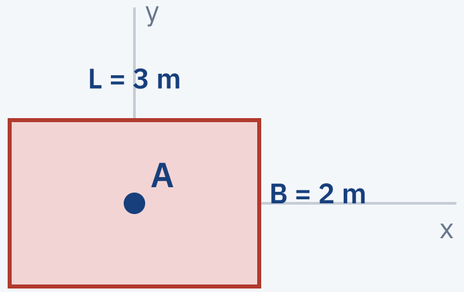
算例

已知条件

荷载	**柔性矩形：$L = 3$ m（x方向），$B = 2$ m，$q = 300$ kN/m²**
A点	**中心下方，$z = 4$ m；$\mu_s = 0$**
提示	**中心点是四个全等矩形的公共角点**

求

用四角点矩形法求$\Delta\sigma_z$及Boussinesq值；随深度变化表。



解答 (1/2)

解答

1 四个相等的角点矩形(1.5 m × 1.0 m)

$$m = \frac{1.0}{4} = 0.2500\,, \quad n = \frac{1.5}{4} = 0.3750\,, \quad \eta^2 = 0.5000$$

2 I_w（每个角点矩形）

$$\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\eta^4}{m^2n^2}} = \sqrt{0.5\,(23.1111)+28.4444} = \sqrt{40} = 6.3246$$

$$I_w = \frac{1}{2\pi}\cot^{-1}(6.3246) = \frac{0.15682}{2\pi} = \mathbf{0.02496}$$

每个角点矩形均得$\mathbf{I_w = 0.02496}$；中心点为四个相同角点矩形的公共角点。

解答 (2/2)

解答

3 应力（4个角点矩形）与Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = 4\,q\,I_w = 4\,(300)\,(0.02496) = \mathbf{29.95}\ \text{kN/m}^2$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 4\,q\,I_3(0.25;0.375) = 4\,(300)\,(0.03830) = 45.96\ \text{kN/m}^2$$

4 同一方法适用于每个深度(m = 1.0/z, n = 1.5/z)

z (m)	1	2	4	6	8	12
$\Delta\sigma_z$ Westergaard (kN/m²)	**158.69**	**82.80**	**29.95**	**14.62**	**8.52**	**3.89**
Boussinesq解$\Delta\sigma_z$(kN/m²)	232.37	128.49	45.96	22.21	12.88	5.86
比值W/B	0.683	0.644	0.652	0.658	0.662	0.664

各深度处Westergaard应力均小于Boussinesq应力：z = 1 m处分别为158.69和232.37 kN/m²，z = 12 m处分别为3.89和5.86 kN/m²。z = 1–12 m范围内两者之比介于0.644与0.683之间。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

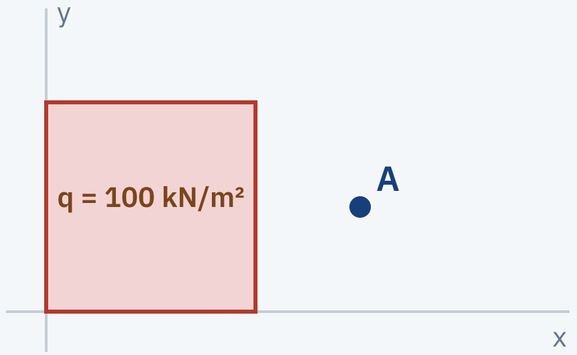
算例

已知条件

荷载	**柔性正方形**$[0;\,2]\times[0;\,2]$ **m，**$q=100$ **kN/m²**
A点	$x=3$ **m，**$y=1$ **m（边缘外1 m处），**$z=2$ **m**
土	**板间**$\mu_s=0$

求

利用图中标出的**四个角点矩形**求$\Delta\sigma_z$；与Boussinesq解的比较。



解答

解答

1 A点到各角点的距离$a = x_{corner} - x_A$，$b = y_{corner} - y_A$；四角点矩形

角点矩形	(a ; b) (m)	m = |a|/z	n = |b|/z	I_w	符号
1	(−1 ; 1)	0.50	0.50	0.05409	−
2	(−3 ; 1)	1.50	0.50	0.08745	+
3	(−1 ; −1)	0.50	0.50	0.05409	−
4	(−3 ; −1)	1.50	0.50	0.08745	+

2 总计

$$\Delta\sigma_z = q\,[-I_w(0.5;0.5) + I_w(1.5;0.5) - I_w(0.5;0.5) + I_w(1.5;0.5)]$$

$$= 2q\,[0.08745 - 0.05409] = 200\,(0.03336) = \mathbf{6.673}\ \text{kN/m}^2$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 9.466\ \text{kN/m}^2$$

A点虽位于荷载之外，仍受到**6.67 kN/m²**的应力；Boussinesq值为9.47 kN/m²。仅需一步运算：从两个3 m × 1 m的矩形中减去两个1 m × 1 m的矩形。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

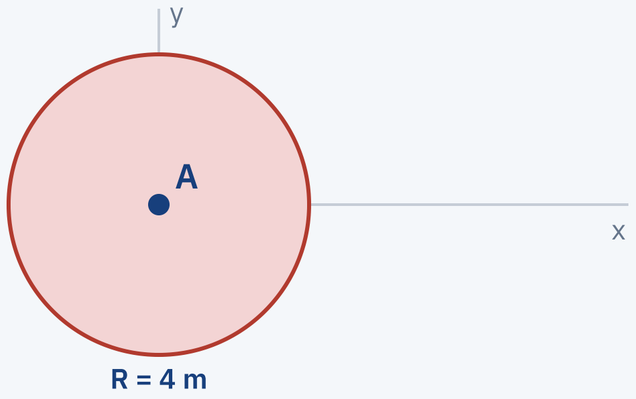
算例

已知条件

荷载	**圆形**$R = 4$ **m**，$q = 300$ **kN/m²**；$\mu_s = 0$，$z = 4$ **m**
A点	**距中心的水平距离**$r = 0;\ 0.5R;\ R;\ 1.5R;\ 2R;\ 3R$

求

各距离处的Westergaard和Boussinesq应力（模块的极坐标积分）。



解答

解答

r (m)	r/R	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	比值W/B
0	0.0	**126.79**	193.93	0.654
2	0.5	**111.97**	168.67	0.664
4	1.0	**69.51**	99.67	0.697
6	1.5	**30.71**	37.99	0.808
8	2.0	**13.75**	12.54	1.096
12	3.0	**4.05**	1.87	2.163

在圆心(r = 0)处，闭合表达式的值为126.79 kN/m²。在圆周边缘(r = R)处为69.51 kN/m²（Boussinesq解：99.67）；离开圆域向外，Westergaard应力衰减较慢，并在**r = 1.5R与2R之间**超过Boussinesq解（r = 12 m时：4.05和1.87 kN/m²）。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

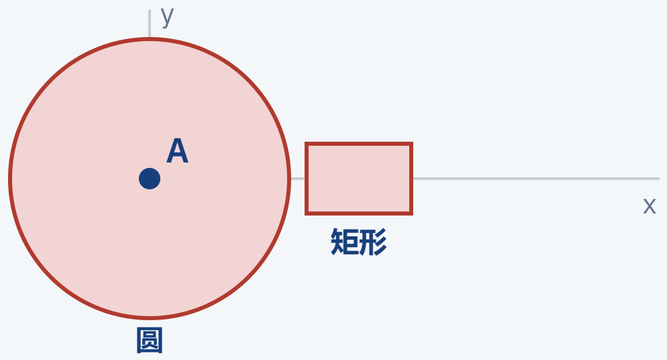
算例

已知条件

面积1	**圆形**$R = 4$ **m，**$q = 300$ **kN/m²，中心**$(0;\ 0)$
面积2	**矩形**3×2 **m（**x**方向为3 m），**$q = 300$ **kN/m²，中心**$(6;\ 0)$
A点	$x = 0$，$y = 0$，$z = 4$ **m；**$\mu_s = 0$ **（各面积互不重叠）**

求

各面积的贡献、总应力和Boussinesq叠加值；深度表。



解答 (1/2)

解答

1 面积1（圆形，中心下方）

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 300\left\{1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R/z)^2}}\right\} = 300\,(0.4226) = \mathbf{126.79}\ \text{kN/m}^2 \quad \text{(算例1)}$$

2 区域2（矩形；距A点x = 4.5和7.5 m，y = ±1 m）

$$\Delta\sigma_{z(2)} = q\left[I_w\left(\tfrac{7.5}{4};\tfrac{1}{4}\right) - I_w\left(\tfrac{4.5}{4};\tfrac{1}{4}\right)\right] \times 2 = 600\,[0.05048 - 0.04553]$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = 600\,(0.00495) = \mathbf{2.97}\ \text{kN/m}^2 \qquad \Delta\sigma_{z(2),B} = 3.18$$

矩形距A点较远，故其贡献很小：**2.97 kN/m²**（Boussinesq解：3.18）。圆形荷载的贡献为126.79 kN/m²。

解答 (2/2)

解答

1 应力相加(z = 4 m)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 126.79 + 2.97 = \mathbf{129.76}\ \text{kN/m}^2$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 193.93 + 3.18 = 197.11\ \text{kN/m}^2$$

2 同一点下方的深度剖面

z (m)	2	4	6	8	12
面积1（圆形）	200.00	126.79	81.72	55.05	28.64
区域2（矩形）	1.91	2.97	3.18	2.95	2.17
Westergaard合计	**201.91**	**129.76**	**84.90**	**58.00**	**30.81**
Boussinesq合计	274.02	197.11	131.63	89.82	47.27

在A点处，两块面积共同产生**129.76 kN/m²**（Boussinesq解总和：197.11 kN/m²）。侧面积所占比例随深度增大：在z = 12 m处约占总和的7.0%。

在GeoTerva中验算解答 ↗

小结

要点回顾

圆形，中心点：$\Delta\sigma_z = q\,\{1 - \eta/[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}\}$，$\eta = \sqrt{[(1 - 2\mu_s)/(2 - 2\mu_s)]}$；**矩形，角点**：$\Delta\sigma_z = q\,I_w$，$I_w = (1/2\pi)\,\cot^{-1}\sqrt{[\eta^2(1/m^2 + 1/n^2) + \eta^4/(m^2n^2)]}$

算例($R = 4$ m, $q = 300$, $z = 4$ m, $\mu_s = 0$)：$\eta = 0.7071$；$\Delta\sigma_z/q = 0.4226 \rightarrow \mathbf{\Delta\sigma_z = 126.79\ kN/m^2}$；Boussinesq解为193.93 kN/m²

矩形：角点处(2 m × 2 m, z = 2 m)，$I_w = 0.1161$；中心处取四个相等的角点矩形(3 × 2 m, z = 4 m: 29.95 kN/m²)；外部点处取四个**带符号的**角点矩形(6.67 kN/m²)

随着μ_s增大，中心下方的应力增大(0 → 0.4: 126.79 → 186.61 kN/m²)；$\mu_s = 0$时，荷载下方的Westergaard应力约为Boussinesq应力的65%，远离荷载处这一大小顺序则相反

叠加：每个面积按各自的距离计算，应力相加（圆形+矩形：129.76 kN/m²）

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1938). A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics: soft material reinforced by numerous strong horizontal sheets. In Contributions to the Mechanics of Solids, Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume. Macmillan, New York, 268–277.

注

全部数值算例均由模块自身的计算引擎生成；模块给出相同的数值。模块的初始算例：圆形荷载$R = 4\ \mathrm{m}$，$q = 300\ \mathrm{kN/m^2}$，$\mu_s = 0$，中心下方$z = 4\ \mathrm{m}$处。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入自己的圆形和矩形、A点以及μ_s值；模块同时给出η、I_w值、角点矩形、与Boussinesq解的对比、深度分布曲线、分步解答和报告。

打开模块→　**理论页面 →**

用手机打开
试用模块无需注册。