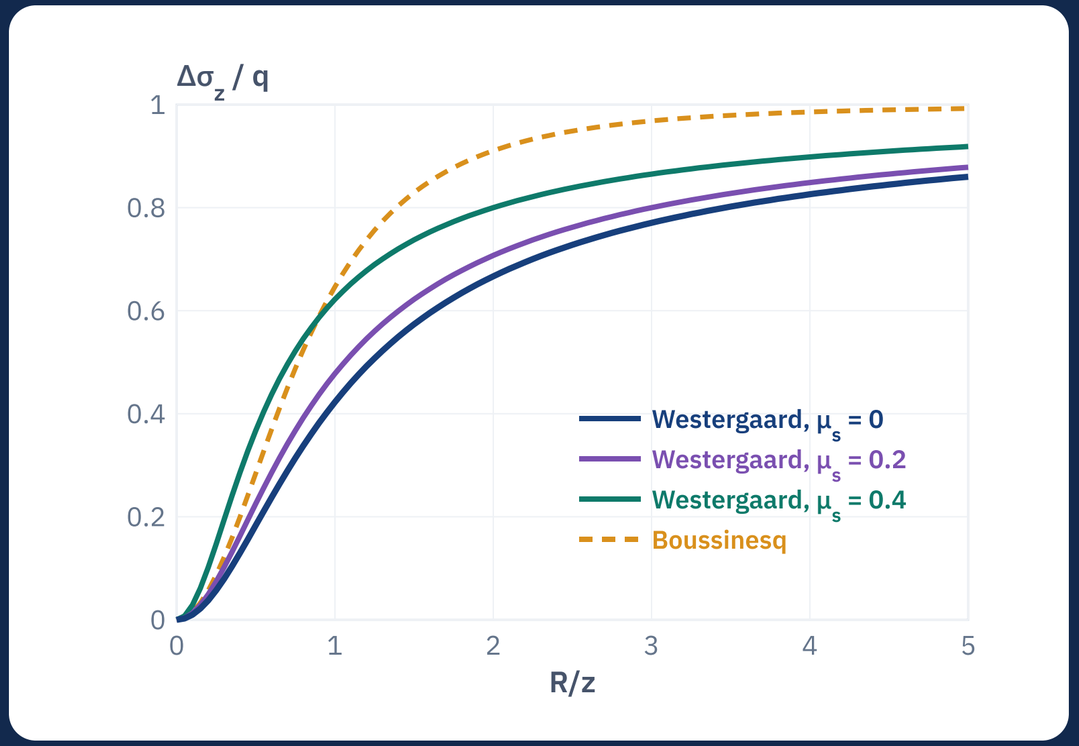
Презентация к лекции по геотехнике · Напряжения в грунтовом массиве

Westergaard: напряжения под нагрузкой, распределённой по площади

Лекция: напряжение под равномерно загруженными кругом и прямоугольником в среде Westergaard; центр круга и угол прямоугольника решаются вручную.

- Среда Westergaard
- Центр круга
- Угол прямоугольника
- Угловые прямоугольники
- Суперпозиция



Что мы изучим на этой лекции?

Интегрирование решения Westergaard для сосредоточенной силы по загруженной площади: два результата в замкнутом виде

Под **центром круга**: $\Delta\sigma_z = q\,\{1 - \eta/[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}\}$

Под **углом прямоугольника**: $\Delta\sigma_z = q\,I_w$; для других точек — **четыре угловых прямоугольника** со знаками

Сравнение напряжений по Westergaard и **Boussinesq**; влияние коэффициента Пуассона $\boldsymbol{\mu_s}$

Суперпозиция нескольких площадей; изменение с глубиной

ХОД ЛЕКЦИИ

Каждая тема излагается **в три шага**:

1 · **Теория**: формула и обоснование

2 · **Условие**: дано и требуется определить

3 · **Решение**: пошагово, с числами

Пример: гибкая круглая площадь, R = 4 m, q = 300 kN/m²; z = 4 m под центром; в грунте между пластинами $\mu_s = 0$.

Загруженные площади в среде Westergaard

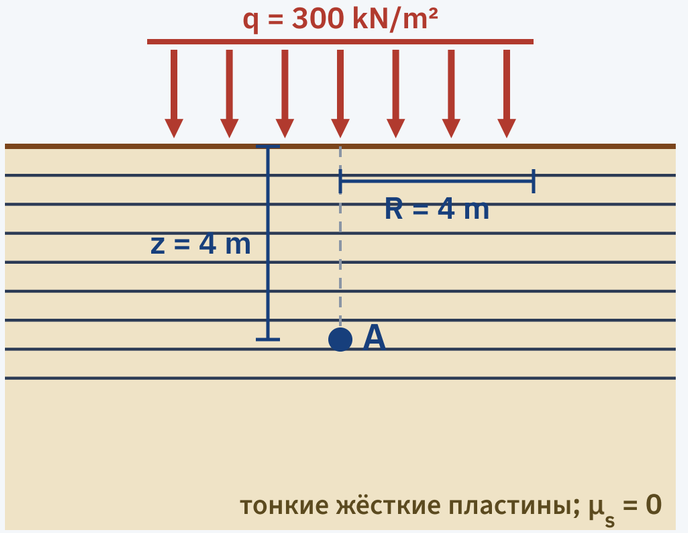
ТЕОРИЯ

Решение Westergaard для сосредоточенной силы можно **проинтегрировать по загруженной площади**, как это было сделано для решения Boussinesq для круга и прямоугольника

Для гибкой и равномерно нагруженной площади получаются **два решения в замкнутом виде**: напряжение под **центром круга** и под **углом прямоугольника**

μ_s — коэффициент Пуассона грунта между жёсткими слоями; при $\mu_s = 0$ $\eta = 1/\sqrt{2}$

$$\eta = \sqrt{\frac{1 - 2\mu_s}{2 - 2\mu_s}}$$



Под центром

ТЕОРИЯ

Под центром гибкой круглой площади радиусом **R** с равномерно распределённой нагрузкой:

$$\Delta\sigma_z = q\left\{1 - \frac{\eta}{\left[\eta^2 + (R/z)^2\right]^{1/2}}\right\}$$

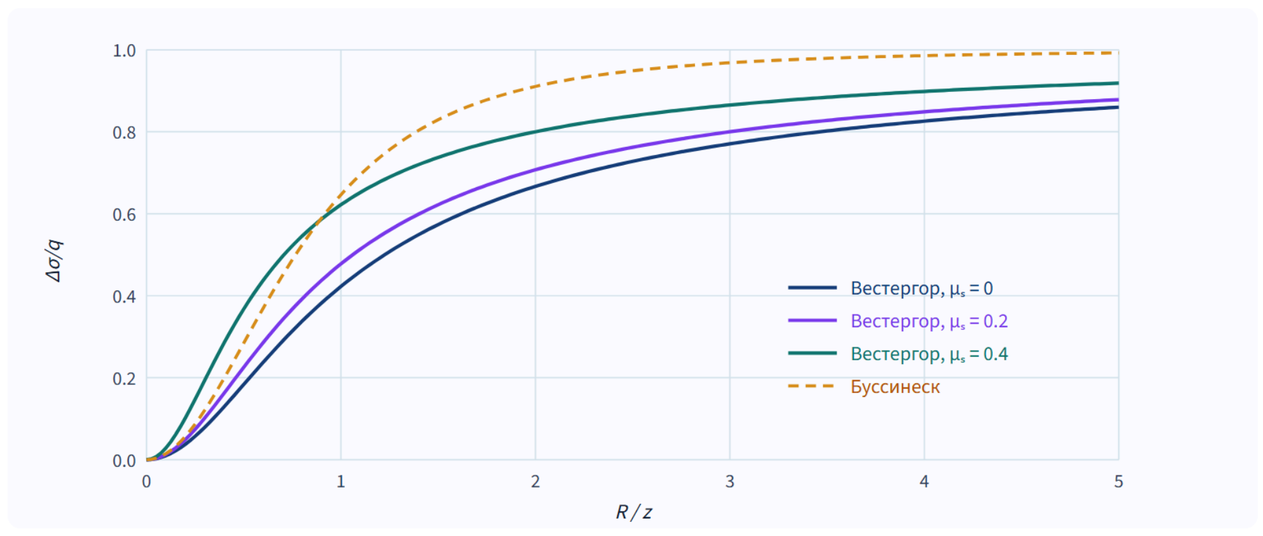
Соотношение получено из решения для сосредоточенной нагрузки: элемент **r dr dα** несёт нагрузку **q r dr dα**; интеграл по r с коэффициентом влияния $\mathbf{I_5}$ сосредоточенной нагрузки берётся через элементарные функции

$$\Delta\sigma_z = q\int_0^R \frac{r\,dr}{\eta^2 z^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2} = q\left\{1 - \left[\left(\frac{R}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}\right\}$$

Изменение $\Delta\sigma_z/q$ в зависимости от R/z

ТЕОРИЯ

R/z	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	2	2.5	3	4	5	10
Westergaard ($\mu_s = 0$)	0.0572	0.1835	0.3140	0.4226	0.5076	0.5736	0.6667	0.7278	0.7706	0.8259	0.8600	0.9295
Boussinesq	0.0869	0.2845	0.4880	0.6464	0.7562	0.8293	0.9106	0.9488	0.9684	0.9857	0.9925	0.9990



Под угловой точкой: I_w

ТЕОРИЯ

Под угловой точкой гибкого прямоугольника размерами **B × L** с равномерно распределённой нагрузкой при **m = B/z** и **n = L/z**:

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{2\pi}\left[\cot^{-1}\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\eta^4\left(\frac{1}{m^2 n^2}\right)}\right] = q\,I_w$$

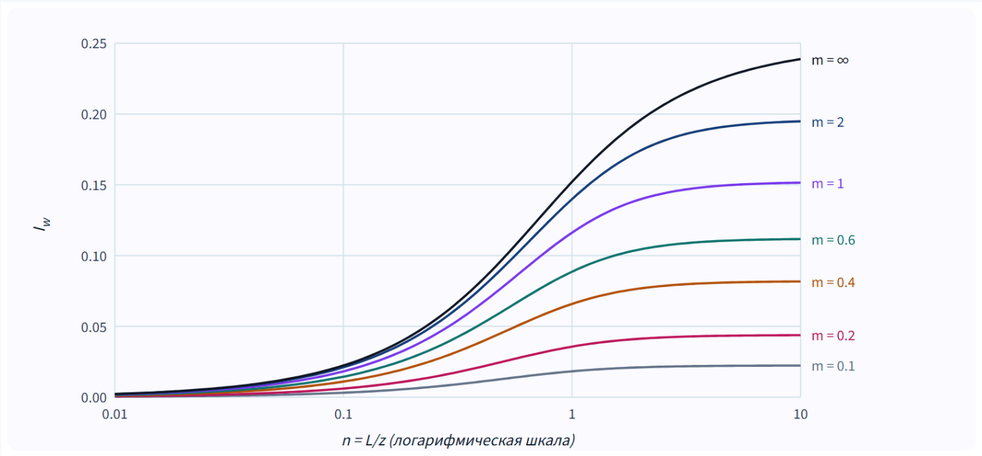
Для всех остальных точек, как и в случае прямоугольника Boussinesq, используются **четыре угловых прямоугольника со знаками**; модуль выполняет эту операцию

$$\Delta\sigma_z = q\,\left[\pm I_w(m_1,n_1) \pm I_w(m_2,n_2) \pm I_w(m_3,n_3) \pm I_w(m_4,n_4)\right]$$

Значения I_w ($\mu_s = 0$)

ТЕОРИЯ

m	n = 0.1	n = 0.4	n = 1	n = 2	n = 5	n = 10
0.1	0.0031	0.0110	0.0182	0.0211	0.0221	0.0223
0.2	0.0061	0.0214	0.0357	0.0413	0.0434	0.0438
0.5	0.0129	0.0459	0.0781	0.0916	0.0969	0.0977
1	0.0182	0.0658	0.1161	0.1398	0.1498	0.1515
2	0.0211	0.0768	0.1398	0.1743	0.1916	0.1948
10	0.0223	0.0817	0.1515	0.1948	0.2250	0.2341



Полярный интеграл для круга

ТЕОРИЯ

Для точек вне центра круга замкнутого соотношения нет: модуль интегрирует решение Westergaard для сосредоточенной нагрузки по кругу **в полярных координатах** относительно точки под точкой A

Вдоль каждого луча радиальный интеграл берётся в замкнутом виде; численно вычисляется только угловой интеграл. В центре (r = 0) этот результат сводится к приведённому выше замкнутому соотношению

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\oint \left[G(\rho_1) - G(\rho_2)\right] d\varphi \qquad G(\rho) = \left[\left(\frac{\rho}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}$$

Суперпозиция

ТЕОРИЯ

Можно вводить круги и прямоугольники, каждый из которых задаётся собственным значением **q**, размером и центром на поверхности грунта (не более восьми); две площади могут соприкасаться, но не могут перекрываться

Так как среда Westergaard **упругая**, напряжение от каждой площади определяется по её собственному расстоянию до точки A, а напряжения **суммируются**; сравнительное значение по Boussinesq суммируется таким же образом

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_k \left\{ 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R_k/z)^2}} \right\} \text{ или } q_k \sum \pm I_w$$

Условие

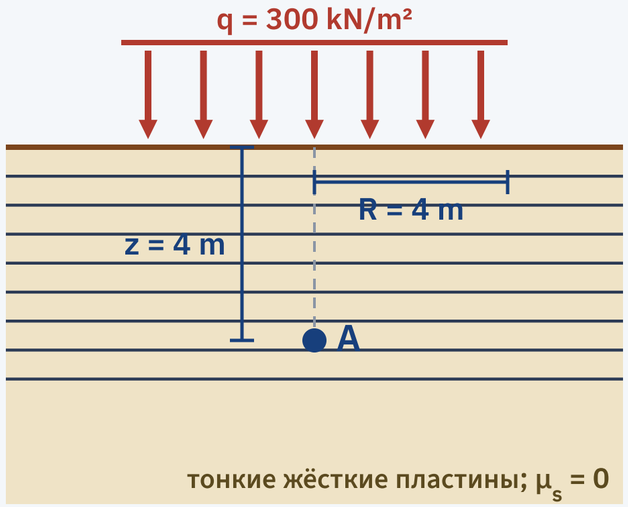
ПРИМЕР

Дано

Нагрузка	**гибкая круговая площадь с равномерно распределённой нагрузкой: $q = 300$ kN/m², $R = 4$ m**
Точка A	**под центром круга, $z = 4$ m**
Грунт	**между пластинами $\mu_s = 0$**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

η, **R/z**, **$\Delta\sigma_z/q$**, **$\Delta\sigma_z$** и сравнение с напряжением по Boussinesq.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Постоянная Westergaard η

$$\eta = \sqrt{\frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \mathbf{0.7071} \qquad \eta^2 = 0.5000$$

2 Отношение и напряжение

$$\frac{R}{z} = \frac{4}{4} = 1 \qquad \sqrt{\eta^2 + (R/z)^2} = \sqrt{0.5000 + 1} = 1.2247$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R/z)^2}} = 1 - \frac{0.7071}{1.2247} = \mathbf{0.4226}$$

$$\Delta\sigma_z = q\,\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 300\,(0.4226) = \mathbf{126.79}\ \text{kN/m}^2$$

Напряжение Westergaard составляет **126.79 kN/m²** (42.3% от q).

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

4 Boussinesq (для сравнения)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{1}{\left[(R/z)^2 + 1\right]^{3/2}} = 1 - \frac{1}{2^{3/2}} = \mathbf{0.6464}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 300\,(0.6464) = \mathbf{193.93}\ \text{kN/m}^2 \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = \frac{126.79}{193.93} = 0.654$$

Westergaard **126.79 kN/m²**, Boussinesq **193.93 kN/m²**: так как жёсткие пластины распределяют нагрузку в стороны, напряжение Westergaard под центром составляет лишь **65.4%** от напряжения Boussinesq.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

ПРИМЕР

Дано

Нагрузка	**круг** $R = 4$ **m,** $q = 300$ **kN/m²,** $\mu_s = 0$
Глубины	$z = 0.4;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12$ **m (**$z/R = 0.1 \ldots 3$**)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

На каждой глубине **$\Delta\sigma_z/q$**, напряжения по Westergaard и Boussinesq; проверка вручную для z = 2 m и 12 m.

Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

z (m)	z/R	R/z	$\Delta\sigma_z/q$	$\Delta\sigma_z$ по Westergaard	$\Delta\sigma_z$ по Boussinesq	Отношение W/B
0.4	0.1	10.00	0.9295	**278.84**	299.70	0.930
2	0.5	2.00	0.6667	**200.00**	273.17	0.732
4	1.0	1.00	0.4226	**126.79**	193.93	0.654
6	1.5	0.67	0.2724	**81.72**	127.19	0.642
8	2.0	0.50	0.1835	**55.05**	85.34	0.645
10	2.5	0.40	0.1296	**38.88**	59.88	0.649
12	3.0	0.33	0.0955	**28.64**	43.86	0.653

Напряжение по Westergaard на любой глубине меньше напряжения по Boussinesq (z = 4 m: 126.79 и 193.93 kN/m²; z = 12 m: 28.64 и 43.86 kN/m²). Отношение начинается у поверхности с 0.930, при z = 4 m равно 0.654 и на глубине остаётся около 0.65.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 z = 2 m (R/z = 2)

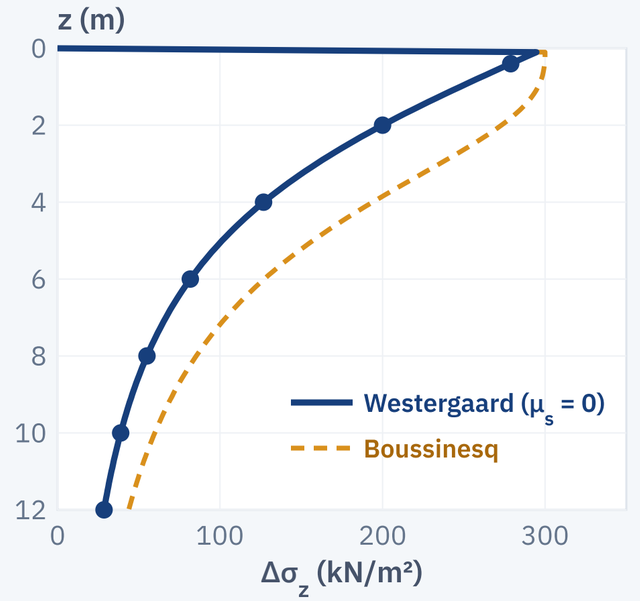
$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.7071}{\sqrt{0.5000 + 4}} = 1 - \frac{0.7071}{2.1213} = \mathbf{0.6667}$$

$$\Delta\sigma_z = 300\,(0.6667) = \mathbf{200.00}\ \text{kN/m}^2$$

2 z = 12 m (R/z = 1/3)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.7071}{\sqrt{0.5000 + 0.1111}} = 1 - \frac{0.7071}{0.7817} = \mathbf{0.0955}$$

$$\Delta\sigma_z = 300\,(0.0955) = \mathbf{28.64}\ \text{kN/m}^2$$



При z = 2 m напряжение составляет ровно **2q/3 = 200.00 kN/m²** (Boussinesq: 273.17); при z = 12 m — **28.64 kN/m²** (Boussinesq: 43.86).

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

ПРИМЕР

Дано

Нагрузка и точка	**круг $R = 4$ m, $q = 300$ kN/m², под центром $z = 4$ m**
Переменный	$\mu_s = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.49$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Для каждого μ_s — **η**, **$\Delta\sigma_z/q$**, **$\Delta\sigma_z$** и отношение к Boussinesq; вручную для μ_s = 0.2 и 0.4.

Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

μ_s	η	$\Delta\sigma_z/q$	$\Delta\sigma_z$ по Westergaard	$\Delta\sigma_z$ / Boussinesq
0.00	0.7071	0.4226	**126.79**	0.654
0.10	0.6667	0.4453	**133.59**	0.689
0.20	0.6124	0.4778	**143.33**	0.739
0.30	0.5345	0.5286	**158.58**	0.818
0.40	0.4082	0.6220	**186.61**	0.962
0.49	0.1400	0.8613	**258.40**	1.332

С ростом μ_s напряжение по Westergaard под центром **возрастает**: при $\mu_s = 0$ оно равно 126.79, при $\mu_s = 0.4$ — 186.61 kN/m² (Boussinesq: 193.93). При $\mu_s = 0.49$ оно составляет 258.40 kN/m² и **превышает** значение по Boussinesq.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 μ_s = 0.2

$$\eta^2 = \frac{1-0.4}{2-0.4} = 0.3750\,, \quad \eta = 0.6124\,, \quad \sqrt{\eta^2+1} = 1.1726$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.6124}{1.1726} = 0.4778 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = 300\,(0.4778) = \mathbf{143.33}\ \text{kN/m}^2$$

2 μ_s = 0.4

$$\eta^2 = \frac{1-0.8}{2-0.8} = 0.1667\,, \quad \eta = 0.4082\,, \quad \sqrt{\eta^2+1} = 1.0801$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.4082}{1.0801} = 0.6220 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = 300\,(0.6220) = \mathbf{186.61}\ \text{kN/m}^2$$

С уменьшением η напряжение растёт: **143.33 → 186.61 kN/m²** (μ_s = 0.2 → 0.4).

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

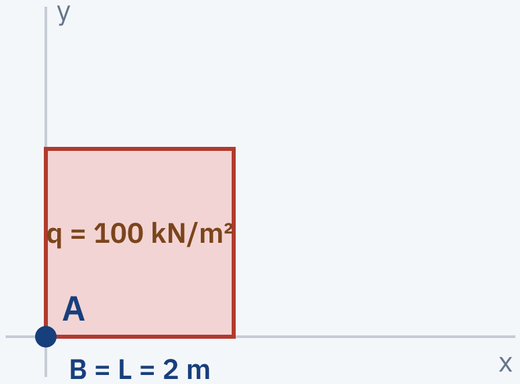
ПРИМЕР

Дано

Нагрузка	**гибкий квадрат с равномерно распределённой нагрузкой:** $B = L = 2$ **m,** $q = 100$ **kN/m²**
Точка A	**под одним углом квадрата,** $z = 2$ **m**
Грунт	**между пластинами** $\mu_s = 0$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

m, **n**, $\mathbf{I_w}$, $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; сравнение со значением по Boussinesq; влияние μ_s.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 m, n и η

$$m = \frac{B}{z} = \frac{2}{2} = 1\,, \quad n = \frac{L}{z} = 1\,, \quad \eta^2 = \frac{1}{2} = 0.5000$$

2 Значение влияния I_w

$$\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{\eta^4}{m^2 n^2}} = \sqrt{0.5\,(2) + 0.25} = \sqrt{1.25} = 1.1180$$

$$I_w = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{cot}^{-1}(1.1180) = \frac{0.7297}{2\pi} = \mathbf{0.1161}$$

Под углом квадрата при z = 2 m получается **I_w = 0.1161** (табличное значение на странице: $I_w(1; 1)$ = 0.1161).

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

3 Напряжение и Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = q\, I_w = 100\,(0.1161) = \mathbf{11.61}\ \text{kN/m}^2$$

$$\text{Boussinesq: } I_3(1;1) = 0.1752 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z,B} = \mathbf{17.52}\ \text{kN/m}^2$$

μ_s	η	I_w (m = n = 1)	$\Delta\sigma_z = q\, I_w$ (kN/m²)	Boussinesq I_3	$\Delta\sigma_{z,B}$ (kN/m²)
0.0	0.7071	0.1161	**11.61**	0.1752	17.52
0.2	0.6124	0.1296	**12.96**	0.1752	17.52
0.3	0.5345	0.1418	**14.18**	0.1752	17.52
0.4	0.4082	0.1639	**16.39**	0.1752	17.52

Под углом квадрата напряжение по Westergaard составляет **11.61 kN/m²**, напряжение по Boussinesq — 17.52 kN/m² (отношение 0.663). С ростом μ_s значение I_w увеличивается: 0.1161 → 0.1639 (μ_s = 0 → 0.4); значение по Boussinesq I_3 = 0.1752.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

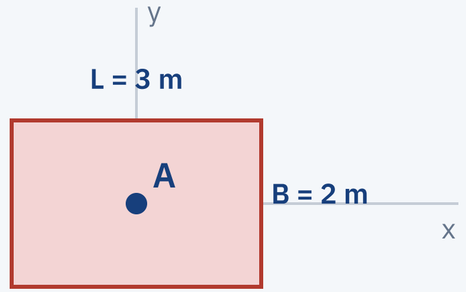
ПРИМЕР

Дано

Нагрузка	**гибкий прямоугольник: $L = 3$ m (направление x), $B = 2$ m, $q = 300$ kN/m²**
Точка A	**под центром, $z = 4$ m; $\mu_s = 0$**
Подсказка	**центр является общим углом четырёх равных угловых прямоугольников**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

$\Delta\sigma_z$ по методу четырёх угловых прямоугольников и значение по Boussinesq; таблица изменения с глубиной.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Четыре равных угловых прямоугольника (1.5 m × 1.0 m)

$$m = \frac{1.0}{4} = 0.2500\,, \quad n = \frac{1.5}{4} = 0.3750\,, \quad \eta^2 = 0.5000$$

2 I_w (для каждого углового прямоугольника)

$$\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\eta^4}{m^2n^2}} = \sqrt{0.5\,(23.1111)+28.4444} = \sqrt{40} = 6.3246$$

$$I_w = \frac{1}{2\pi}\cot^{-1}(6.3246) = \frac{0.15682}{2\pi} = \mathbf{0.02496}$$

Для каждого углового прямоугольника получается **I_w = 0.02496**; центр является общим углом четырёх равных угловых прямоугольников.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

3 Напряжение (4 угловых прямоугольника) и Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = 4\,q\,I_w = 4\,(300)\,(0.02496) = \mathbf{29.95}\ \text{kN/m}^2$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 4\,q\,I_3(0.25; 0.375) = 4\,(300)\,(0.03830) = 45.96\ \text{kN/m}^2$$

4 Тот же метод на каждой глубине (m = 1.0/z, n = 1.5/z)

z (m)	1	2	4	6	8	12
$\Delta\sigma_z$ Westergaard (kN/m²)	**158.69**	**82.80**	**29.95**	**14.62**	**8.52**	**3.89**
$\Delta\sigma_z$ по Boussinesq (kN/m²)	232.37	128.49	45.96	22.21	12.88	5.86
Отношение W/B	0.683	0.644	0.652	0.658	0.662	0.664

Напряжение Westergaard на любой глубине меньше напряжения Boussinesq: при z = 1 m — 158.69 и 232.37 kN/m², при z = 12 m — 3.89 и 5.86 kN/m². Отношение в диапазоне z = 1–12 m остаётся между 0.644 и 0.683.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

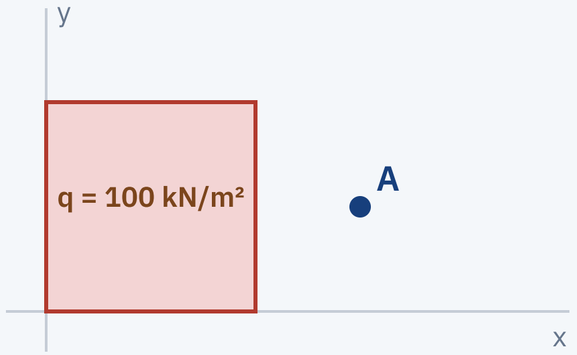
ПРИМЕР

Дано

Нагрузка	**гибкая квадратная площадь** $[0;\,2]\times[0;\,2]$ **m,** $q = 100$ **kN/m²**
Точка A	$x = 3$ **m,** $y = 1$ **m (на 1 m за краем),** $z = 2$ **m**
Грунт	**между пластинами** $\mu_s = 0$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

$\Delta\sigma_z$ по отмеченным **четырём угловым прямоугольникам**; сравнение со значением по Boussinesq.



Решение

РЕШЕНИЕ

1 Расстояния от A до углов $a = x_{corner} - x_A$, $b = y_{corner} - y_A$; четыре угловых прямоугольника

Угловой прямоугольник	(a ; b) (m)	m = |a|/z	n = |b|/z	I_w	Знак
1	(−1 ; 1)	0.50	0.50	0.05409	−
2	(−3 ; 1)	1.50	0.50	0.08745	+
3	(−1 ; −1)	0.50	0.50	0.05409	−
4	(−3 ; −1)	1.50	0.50	0.08745	+

2 Итого

$$\Delta\sigma_z = q\,[-I_w(0.5;0.5) + I_w(1.5;0.5) - I_w(0.5;0.5) + I_w(1.5;0.5)]$$

$$= 2q\,[0.08745 - 0.05409] = 200\,(0.03336) = \mathbf{6.673}\ \text{kN/m}^2$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 9.466\ \text{kN/m}^2$$

Хотя точка A находится вне нагрузки, в ней возникает напряжение **6.67 kN/m²**; значение по Boussinesq — 9.47 kN/m². Достаточно одной операции: из двух прямоугольников 3 m × 1 m вычесть два прямоугольника 1 m × 1 m.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

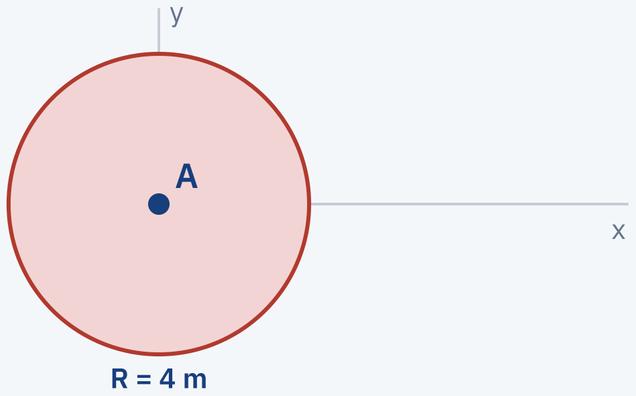
ПРИМЕР

Дано

Нагрузка	**круг $R = 4$ m, $q = 300$ kN/m²; $\mu_s = 0$, $z = 4$ m**
Точка A	**горизонтальное расстояние от центра $r = 0;\ 0.5R;\ R;\ 1.5R;\ 2R;\ 3R$**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Напряжения по Westergaard и Boussinesq на каждом расстоянии (полярный интеграл модуля).



Решение

РЕШЕНИЕ

r (m)	r/R	$\Delta\sigma_z$ по Westergaard	$\Delta\sigma_z$ по Boussinesq	Отношение W/B
0	0.0	**126.79**	193.93	0.654
2	0.5	**111.97**	168.67	0.664
4	1.0	**69.51**	99.67	0.697
6	1.5	**30.71**	37.99	0.808
8	2.0	**13.75**	12.54	1.096
12	3.0	**4.05**	1.87	2.163

В центре (r = 0) значение, даваемое замкнутой зависимостью, равно 126.79 kN/m². На краю круга (r = R) оно составляет 69.51 kN/m² (Boussinesq: 99.67); по мере удаления от круга напряжение по Westergaard убывает медленнее и **между r = 1.5R и 2R** становится больше напряжения по Boussinesq (r = 12 m: 4.05 и 1.87 kN/m²).

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

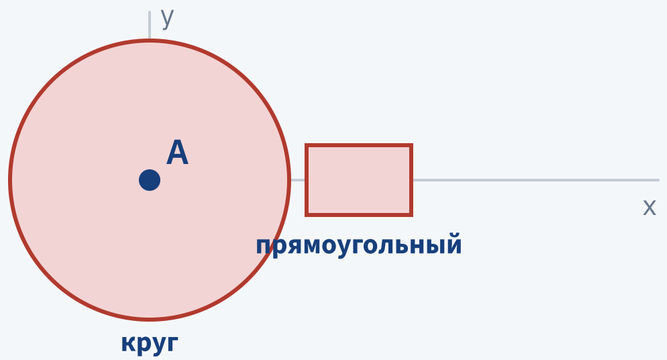
ПРИМЕР

Дано

Площадь 1	**круг** $R = 4$ **m,** $q = 300$ **kN/m², центр** $(0;\ 0)$
Площадь 2	**прямоугольник** 3×2 **m (3 m в направлении** x**),** $q = 300$ **kN/m², центр** $(6;\ 0)$
Точка A	$x = 0$**,** $y = 0$**,** $z = 4$ **m;** $\mu_s = 0$ **(площади не перекрываются)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Вклад каждой площади, суммарное напряжение и сумма по Boussinesq; таблица по глубине.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Площадь 1 (круг, под центром)

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 300\left\{1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R/z)^2}}\right\} = 300\,(0.4226) = \mathbf{126.79}\ \text{kN/m}^2 \quad \text{(Пример 1)}$$

2 Площадь 2 (прямоугольник; от A: x = 4.5 и 7.5 m, y = ±1 m)

$$\Delta\sigma_{z(2)} = q\left[I_w\left(\tfrac{7.5}{4};\tfrac{1}{4}\right) - I_w\left(\tfrac{4.5}{4};\tfrac{1}{4}\right)\right] \times 2 = 600\,[0.05048 - 0.04553]$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = 600\,(0.00495) = \mathbf{2.97}\ \text{kN/m}^2 \qquad \Delta\sigma_{z(2),B} = 3.18$$

Поскольку прямоугольник удалён от точки A, его вклад мал: **2.97 kN/m²** (Boussinesq: 3.18). Вклад круга составляет 126.79 kN/m².

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 Напряжения суммируются (z = 4 m)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 126.79 + 2.97 = \mathbf{129.76}\ \text{kN/m}^2$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 193.93 + 3.18 = 197.11\ \text{kN/m}^2$$

2 Профиль по глубине под той же точкой

z (m)	2	4	6	8	12
Площадь 1 (круг)	200.00	126.79	81.72	55.05	28.64
Площадь 2 (прямоугольная)	1.91	2.97	3.18	2.95	2.17
Суммарное по Westergaard	**201.91**	**129.76**	**84.90**	**58.00**	**30.81**
Суммарное по Boussinesq	274.02	197.11	131.63	89.82	47.27

В точке A две площади вместе создают **129.76 kN/m²** (сумма по Boussinesq: 197.11 kN/m²). Доля боковой площади растёт с глубиной: при z = 12 m она составляет около 7.0% от суммы.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Резюме

Главное

Круг, центр: $\Delta\sigma_z = q\,\{1 - \eta/[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}\}$, $\eta = \sqrt{[(1 - 2\mu_s)/(2 - 2\mu_s)]}$; **прямоугольник, угол**: $\Delta\sigma_z = q\,I_w$, $I_w = (1/2\pi)\,\cot^{-1}\sqrt{[\eta^2(1/m^2 + 1/n^2) + \eta^4/(m^2n^2)]}$

Пример (R = 4 m, q = 300, z = 4 m, $\mu_s = 0$): $\eta = 0.7071$; $\Delta\sigma_z/q = 0.4226$ → **$\Delta\sigma_z$ = 126.79 kN/m²**; по Boussinesq — 193.93 kN/m²

Прямоугольник: в углу (2 m × 2 m, z = 2 m) $I_w = 0.1161$; в центре — четыре равных угловых прямоугольника (3 × 2 m, z = 4 m: 29.95 kN/m²); в точке вне контура — четыре угловых прямоугольника **со знаками** (6.67 kN/m²)

С ростом **μ_s** напряжение под центром возрастает (0 → 0.4: 126.79 → 186.61 kN/m²); при $\mu_s = 0$ напряжение по Westergaard под нагрузкой составляет около 65% напряжения по Boussinesq, а вдали от нагрузки это соотношение меняется на обратное

Суперпозиция: каждая площадь рассматривается со своим расстоянием, напряжения складываются (круг + прямоугольник: 129.76 kN/m²)

Список литературы

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1938). A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics: soft material reinforced by numerous strong horizontal sheets. In Contributions to the Mechanics of Solids, Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume. Macmillan, New York, 268–277.

ПРИМЕЧАНИЕ

Все численные примеры получены с помощью собственного расчётного ядра модуля; модуль даёт те же значения. Начальный пример модуля: круг R = 4 m, q = 300 kN/m², μ_s = 0, под центром на z = 4 m.

GeoTerva

Геотехнические расчёты онлайн

От теории к практике

Введите в GeoTerva собственные круги и прямоугольники, точку A и значение μ_s; модуль одновременно выдаёт η, значения I_w, угловые прямоугольники, сравнение с решением Boussinesq, профиль по глубине, пошаговое решение и отчёт.

Открыть модуль → | **Страница теории →**

Открыть на телефоне
Для пробных модулей регистрация не требуется.