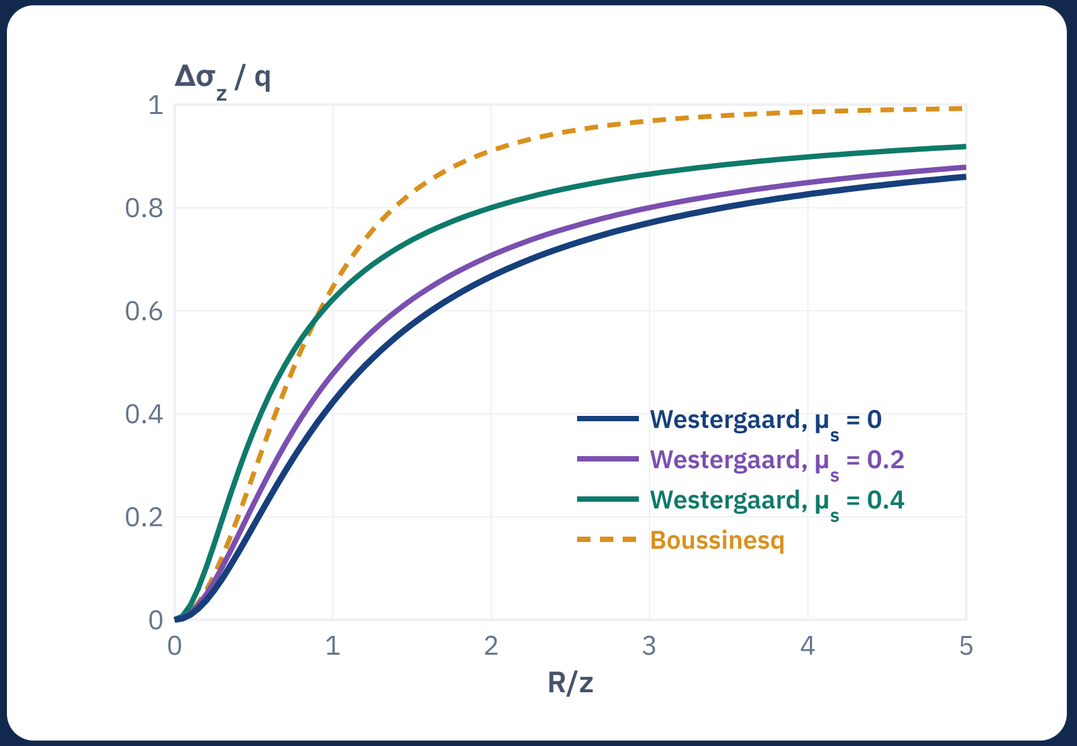
Apresentação de aula de geotecnia · Tensões no solo

# Westergaard: tensão sob uma carga em área

Aula: tensão sob um círculo e um retângulo uniformemente carregados em meio de Westergaard; o centro do círculo e o canto do retângulo são resolvidos à mão.

Meio de Westergaard | Centro do círculo | Canto do retângulo | Retângulos de canto | Superposição




Baseia-se na página de teoria do GeoTerva · geoterva.com

Introdução

# O que veremos nesta aula?

**Integração da solução de Westergaard para carga pontual sobre uma área carregada**: dois resultados em forma fechada

Sob o **centro do círculo**: $\Delta\sigma_z = q\,\{1 - \eta/[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}\}$

Sob o **canto do retângulo**: $\Delta\sigma_z = q\,I_w$; para os demais pontos, os **quatro retângulos de canto** com sinal

Comparação das tensões de Westergaard e de **Boussinesq**; efeito do coeficiente de Poisson $\boldsymbol{\mu_s}$

**Superposição** de várias áreas; variação com a profundidade

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: fórmula e justificativa

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Exemplo: área circular flexível, R = 4 m, q = 300 kN/m²; z = 4 m sob o centro; no solo entre as placas, $\mu_s = 0$.

# Áreas carregadas em um meio de Westergaard

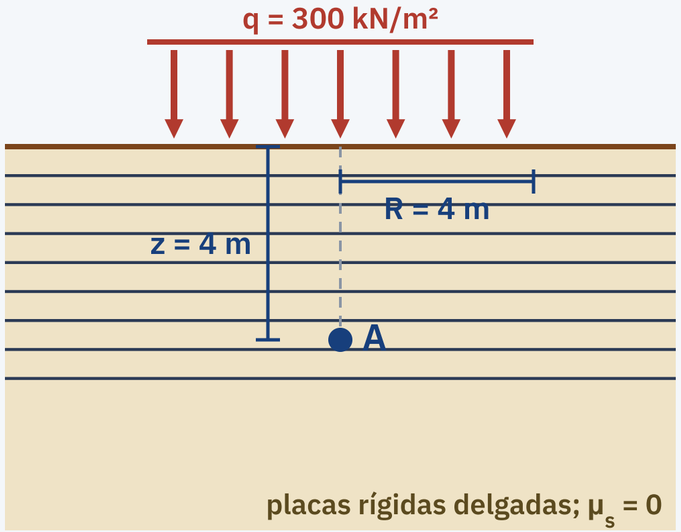
TEORIA

A solução de Westergaard para carga pontual pode ser **integrada sobre uma área carregada**, tal como se fez com a solução de Boussinesq para o círculo e o retângulo

Para uma área flexível carregada de modo uniforme, obtêm-se **dois resultados em forma fechada**: a tensão sob o **centro do círculo** e sob o **canto do retângulo**

**$\mu_s$** é o coeficiente de Poisson do solo entre camadas rígidas; para $\mu_s = 0$, $\eta = 1/\sqrt{2}$

$$\eta = \sqrt{\frac{1 - 2\mu_s}{2 - 2\mu_s}}$$



# Sob o centro

TEORIA

Sob o centro de um círculo flexível de raio **R**, com carga uniformemente distribuída:

$$\Delta\sigma_z = q\left\{1 - \frac{\eta}{\left[\eta^2 + (R/z)^2\right]^{1/2}}\right\}$$

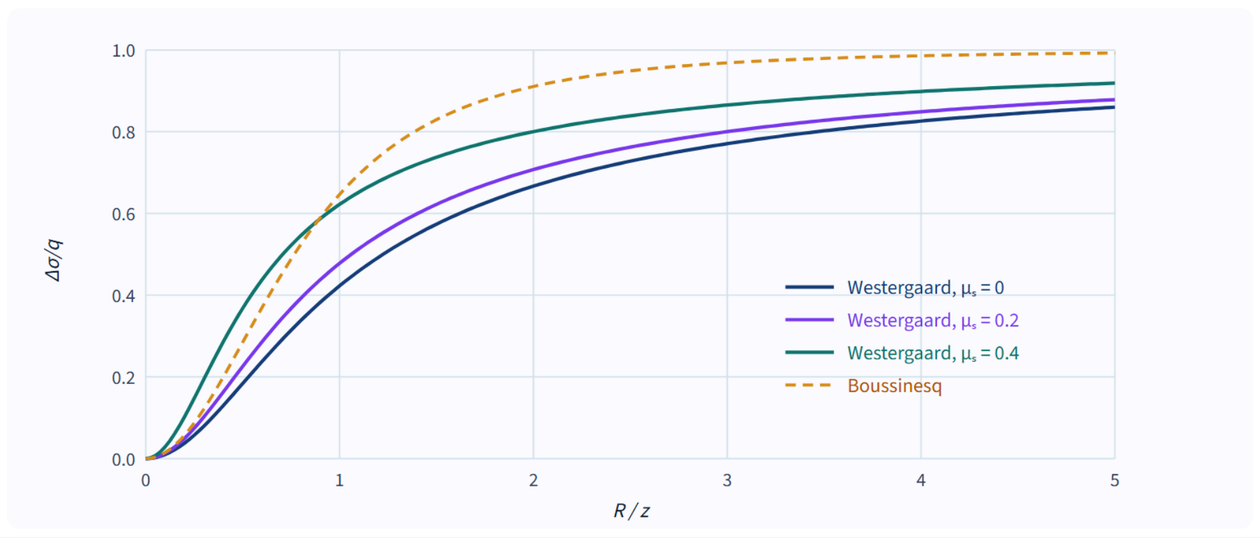
A relação é obtida a partir da solução da carga pontual: o elemento **r dr dα** suporta a carga **q r dr dα**; a integral em r, com o valor de influência $\mathbf{I_5}$ da carga pontual, é obtida com funções elementares

$$\Delta\sigma_z = q\int_0^R \frac{r\,dr}{\eta^2 z^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2} = q\left\{1 - \left[\left(\frac{R}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}\right\}$$

# Variação de $\Delta\sigma_z/q$ com R/z

TEORIA

| R/z | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1 | 1.25 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 4 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Westergaard ($\mu_s = 0$) | 0.0572 | 0.1835 | 0.3140 | 0.4226 | 0.5076 | 0.5736 | 0.6667 | 0.7278 | 0.7706 | 0.8259 | 0.8600 | 0.9295 |
| Boussinesq | 0.0869 | 0.2845 | 0.4880 | 0.6464 | 0.7562 | 0.8293 | 0.9106 | 0.9488 | 0.9684 | 0.9857 | 0.9925 | 0.9990 |



# Sob o canto: $I_w$

TEORIA

Sob o canto de um retângulo flexível de dimensões **B × L** com carga uniformemente distribuída, sendo **m = B/z** e **n = L/z**:

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{2\pi}\left[\cot^{-1}\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\eta^4\left(\frac{1}{m^2 n^2}\right)}\right] = q\,I_w$$

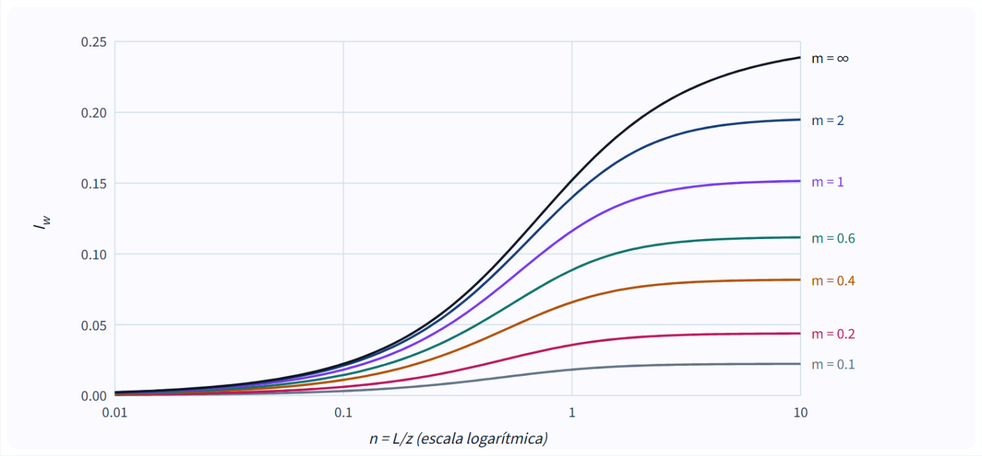
Para todos os demais pontos, como no retângulo de Boussinesq, usa-se um **retângulo de quatro cantos com sinal**; o módulo realiza essa operação

$$\Delta\sigma_z = q\,\left[\pm I_w(m_1,n_1) \pm I_w(m_2,n_2) \pm I_w(m_3,n_3) \pm I_w(m_4,n_4)\right]$$

# Valores de $I_w$ ($\mu_s = 0$)

TEORIA

| m | n = 0.1 | n = 0.4 | n = 1 | n = 2 | n = 5 | n = 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.0031 | 0.0110 | 0.0182 | 0.0211 | 0.0221 | 0.0223 |
| 0.2 | 0.0061 | 0.0214 | 0.0357 | 0.0413 | 0.0434 | 0.0438 |
| 0.5 | 0.0129 | 0.0459 | 0.0781 | 0.0916 | 0.0969 | 0.0977 |
| 1 | 0.0182 | 0.0658 | 0.1161 | 0.1398 | 0.1498 | 0.1515 |
| 2 | 0.0211 | 0.0768 | 0.1398 | 0.1743 | 0.1916 | 0.1948 |
| 10 | 0.0223 | 0.0817 | 0.1515 | 0.1948 | 0.2250 | 0.2341 |



# Integral polar para o círculo

TEORIA

Não existe relação em forma fechada para pontos fora do centro do círculo: o módulo integra a solução de Westergaard para carga pontual sobre o círculo, em relação ao ponto situado abaixo do ponto A, **em coordenadas polares**

Ao longo de cada raio, a integral radial é de forma fechada; apenas a integral angular é numérica. No centro (r = 0), este resultado reduz-se à expressão fechada acima

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\oint \left[G(\rho_1) - G(\rho_2)\right] d\varphi \qquad G(\rho) = \left[\left(\frac{\rho}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}$$

# Superposição

TEORIA

Podem ser inseridos círculos e retângulos, cada um definido por seu próprio valor de **q**, pelas suas dimensões e pelo seu centro sobre o terreno (no máximo oito); duas áreas podem se tocar, mas não podem se sobrepor

Como o meio de Westergaard é **elástico**, a tensão de cada área é obtida a partir da sua própria distância ao ponto A e as tensões são **somadas**; o valor de comparação de Boussinesq é somado da mesma forma

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_k \left\{ 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R_k/z)^2}} \right\} \text{ ou } q_k \sum \pm I_w$$

# Enunciado

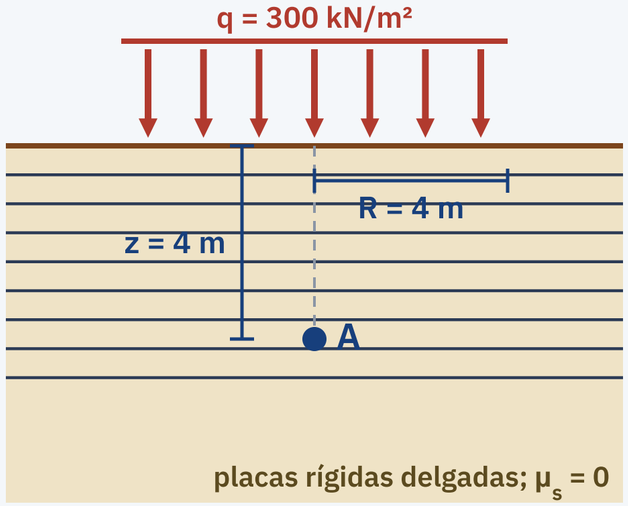
EXEMPLO

## Dados

| | |
|---|---|
| Carga | **área circular flexível, uniformemente carregada: $q = 300$ kN/m², $R = 4$ m** |
| Ponto A | **abaixo do centro do círculo, $z = 4$ m** |
| Solo | **entre placas $\mu_s = 0$** |

**PEDE-SE**

**η**, **R/z**, **$\Delta\sigma_z/q$**, **$\Delta\sigma_z$** e comparação com a tensão de Boussinesq.



# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

**1** Constante de Westergaard η

$$\eta = \sqrt{\frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \mathbf{0.7071} \qquad \eta^2 = 0.5000$$

**2** Razão e tensão

$$\frac{R}{z} = \frac{4}{4} = 1 \qquad \sqrt{\eta^2 + (R/z)^2} = \sqrt{0.5000 + 1} = 1.2247$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R/z)^2}} = 1 - \frac{0.7071}{1.2247} = \mathbf{0.4226}$$

$$\Delta\sigma_z = q\,\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 300\,(0.4226) = \mathbf{126.79}\ \mathrm{kN/m^2}$$

A tensão de Westergaard resulta em **126.79 kN/m²** (42.3% de q).

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

4 Boussinesq (comparação)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{1}{\left[(R/z)^2 + 1\right]^{3/2}} = 1 - \frac{1}{2^{3/2}} = \mathbf{0.6464}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 300\,(0.6464) = \mathbf{193.93}\ \mathrm{kN/m^2} \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = \frac{126.79}{193.93} = 0.654$$

Westergaard **126.79 kN/m²**, Boussinesq **193.93 kN/m²**: como as lâminas rígidas espalham a carga lateralmente, a tensão de Westergaard sob o centro corresponde a apenas **65.4%** da de Boussinesq.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Enunciado

EXEMPLO

**Dados**

| | |
|---|---|
| Carga | **círculo** $R = 4$ **m,** $q = 300$ **kN/m²,** $\mu_s = 0$ |
| Profundidades | $z = 0.4;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12$ **m (**$z/R = 0.1 \ldots 3$**)** |

**PEDE-SE**

Em cada profundidade, **$\Delta\sigma_z/q$**, tensões de Westergaard e de Boussinesq; verificação à mão para z = 2 m e 12 m.

# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

| z (m) | z/R | R/z | $\Delta\sigma_z/q$ | $\Delta\sigma_z$ Westergaard | $\Delta\sigma_z$ Boussinesq | Razão W/B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.4 | 0.1 | 10.00 | 0.9295 | **278.84** | 299.70 | 0.930 |
| 2 | 0.5 | 2.00 | 0.6667 | **200.00** | 273.17 | 0.732 |
| 4 | 1.0 | 1.00 | 0.4226 | **126.79** | 193.93 | 0.654 |
| 6 | 1.5 | 0.67 | 0.2724 | **81.72** | 127.19 | 0.642 |
| 8 | 2.0 | 0.50 | 0.1835 | **55.05** | 85.34 | 0.645 |
| 10 | 2.5 | 0.40 | 0.1296 | **38.88** | 59.88 | 0.649 |
| 12 | 3.0 | 0.33 | 0.0955 | **28.64** | 43.86 | 0.653 |

A tensão de Westergaard é menor que a de Boussinesq em todas as profundidades (z = 4 m: 126.79 e 193.93 kN/m²; z = 12 m: 28.64 e 43.86 kN/m²). A razão começa em 0.930 perto da superfície, vale 0.654 em z = 4 m e permanece em torno de 0.65 em profundidade.

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

**1** z = 2 m (R/z = 2)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.7071}{\sqrt{0.5000 + 4}} = 1 - \frac{0.7071}{2.1213} = \mathbf{0.6667}$$

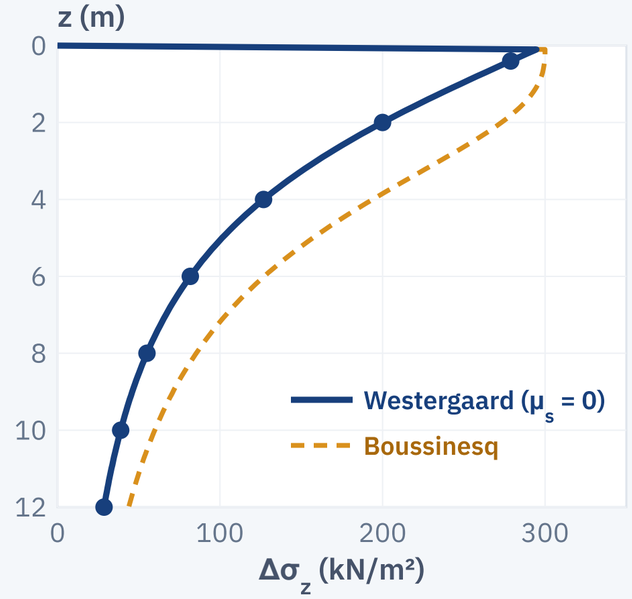
$$\Delta\sigma_z = 300\,(0.6667) = \mathbf{200.00}\ \mathrm{kN/m^2}$$

**2** z = 12 m (R/z = 1/3)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.7071}{\sqrt{0.5000 + 0.1111}} = 1 - \frac{0.7071}{0.7817} = \mathbf{0.0955}$$

$$\Delta\sigma_z = 300\,(0.0955) = \mathbf{28.64}\ \mathrm{kN/m^2}$$

Em z = 2 m, a tensão é exatamente **2q/3 = 200.00 kN/m²** (Boussinesq: 273.17); em z = 12 m, é de **28.64 kN/m²** (Boussinesq: 43.86).




Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Enunciado

EXEMPLO

**Dados**

| | |
|---|---|
| Carga e ponto | **círculo $R = 4$ m, $q = 300$ kN/m², sob o centro $z = 4$ m** |
| Variável | $\mu_s = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.49$ |

**PEDE-SE**

Para cada $\mu_s$, **η**, **$\Delta\sigma_z/q$**, **$\Delta\sigma_z$** e a razão em relação a Boussinesq; manualmente para $\mu_s$ = 0.2 e 0.4.

# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

| $\mu_s$ | $\eta$ | $\Delta\sigma_z/q$ | $\Delta\sigma_z$ Westergaard | $\Delta\sigma_z$ / Boussinesq |
|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.7071 | 0.4226 | **126.79** | 0.654 |
| 0.10 | 0.6667 | 0.4453 | **133.59** | 0.689 |
| 0.20 | 0.6124 | 0.4778 | **143.33** | 0.739 |
| 0.30 | 0.5345 | 0.5286 | **158.58** | 0.818 |
| 0.40 | 0.4082 | 0.6220 | **186.61** | 0.962 |
| 0.49 | 0.1400 | 0.8613 | **258.40** | 1.332 |

À medida que $\mu_s$ aumenta, a tensão de Westergaard sob o centro **aumenta**: 126.79 em $\mu_s$ = 0, 186.61 kN/m² em $\mu_s$ = 0.4 (Boussinesq: 193.93). Em $\mu_s$ = 0.49, com 258.40 kN/m², ela **supera** o valor de Boussinesq.

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

**1** $\mu_s = 0.2$

$$\eta^2 = \frac{1 - 0.4}{2 - 0.4} = 0.3750\,, \quad \eta = 0.6124\,, \quad \sqrt{\eta^2 + 1} = 1.1726$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.6124}{1.1726} = 0.4778 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = 300\,(0.4778) = \mathbf{143.33}\ \mathrm{kN/m^2}$$

**2** $\mu_s = 0.4$

$$\eta^2 = \frac{1 - 0.8}{2 - 0.8} = 0.1667\,, \quad \eta = 0.4082\,, \quad \sqrt{\eta^2 + 1} = 1.0801$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.4082}{1.0801} = 0.6220 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = 300\,(0.6220) = \mathbf{186.61}\ \mathrm{kN/m^2}$$

À medida que η diminui, a tensão aumenta: **143.33 → 186.61 kN/m²** ($\mu_s = 0.2 \rightarrow 0.4$).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Enunciado

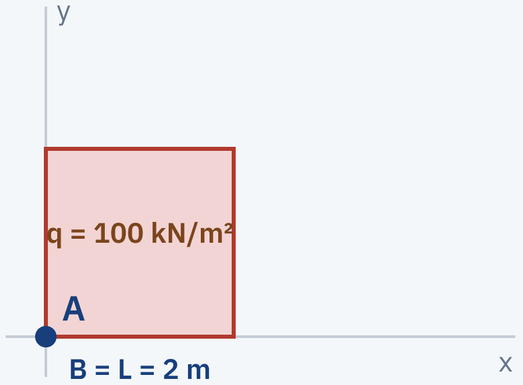
EXEMPLO

## Dados

| | |
|---|---|
| Carga | **quadrado flexível, com carga uniformemente distribuída:** $B = L = 2$ **m,** $q = 100$ **kN/m²** |
| Ponto A | **abaixo de um canto do quadrado,** $z = 2$ **m** |
| Solo | **entre placas** $\mu_s = 0$ |

**PEDE-SE**

**m**, **n**, $\mathbf{I_W}$, $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; comparação com o valor de Boussinesq; efeito de $\mu_s$.



# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

**1** m, n e η

$$m = \frac{B}{z} = \frac{2}{2} = 1\,, \quad n = \frac{L}{z} = 1\,, \quad \eta^2 = \frac{1}{2} = 0.5000$$

**2** Valor de influência $I_w$

$$\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{\eta^4}{m^2 n^2}} = \sqrt{0.5\,(2) + 0.25} = \sqrt{1.25} = 1.1180$$

$$I_w = \frac{1}{2\pi}\cot^{-1}(1.1180) = \frac{0.7297}{2\pi} = \mathbf{0.1161}$$

Sob o canto do quadrado, em z = 2 m, obtém-se **$I_w$ = 0.1161** (valor da tabela na página: $I_w(1; 1) = 0.1161$).

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

**3** Tensão e Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = q\, I_w = 100\,(0.1161) = \mathbf{11.61}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\text{Boussinesq: } I_3(1;1) = 0.1752 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z,B} = \mathbf{17.52}\ \mathrm{kN/m^2}$$

| $\mu_s$ | $\eta$ | $I_w$ (m = n = 1) | $\Delta\sigma_z = q\, I_w$ (kN/m²) | Boussinesq $I_3$ | $\Delta\sigma_{z,B}$ (kN/m²) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.7071 | 0.1161 | **11.61** | 0.1752 | 17.52 |
| 0.2 | 0.6124 | 0.1296 | **12.96** | 0.1752 | 17.52 |
| 0.3 | 0.5345 | 0.1418 | **14.18** | 0.1752 | 17.52 |
| 0.4 | 0.4082 | 0.1639 | **16.39** | 0.1752 | 17.52 |

Sob o canto do quadrado, a tensão de Westergaard é **11.61 kN/m²** e a de Boussinesq é 17.52 kN/m² (razão 0.663). À medida que $\mu_s$ aumenta, $I_w$ cresce: 0.1161 → 0.1639 ($\mu_s$ = 0 → 0.4); o valor de Boussinesq é $I_3$ = 0.1752.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Enunciado

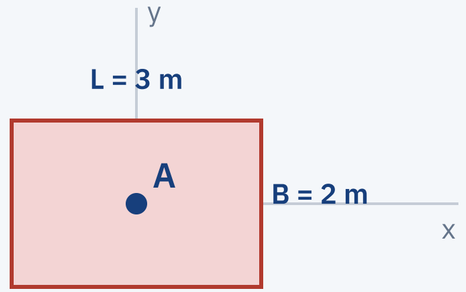
EXEMPLO

**Dados**

| | |
|---|---|
| Carga | **retângulo flexível: $L = 3$ m (direção $x$), $B = 2$ m, $q = 300$ kN/m²** |
| Ponto A | **sob o centro, $z = 4$ m; $\mu_s = 0$** |
| Dica | **o centro é o canto comum de quatro retângulos iguais** |

**PEDE-SE**

**$\Delta\sigma_z$** pelo retângulo de quatro cantos e valor de Boussinesq; tabela da variação com a profundidade.



# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

**1** Quatro retângulos de canto iguais (1.5 m × 1.0 m)

$$m = \frac{1.0}{4} = 0.2500\,, \quad n = \frac{1.5}{4} = 0.3750\,, \quad \eta^2 = 0.5000$$

**2** $I_W$ (para cada retângulo de canto)

$$\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\eta^4}{m^2n^2}} = \sqrt{0.5\,(23.1111)+28.4444} = \sqrt{40} = 6.3246$$

$$I_w = \frac{1}{2\pi}\cot^{-1}(6.3246) = \frac{0.15682}{2\pi} = \mathbf{0.02496}$$

Para cada retângulo de canto obtém-se **$I_W$ = 0.02496**; o centro é o canto comum dos quatro retângulos de canto iguais.

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

**3** Tensão (4 retângulos de canto) e Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = 4\,q\,I_w = 4\,(300)\,(0.02496) = \mathbf{29.95}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 4\,q\,I_3(0.25;0.375) = 4\,(300)\,(0.03830) = 45.96\ \mathrm{kN/m^2}$$

**4** Mesmo método em cada profundidade (m = 1.0/z, n = 1.5/z)

| z (m) | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta\sigma_z$ Westergaard (kN/m²) | **158.69** | **82.80** | **29.95** | **14.62** | **8.52** | **3.89** |
| $\Delta\sigma_z$ Boussinesq (kN/m²) | 232.37 | 128.49 | 45.96 | 22.21 | 12.88 | 5.86 |
| Razão W/B | 0.683 | 0.644 | 0.652 | 0.658 | 0.662 | 0.664 |

A tensão de Westergaard é menor que a de Boussinesq em todas as profundidades: 158.69 e 232.37 kN/m² em z = 1 m; 3.89 e 5.86 kN/m² em z = 12 m. A razão permanece entre 0.644 e 0.683 no intervalo z = 1–12 m.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Enunciado

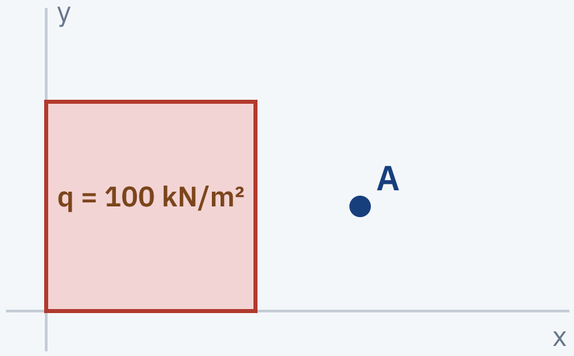
EXEMPLO

**Dados**

| | |
|---|---|
| Carga | **quadrado flexível** $[0;\,2]\times[0;\,2]$ **m,** $q = 100$ **kN/m²** |
| Ponto A | $x = 3$ **m,** $y = 1$ **m (1 m fora da borda),** $z = 2$ **m** |
| Solo | **entre placas** $\mu_s = 0$ |

**PEDE-SE**

Com o **retângulo de quatro cantos** indicado, **$\Delta\sigma_z$**; comparação com o valor de Boussinesq.



# Solução

SOLUÇÃO

**1** Distâncias de A aos cantos a = $x_{corner} - x_A$, b = $y_{corner} - y_A$; quatro retângulos de canto

| Retângulo de canto | (a ; b) (m) | m = \|a\|/z | n = \|b\|/z | $I_w$ | Sinal |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (−1 ; 1) | 0.50 | 0.50 | 0.05409 | − |
| 2 | (−3 ; 1) | 1.50 | 0.50 | 0.08745 | + |
| 3 | (−1 ; −1) | 0.50 | 0.50 | 0.05409 | − |
| 4 | (−3 ; −1) | 1.50 | 0.50 | 0.08745 | + |

**2** Total

$$\Delta\sigma_z = q\,[-I_w(0.5;0.5) + I_w(1.5;0.5) - I_w(0.5;0.5) + I_w(1.5;0.5)]$$

$$= 2q\,[0.08745 - 0.05409] = 200\,(0.03336) = \mathbf{6.673}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 9.466\ \mathrm{kN/m^2}$$

Embora o ponto A esteja fora da carga, ele recebe uma tensão de **6.67 kN/m²**; o valor de Boussinesq é 9.47 kN/m². A única operação é subtrair dois retângulos de 1 m × 1 m dos dois retângulos de 3 m × 1 m.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Enunciado

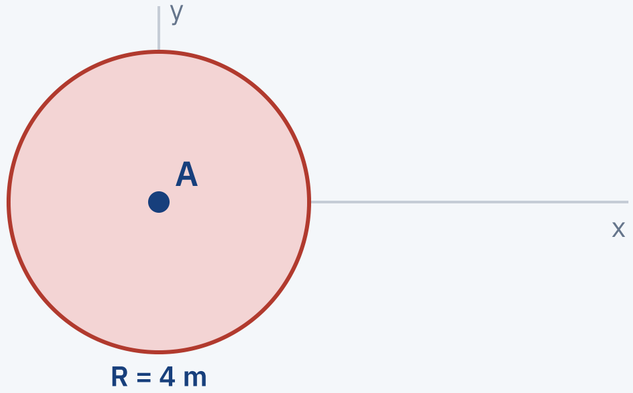
EXEMPLO

**Dados**

| | |
|---|---|
| Carga | **círculo** $R = 4$ **m,** $q = 300$ **kN/m²;** $\mu_s = 0$**,** $z = 4$ **m** |
| Ponto A | **distância horizontal ao centro** $r = 0;\ 0.5R;\ R;\ 1.5R;\ 2R;\ 3R$ |

**PEDE-SE**

Tensões de Westergaard e de Boussinesq em cada distância (integral polar do módulo).



# Solução

SOLUÇÃO

| r (m) | r/R | $\Delta\sigma_z$ Westergaard | $\Delta\sigma_z$ Boussinesq | Razão W/B |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0 | **126.79** | 193.93 | 0.654 |
| 2 | 0.5 | **111.97** | 168.67 | 0.664 |
| 4 | 1.0 | **69.51** | 99.67 | 0.697 |
| 6 | 1.5 | **30.71** | 37.99 | 0.808 |
| 8 | 2.0 | **13.75** | 12.54 | 1.096 |
| 12 | 3.0 | **4.05** | 1.87 | 2.163 |

No centro (r = 0), a expressão em forma fechada resulta em 126.79 kN/m². Na borda do círculo (r = R), 69.51 kN/m² (Boussinesq: 99.67); à medida que se sai do círculo, a tensão de Westergaard diminui mais lentamente e **entre r = 1.5R e 2R** passa a superar a de Boussinesq (r = 12 m: 4.05 e 1.87 kN/m²).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

# Enunciado

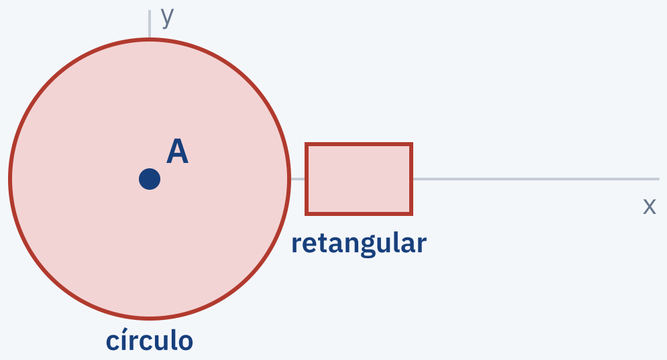
EXEMPLO

**Dados**

| | |
|---|---|
| Área 1 | **círculo $R = 4$ m, $q = 300$ kN/m², centro $(0;\ 0)$** |
| Área 2 | **retângulo $3 \times 2$ m (3 m na direção $x$), $q = 300$ kN/m², centro $(6;\ 0)$** |
| Ponto A | **$x = 0$, $y = 0$, $z = 4$ m; $\mu_s = 0$ (as áreas não se sobrepõem)** |

**PEDE-SE**

Contribuição de cada área, tensão total e soma de Boussinesq; tabela de profundidades.



# Solução (1/2)

SOLUÇÃO

**1** Área 1 (círculo, sob o centro)

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 300\left\{1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R/z)^2}}\right\} = 300\,(0.4226) = \mathbf{126.79}\ \mathrm{kN/m^2} \quad \text{(Exemplo 1)}$$

**2** Área 2 (retângulo; x = 4.5 e 7.5 m a partir de A, y = ±1 m)

$$\Delta\sigma_{z(2)} = q\left[I_w\left(\tfrac{7.5}{4};\tfrac{1}{4}\right) - I_w\left(\tfrac{4.5}{4};\tfrac{1}{4}\right)\right] \times 2 = 600\,[0.05048 - 0.04553]$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = 600\,(0.00495) = \mathbf{2.97}\ \mathrm{kN/m^2} \qquad \Delta\sigma_{z(2),B} = 3.18$$

Como o retângulo A está distante do ponto, sua contribuição é pequena: **2.97 kN/m²** (Boussinesq: 3.18). A contribuição do círculo é de 126.79 kN/m².

# Solução (2/2)

SOLUÇÃO

**1** As tensões são somadas (z = 4 m)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 126.79 + 2.97 = \mathbf{129.76}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 193.93 + 3.18 = 197.11\ \mathrm{kN/m^2}$$

**2** Perfil de profundidade abaixo do mesmo ponto

| z (m) | 2 | 4 | 6 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| Área 1 (círculo) | 200.00 | 126.79 | 81.72 | 55.05 | 28.64 |
| Área 2 (retangular) | 1.91 | 2.97 | 3.18 | 2.95 | 2.17 |
| Westergaard total | **201.91** | **129.76** | **84.90** | **58.00** | **30.81** |
| Boussinesq total | 274.02 | 197.11 | 131.63 | 89.82 | 47.27 |

No ponto A, as duas áreas produzem em conjunto **129.76 kN/m²** (total de Boussinesq: 197.11 kN/m²). A parcela da área lateral aumenta com a profundidade: em z = 12 m, corresponde a cerca de 7.0% do total.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Resumo

# Pontos-chave

**Círculo, centro**: $\Delta\sigma_z = q\,\{1 - \eta/[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}\}$, $\eta = \sqrt{[(1 - 2\mu_s)/(2 - 2\mu_s)]}$; **retângulo, canto**: $\Delta\sigma_z = q\,I_w$, $I_w = (1/2\pi)\,\cot^{-1}\sqrt{[\eta^2(1/m^2 + 1/n^2) + \eta^4/(m^2n^2)]}$

**Exemplo (R = 4 m, q = 300, z = 4 m, $\mu_s$ = 0)**: $\eta = 0.7071$; $\Delta\sigma_z/q = 0.4226 \rightarrow$ **$\Delta\sigma_z$ = 126.79 kN/m²**; Boussinesq 193.93 kN/m²

**Retangular**: no canto (2 m × 2 m, z = 2 m) $I_w = 0.1161$; no centro, quatro retângulos de canto iguais (3 × 2 m, z = 4 m: 29.95 kN/m²); no ponto externo, quatro retângulos de canto **com sinal** (6.67 kN/m²)

À medida que **$\mu_s$** aumenta, a tensão sob o centro aumenta (0 → 0.4: 126.79 → 186.61 kN/m²); em $\mu_s = 0$, a tensão de Westergaard sob a carga é cerca de 65% da de Boussinesq, e longe da carga essa ordem se inverte

**Superposição**: cada área é tratada com sua própria distância e as tensões são somadas (círculo + retângulo: 129.76 kN/m²)

# Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1938). A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics: soft material reinforced by numerous strong horizontal sheets. In Contributions to the Mechanics of Solids, Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume. Macmillan, New York, 268–277.

**NOTA**

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o próprio motor de cálculo do módulo; o módulo fornece os mesmos valores. Exemplo inicial do módulo: círculo R = 4 m, q = 300 kN/m², $\mu_s$ = 0, a z = 4 m sob o centro.

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

# Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva os próprios círculos e retângulos, o ponto A e o valor de $\mu_s$; o módulo fornece em conjunto η, os valores de $I_W$, os retângulos de canto, a comparação com Boussinesq, o perfil em profundidade, a solução passo a passo e o relatório.

**Abrir o módulo →** | **Página de teoria →**

**Abrir no celular**
Os módulos de teste não exigem cadastro.