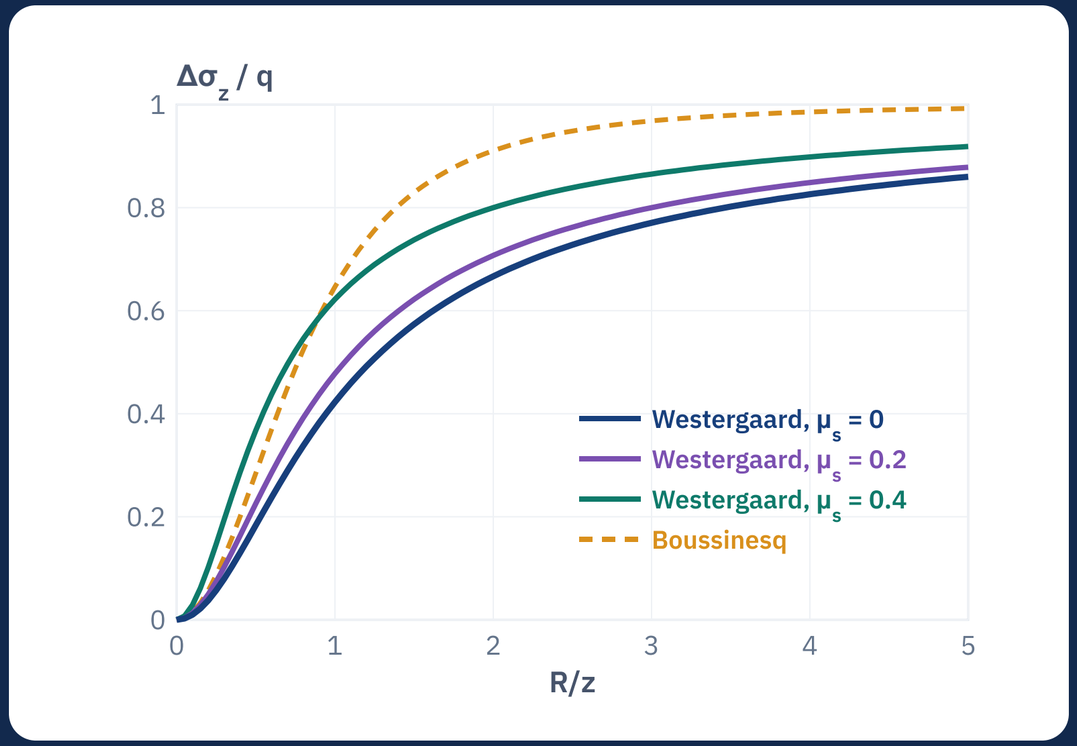
Presentazione della lezione di geotecnica · Tensioni nel mezzo terreno

# Westergaard: tensione sotto un carico areale

Lezione: tensione sotto un carico uniformemente distribuito su area circolare e rettangolare in un mezzo di Westergaard; il centro del cerchio e lo spigolo del rettangolo sono risolti manualmente.

- Mezzo di Westergaard
- Centro del cerchio
- Vertice del rettangolo
- Rettangoli ai vertici
- Sovrapposizione



Introduzione

# Che cosa si impara in questa lezione?

**Integrazione della soluzione di Westergaard per carico concentrato su un'area caricata**: due risultati in forma chiusa

Sotto il **centro del cerchio**: $\Delta\sigma_z = q\,\{1 - \eta/[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}\}$

Sotto **lo spigolo del rettangolo**: $\Delta\sigma_z = q\,I_W$; per gli altri punti, il **rettangolo dei quattro spigoli** con segno

Confronto tra le tensioni di Westergaard e di **Boussinesq**; effetto del coefficiente di Poisson $\boldsymbol{\mu_s}$

**Sovrapposizione** di più aree; variazione con la profondità

SVOLGIMENTO DELLA LEZIONE

Ogni argomento è trattato in **tre passaggi**:

1 · **Teoria**: formula e relativa motivazione

2 · **Traccia**: dati e richiesto

3 · **Soluzione**: passo per passo, con i numeri

Esempio: area circolare flessibile, R = 4 m, q = 300 kN/m²; a z = 4 m sotto il centro; nel terreno tra le piastre $\mu_s = 0$.

# Aree caricate in un mezzo di Westergaard

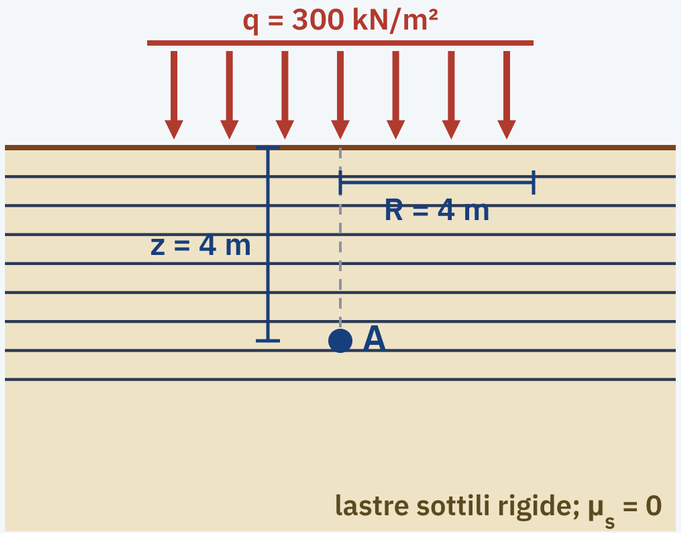
TEORIA

La soluzione di Westergaard per il carico concentrato può essere **integrata su un'area caricata**, così come la soluzione di Boussinesq è stata estesa al cerchio e al rettangolo

Per un'area flessibile con carico uniformemente distribuito si ottengono **due soluzioni in forma chiusa**: la tensione sotto il **centro del cerchio** e quella sotto lo **spigolo del rettangolo**

**$\mu_s$** è il coefficiente di Poisson del terreno compreso tra gli strati rigidi; per $\mu_s = 0$ si ha $\eta = 1/\sqrt{2}$

$$\eta = \sqrt{\frac{1 - 2\mu_s}{2 - 2\mu_s}}$$



# Sotto il centro

TEORIA

Sotto il centro di un'area circolare flessibile di raggio **R** con carico uniformemente distribuito:

$$\Delta\sigma_z = q\left\{1 - \frac{\eta}{\left[\eta^2 + (R/z)^2\right]^{1/2}}\right\}$$

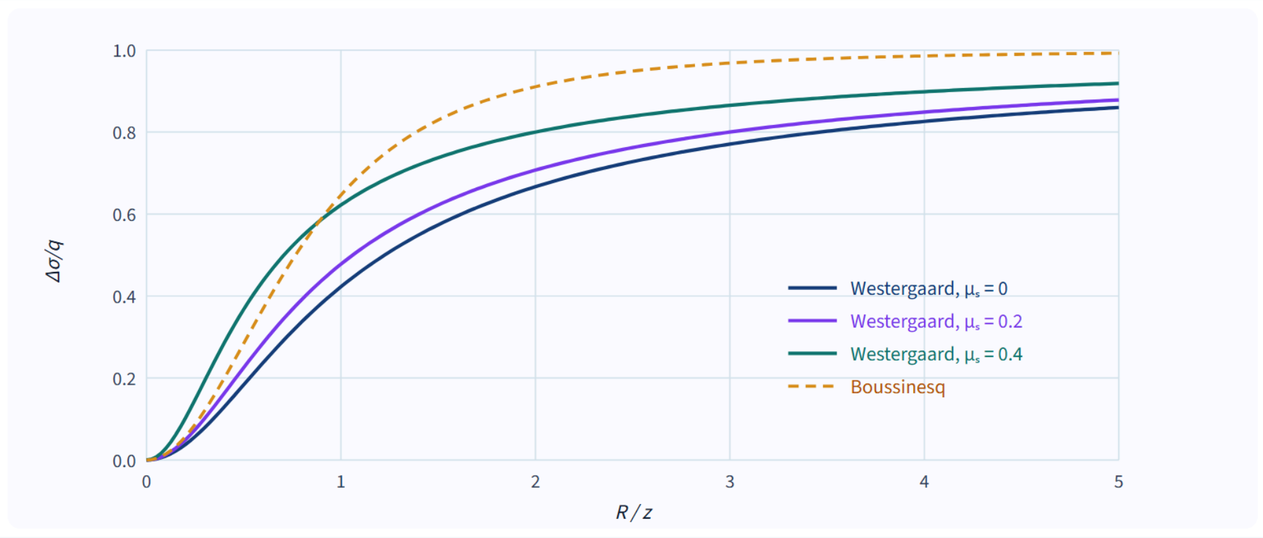
La relazione si ottiene dalla soluzione del carico concentrato: l'elemento **r dr dα** porta il carico **q r dr dα**; l'integrale su r con il valore di influenza $\mathbf{I_5}$ del carico concentrato si esprime mediante funzioni elementari

$$\Delta\sigma_z = q\int_0^R \frac{r\,dr}{\eta^2 z^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2} = q\left\{1 - \left[\left(\frac{R}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}\right\}$$

# Variazione di $\Delta\sigma_z/q$ in funzione di R/z

TEORIA

| R/z | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1 | 1.25 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 4 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Westergaard ($\mu_s = 0$) | 0.0572 | 0.1835 | 0.3140 | 0.4226 | 0.5076 | 0.5736 | 0.6667 | 0.7278 | 0.7706 | 0.8259 | 0.8600 | 0.9295 |
| Boussinesq | 0.0869 | 0.2845 | 0.4880 | 0.6464 | 0.7562 | 0.8293 | 0.9106 | 0.9488 | 0.9684 | 0.9857 | 0.9925 | 0.9990 |



# Sotto lo spigolo: $I_w$

TEORIA

Sotto lo spigolo di un rettangolo flessibile di dimensioni **B × L** con carico uniformemente distribuito, essendo **m = B/z** e **n = L/z**:

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{2\pi}\left[\cot^{-1}\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\eta^4\left(\frac{1}{m^2 n^2}\right)}\right] = q\,I_w$$

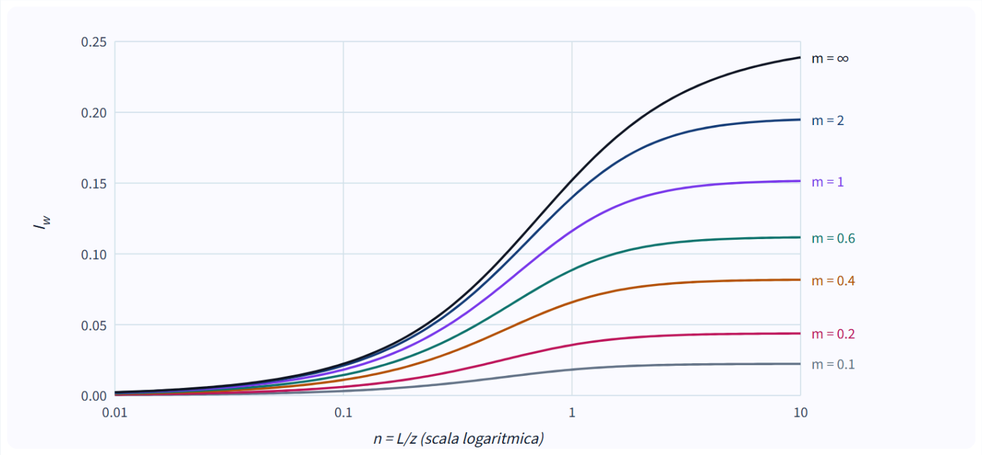
Per tutti gli altri punti, come nel rettangolo di Boussinesq, si utilizza un **rettangolo a quattro angoli con segno**; il modulo esegue questa operazione

$$\Delta\sigma_z = q\,\left[\pm I_w(m_1,n_1) \pm I_w(m_2,n_2) \pm I_w(m_3,n_3) \pm I_w(m_4,n_4)\right]$$

# Valori di $I_w$ ($\mu_s = 0$)

TEORIA

| m | n = 0.1 | n = 0.4 | n = 1 | n = 2 | n = 5 | n = 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.0031 | 0.0110 | 0.0182 | 0.0211 | 0.0221 | 0.0223 |
| 0.2 | 0.0061 | 0.0214 | 0.0357 | 0.0413 | 0.0434 | 0.0438 |
| 0.5 | 0.0129 | 0.0459 | 0.0781 | 0.0916 | 0.0969 | 0.0977 |
| 1 | 0.0182 | 0.0658 | 0.1161 | 0.1398 | 0.1498 | 0.1515 |
| 2 | 0.0211 | 0.0768 | 0.1398 | 0.1743 | 0.1916 | 0.1948 |
| 10 | 0.0223 | 0.0817 | 0.1515 | 0.1948 | 0.2250 | 0.2341 |



# Integrale polare per il cerchio

TEORIA

Per i punti esterni al centro del cerchio non esiste una relazione in forma chiusa: il modulo integra la soluzione di Westergaard per carico concentrato sul cerchio **in coordinate polari** rispetto al punto sottostante il punto A

Lungo ogni raggio l'integrale radiale è in forma chiusa; solo l'integrale angolare è numerico. Al centro (r = 0) questo risultato si riduce all'espressione in forma chiusa sopra riportata

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\oint \left[G(\rho_1) - G(\rho_2)\right] d\varphi \qquad G(\rho) = \left[\left(\frac{\rho}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}$$

# Sovrapposizione

TEORIA

Si possono inserire cerchi e rettangoli, ciascuno definito dal proprio valore di **q**, dalle dimensioni e dal centro sul terreno (al massimo otto); le due aree possono toccarsi ma non sovrapporsi

Poiché il mezzo di Westergaard è **elastico**, la tensione di ciascuna area si determina dalla propria distanza dal punto A e le tensioni si **sommano**; anche il valore di confronto di Boussinesq si somma allo stesso modo

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_k \left\{ 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R_k/z)^2}} \right\} \text{ oppure } \; q_k \sum \pm I_w$$

# Traccia

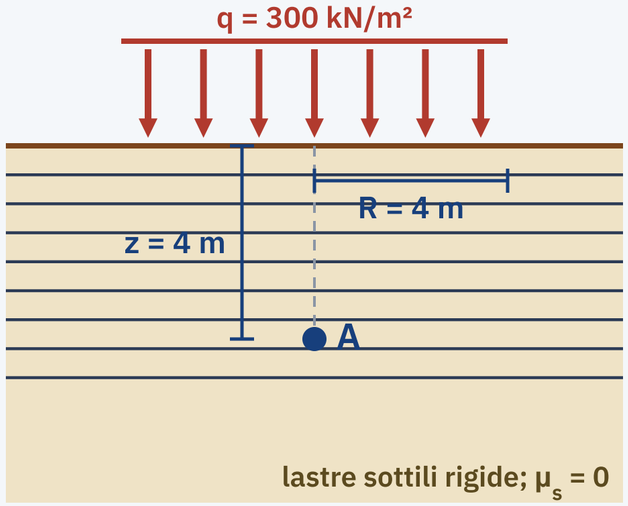
ESEMPIO

**Dati**

| | |
|---|---|
| Carico | **area circolare flessibile, uniformemente distribuita: $q = 300$ kN/m², $R = 4$ m** |
| Punto A | **sotto il centro del cerchio, $z = 4$ m** |
| Terreno | **tra le piastre $\mu_s = 0$** |

**RICHIESTO**

**η**, **R/z**, **$\Delta\sigma_z/q$**, **$\Delta\sigma_z$** e confronto con la tensione di Boussinesq.



# Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

**1** Costante di Westergaard η

$$\eta = \sqrt{\frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \mathbf{0.7071} \qquad \eta^2 = 0.5000$$

**2** Rapporto e tensione

$$\frac{R}{z} = \frac{4}{4} = 1 \qquad \sqrt{\eta^2 + (R/z)^2} = \sqrt{0.5000 + 1} = 1.2247$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R/z)^2}} = 1 - \frac{0.7071}{1.2247} = \mathbf{0.4226}$$

$$\Delta\sigma_z = q\,\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 300\,(0.4226) = \mathbf{126.79}\ \mathrm{kN/m^2}$$

La tensione di Westergaard risulta pari a **126.79 kN/m²** (42.3% di q).

# Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

4 Boussinesq (confronto)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{1}{\left[(R/z)^2 + 1\right]^{3/2}} = 1 - \frac{1}{2^{3/2}} = \mathbf{0.6464}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 300\,(0.6464) = \mathbf{193.93}\ \mathrm{kN/m^2} \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = \frac{126.79}{193.93} = 0.654$$

Westergaard **126.79 kN/m²**, Boussinesq **193.93 kN/m²**: poiché le piastre rigide diffondono il carico lateralmente, la tensione di Westergaard al centro è solo il **65.4%** di quella di Boussinesq.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

# Traccia

ESEMPIO

**Dati**

| | |
|---|---|
| Carico | **cerchio** $R = 4$ **m,** $q = 300$ **kN/m²,** $\mu_s = 0$ |
| Profondità | $z = 0.4;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12$ **m (**$z/R = 0.1 \ldots 3$**)** |

**RICHIESTO**

A ogni profondità **$\Delta\sigma_z/q$**, tensioni secondo Westergaard e Boussinesq; verifica manuale per z = 2 m e 12 m.

# Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

| z (m) | z/R | R/z | $\Delta\sigma_z/q$ | $\Delta\sigma_z$ Westergaard | $\Delta\sigma_z$ Boussinesq | Rapporto W/B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.4 | 0.1 | 10.00 | 0.9295 | **278.84** | 299.70 | 0.930 |
| 2 | 0.5 | 2.00 | 0.6667 | **200.00** | 273.17 | 0.732 |
| 4 | 1.0 | 1.00 | 0.4226 | **126.79** | 193.93 | 0.654 |
| 6 | 1.5 | 0.67 | 0.2724 | **81.72** | 127.19 | 0.642 |
| 8 | 2.0 | 0.50 | 0.1835 | **55.05** | 85.34 | 0.645 |
| 10 | 2.5 | 0.40 | 0.1296 | **38.88** | 59.88 | 0.649 |
| 12 | 3.0 | 0.33 | 0.0955 | **28.64** | 43.86 | 0.653 |

La tensione di Westergaard è minore di quella di Boussinesq a ogni profondità (z = 4 m: 126.79 e 193.93 kN/m²; z = 12 m: 28.64 e 43.86 kN/m²). Il rapporto parte da 0.930 in prossimità della superficie, diventa 0.654 a z = 4 m e si mantiene intorno a 0.65 in profondità.

# Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

**1** z = 2 m (R/z = 2)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.7071}{\sqrt{0.5000 + 4}} = 1 - \frac{0.7071}{2.1213} = \mathbf{0.6667}$$

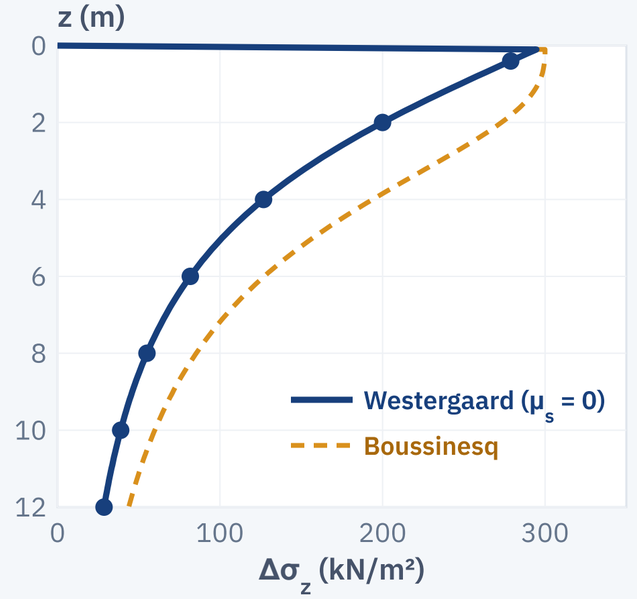
$$\Delta\sigma_z = 300\,(0.6667) = \mathbf{200.00}\ \mathrm{kN/m^2}$$

**2** z = 12 m (R/z = 1/3)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.7071}{\sqrt{0.5000 + 0.1111}} = 1 - \frac{0.7071}{0.7817} = \mathbf{0.0955}$$

$$\Delta\sigma_z = 300\,(0.0955) = \mathbf{28.64}\ \mathrm{kN/m^2}$$

A z = 2 m la tensione è esattamente **2q/3 = 200.00 kN/m²** (Boussinesq: 273.17); a z = 12 m è **28.64 kN/m²** (Boussinesq: 43.86).




Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

# Traccia

ESEMPIO

**Dati**

| | |
|---|---|
| Carico e punto | **cerchio $R = 4$ m, $q = 300$ kN/m², sotto il centro $z = 4$ m** |
| Variabile | $\mu_s = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.49$ |

**RICHIESTO**

Per ciascun $\mu_s$, **η**, **$\Delta\sigma_z/q$**, **$\Delta\sigma_z$** e il rapporto rispetto a Boussinesq; a mano per $\mu_s$ = 0.2 e 0.4.

# Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

| $\mu_s$ | $\eta$ | $\Delta\sigma_z/q$ | $\Delta\sigma_z$ Westergaard | $\Delta\sigma_z$ / Boussinesq |
|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.7071 | 0.4226 | **126.79** | 0.654 |
| 0.10 | 0.6667 | 0.4453 | **133.59** | 0.689 |
| 0.20 | 0.6124 | 0.4778 | **143.33** | 0.739 |
| 0.30 | 0.5345 | 0.5286 | **158.58** | 0.818 |
| 0.40 | 0.4082 | 0.6220 | **186.61** | 0.962 |
| 0.49 | 0.1400 | 0.8613 | **258.40** | 1.332 |

Al crescere di $\mu_s$ la tensione di Westergaard sotto il centro **aumenta**: 126.79 con $\mu_s = 0$, 186.61 kN/m² con $\mu_s = 0.4$ (Boussinesq: 193.93). Con $\mu_s = 0.49$ raggiunge 258.40 kN/m² e **supera** il valore di Boussinesq.

# Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

**1** $\mu_s = 0.2$

$$\eta^2 = \frac{1 - 0.4}{2 - 0.4} = 0.3750\,, \quad \eta = 0.6124\,, \quad \sqrt{\eta^2 + 1} = 1.1726$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.6124}{1.1726} = 0.4778 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = 300\,(0.4778) = \mathbf{143.33}\ \mathrm{kN/m^2}$$

**2** $\mu_s = 0.4$

$$\eta^2 = \frac{1 - 0.8}{2 - 0.8} = 0.1667\,, \quad \eta = 0.4082\,, \quad \sqrt{\eta^2 + 1} = 1.0801$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.4082}{1.0801} = 0.6220 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = 300\,(0.6220) = \mathbf{186.61}\ \mathrm{kN/m^2}$$

Al diminuire di η la tensione aumenta: **143.33 → 186.61 kN/m²** ($\mu_s$ = 0.2 → 0.4).

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

# Traccia

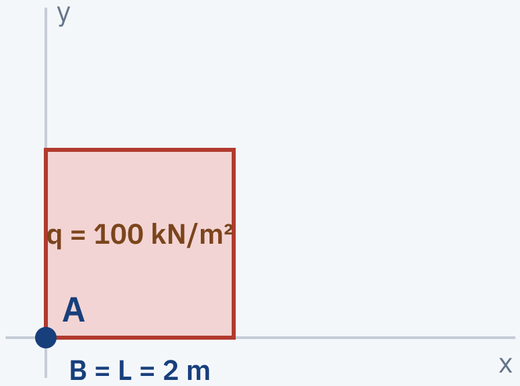
ESEMPIO

## Dati

| | |
|---|---|
| Carico | **flessibile, quadrata uniformemente distribuita: $B = L = 2$ m, $q = 100$ kN/m²** |
| Punto A | **sotto un vertice del quadrato, $z = 2$ m** |
| Terreno | **tra le piastre $\mu_s = 0$** |

## RICHIESTO

**m**, **n**, **$I_W$**, **$\Delta\sigma_z$**; confronto con il valore di Boussinesq; effetto di $\mu_s$.



# Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

**1** m, n e η

$$m = \frac{B}{z} = \frac{2}{2} = 1\,, \quad n = \frac{L}{z} = 1\,, \quad \eta^2 = \frac{1}{2} = 0.5000$$

**2** Valore di influenza $I_w$

$$\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{\eta^4}{m^2 n^2}} = \sqrt{0.5\,(2) + 0.25} = \sqrt{1.25} = 1.1180$$

$$I_w = \frac{1}{2\pi}\cot^{-1}(1.1180) = \frac{0.7297}{2\pi} = \mathbf{0.1161}$$

All'angolo del quadrato, a z = 2 m, si trova **$I_w$ = 0.1161** (valore tabellare nella pagina: $I_w(1; 1)$ = 0.1161).

# Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

**3** Tensione e Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = q\, I_w = 100\,(0.1161) = \mathbf{11.61}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\text{Boussinesq: } I_3(1;1) = 0.1752 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z,B} = \mathbf{17.52}\ \mathrm{kN/m^2}$$

| $\mu_s$ | $\eta$ | $I_W$ (m = n = 1) | $\Delta\sigma_z = q\, I_W$ (kN/m²) | Boussinesq $I_3$ | $\Delta\sigma_{z,B}$ (kN/m²) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.7071 | 0.1161 | **11.61** | 0.1752 | 17.52 |
| 0.2 | 0.6124 | 0.1296 | **12.96** | 0.1752 | 17.52 |
| 0.3 | 0.5345 | 0.1418 | **14.18** | 0.1752 | 17.52 |
| 0.4 | 0.4082 | 0.1639 | **16.39** | 0.1752 | 17.52 |

Sotto lo spigolo del quadrato la tensione di Westergaard è **11.61 kN/m²**, quella di Boussinesq è 17.52 kN/m² (rapporto 0.663). Al crescere di $\mu_s$ aumenta $I_W$: 0.1161 → 0.1639 ($\mu_s$ = 0 → 0.4); il valore di Boussinesq è $I_3$ = 0.1752.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

# Traccia

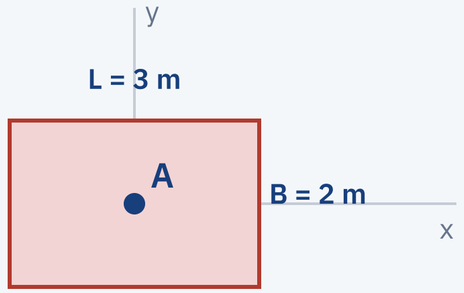
ESEMPIO

## Dati

| | |
|---|---|
| Carico | **rettangolo flessibile: $L = 3$ m (direzione $x$), $B = 2$ m, $q = 300$ kN/m²** |
| Punto A | **al di sotto del centro, $z = 4$ m; $\mu_s = 0$** |
| Suggerimento | **il centro è il vertice comune di quattro rettangoli di uguale angolo** |

## RICHIESTO

**$\Delta\sigma_z$** con il metodo del rettangolo dei quattro spigoli e il valore di Boussinesq; tabella di variazione con la profondità.



# Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

**1** Quattro rettangoli uguali agli angoli (1.5 m × 1.0 m)

$$m = \frac{1.0}{4} = 0.2500\,, \quad n = \frac{1.5}{4} = 0.3750\,, \quad \eta^2 = 0.5000$$

**2** $I_W$ (per ciascun rettangolo d'angolo)

$$\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\eta^4}{m^2n^2}} = \sqrt{0.5\,(23.1111)+28.4444} = \sqrt{40} = 6.3246$$

$$I_w = \frac{1}{2\pi}\cot^{-1}(6.3246) = \frac{0.15682}{2\pi} = \mathbf{0.02496}$$

Per ciascun rettangolo d'angolo si ottiene **$I_W$ = 0.02496**; il centro è il vertice comune dei quattro rettangoli d'angolo uguali.

# Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

**3** Tensione (4 rettangoli d'angolo) e Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = 4\,q\,I_w = 4\,(300)\,(0.02496) = \mathbf{29.95}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 4\,q\,I_3(0.25;0.375) = 4\,(300)\,(0.03830) = 45.96\ \mathrm{kN/m^2}$$

**4** Stesso metodo a ogni profondità (m = 1.0/z, n = 1.5/z)

| z (m) | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta\sigma_z$ Westergaard (kN/m²) | **158.69** | **82.80** | **29.95** | **14.62** | **8.52** | **3.89** |
| $\Delta\sigma_z$ Boussinesq (kN/m²) | 232.37 | 128.49 | 45.96 | 22.21 | 12.88 | 5.86 |
| Rapporto W/B | 0.683 | 0.644 | 0.652 | 0.658 | 0.662 | 0.664 |

La tensione di Westergaard è minore di quella di Boussinesq a ogni profondità: 158.69 e 232.37 kN/m² a z = 1 m, 3.89 e 5.86 kN/m² a z = 12 m. Il rapporto resta compreso tra 0.644 e 0.683 nell'intervallo z = 1–12 m.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

# Traccia

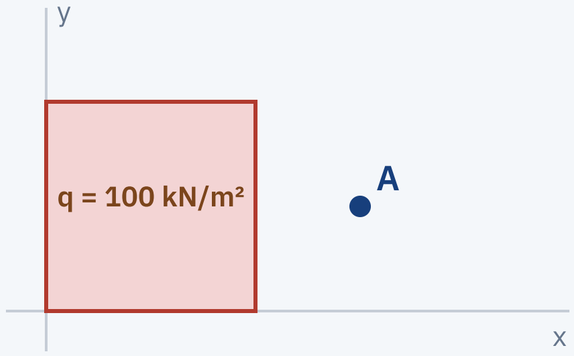
ESEMPIO

## Dati

| | |
|---|---|
| Carico | **quadrata flessibile $[0;\,2]\times[0;\,2]$ m, $q = 100$ kN/m²** |
| Punto A | **$x = 3$ m, $y = 1$ m (1 m all'esterno dal bordo), $z = 2$ m** |
| Terreno | **tra le piastre $\mu_s = 0$** |

## RICHIESTO

Con il **rettangolo a quattro angoli** marcato, **$\Delta\sigma_z$**; confronto con il valore di Boussinesq.



# Soluzione

SOLUZIONE

**1** Distanze da A agli angoli a = $x_{angolo} - x_A$, b = $y_{angolo} - y_A$; rettangolo dei quattro angoli

| Rettangolo d'angolo | (a ; b) (m) | m = \|a\|/z | n = \|b\|/z | $I_w$ | Segno |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (−1 ; 1) | 0.50 | 0.50 | 0.05409 | − |
| 2 | (−3 ; 1) | 1.50 | 0.50 | 0.08745 | + |
| 3 | (−1 ; −1) | 0.50 | 0.50 | 0.05409 | − |
| 4 | (−3 ; −1) | 1.50 | 0.50 | 0.08745 | + |

**2** Totale

$$\Delta\sigma_z = q\,[-I_w(0.5;0.5) + I_w(1.5;0.5) - I_w(0.5;0.5) + I_w(1.5;0.5)]$$

$$= 2q\,[0.08745 - 0.05409] = 200\,(0.03336) = \mathbf{6.673}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 9.466\ \mathrm{kN/m^2}$$

Sebbene il punto A sia esterno al carico, riceve una tensione di **6.67 kN/m²**; il valore di Boussinesq è 9.47 kN/m². È sufficiente un'unica operazione: sottrarre i due rettangoli di 1 m × 1 m dai due rettangoli di 3 m × 1 m.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

# Traccia

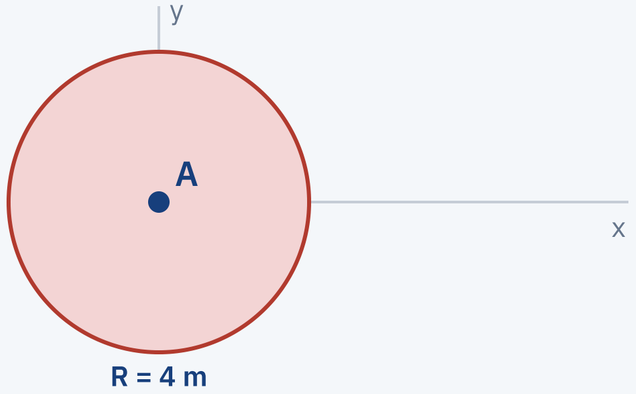
ESEMPIO

**Dati**

| | |
|---|---|
| Carico | **cerchio** $R = 4$ **m,** $q = 300$ **kN/m²;** $\mu_s = 0$**,** $z = 4$ **m** |
| Punto A | **distanza orizzontale dal centro** $r = 0;\ 0.5R;\ R;\ 1.5R;\ 2R;\ 3R$ |

**RICHIESTO**

Tensioni di Westergaard e Boussinesq a ciascuna distanza (integrale polare del modulo).



# Soluzione

SOLUZIONE

| r (m) | r/R | $\Delta\sigma_z$ Westergaard | $\Delta\sigma_z$ Boussinesq | Rapporto W/B |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0 | **126.79** | 193.93 | 0.654 |
| 2 | 0.5 | **111.97** | 168.67 | 0.664 |
| 4 | 1.0 | **69.51** | 99.67 | 0.697 |
| 6 | 1.5 | **30.71** | 37.99 | 0.808 |
| 8 | 2.0 | **13.75** | 12.54 | 1.096 |
| 12 | 3.0 | **4.05** | 1.87 | 2.163 |

Al centro (r = 0) il valore dell'espressione in forma chiusa risulta pari a 126.79 kN/m². Al bordo del cerchio (r = R) si ha 69.51 kN/m² (Boussinesq: 99.67); allontanandosi dal cerchio la tensione di Westergaard diminuisce più lentamente e **tra r = 1.5R e 2R** supera quella di Boussinesq (r = 12 m: 4.05 e 1.87 kN/m²).

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

# Traccia

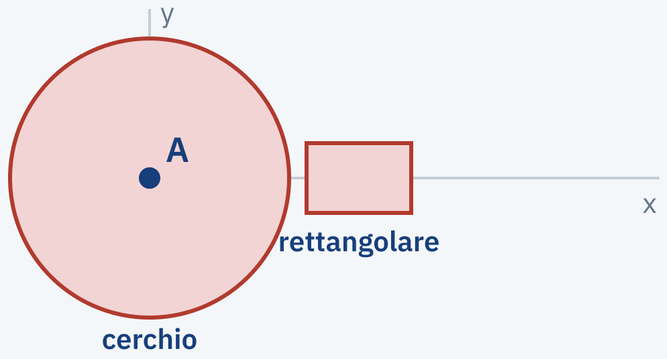
ESEMPIO

**Dati**

| | |
|---|---|
| Area 1 | **cerchio** $R = 4$ **m,** $q = 300$ **kN/m², centro** $(0;\ 0)$ |
| Area 2 | **rettangolare** $3 \times 2$ **m (3 m nella direzione** $x$ **),** $q = 300$ **kN/m², centro** $(6;\ 0)$ |
| Punto A | $x = 0$**,** $y = 0$**,** $z = 4$ **m;** $\mu_s = 0$ **(le aree non si sovrappongono)** |

**RICHIESTO**

Contributo di ciascuna area, tensione totale e somma di Boussinesq; tabella per profondità.



# Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

**1** Area 1 (cerchio, sotto il centro)

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 300\left\{1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R/z)^2}}\right\} = 300\,(0.4226) = \mathbf{126.79}\ \mathrm{kN/m^2} \quad (\text{Esempio 1})$$

**2** Area 2 (rettangolo; x = 4.5 e 7.5 m da A, y = ±1 m)

$$\Delta\sigma_{z(2)} = q\left[I_w\left(\tfrac{7.5}{4};\tfrac{1}{4}\right) - I_w\left(\tfrac{4.5}{4};\tfrac{1}{4}\right)\right] \times 2 = 600\,[0.05048 - 0.04553]$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = 600\,(0.00495) = \mathbf{2.97}\ \mathrm{kN/m^2} \qquad \Delta\sigma_{z(2),B} = 3.18$$

Poiché il rettangolo A è lontano dal punto, il suo contributo è piccolo: **2.97 kN/m²** (Boussinesq: 3.18). Il contributo del cerchio è 126.79 kN/m².

# Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

**1** Le tensioni si sommano (z = 4 m)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 126.79 + 2.97 = \mathbf{129.76}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 193.93 + 3.18 = 197.11\ \mathrm{kN/m^2}$$

**2** Profilo di profondità sotto lo stesso punto

| z (m) | 2 | 4 | 6 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| Area 1 (cerchio) | 200.00 | 126.79 | 81.72 | 55.05 | 28.64 |
| Area 2 (rettangolare) | 1.91 | 2.97 | 3.18 | 2.95 | 2.17 |
| Westergaard totale | **201.91** | **129.76** | **84.90** | **58.00** | **30.81** |
| Boussinesq totale | 274.02 | 197.11 | 131.63 | 89.82 | 47.27 |

Nel punto A le due aree producono insieme **129.76 kN/m²** (totale di Boussinesq: 197.11 kN/m²). Il contributo dell'area laterale aumenta con la profondità: a z = 12 m è circa il 7.0% del totale.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Sintesi

# Punti chiave

**Cerchio, centro**: $\Delta\sigma_z = q\,\{1 - \eta/[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}\}$, $\eta = \sqrt{[(1 - 2\mu_s)/(2 - 2\mu_s)]}$; **rettangolo, spigolo**: $\Delta\sigma_z = q\,I_w$, $I_w = (1/2\pi)\,\cot^{-1}\sqrt{[\eta^2(1/m^2 + 1/n^2) + \eta^4/(m^2n^2)]}$

**Esempio ($R = 4$ m, $q = 300$, $z = 4$ m, $\mu_s = 0$)**: $\eta = 0.7071$; $\Delta\sigma_z/q = 0.4226 \rightarrow$ **$\Delta\sigma_z = 126.79$ kN/m²**; Boussinesq 193.93 kN/m²

**Rettangolare**: allo spigolo (2 m × 2 m, $z = 2$ m) $I_w = 0.1161$; al centro, quattro rettangoli uguali di spigolo (3 × 2 m, $z = 4$ m: 29.95 kN/m²); nel punto esterno, quattro rettangoli di spigolo **con segno** (6.67 kN/m²)

Al crescere di **$\mu_s$** aumenta la tensione al di sotto del centro (0 → 0.4: 126.79 → 186.61 kN/m²); per $\mu_s = 0$ la tensione di Westergaard sotto il carico è pari a circa il 65% di quella di Boussinesq, mentre lontano dal carico tale ordine si inverte

**Sovrapposizione**: ciascuna area è considerata con la propria distanza, le tensioni si sommano (cerchio + rettangolo: 129.76 kN/m²)

# Bibliografia

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1938). A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics: soft material reinforced by numerous strong horizontal sheets. In Contributions to the Mechanics of Solids, Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume. Macmillan, New York, 268–277.

**NOTA**

Tutti gli esempi numerici sono stati prodotti con il motore di calcolo del modulo; il modulo restituisce gli stessi valori. Esempio iniziale del modulo: cerchio R = 4 m, q = 300 kN/m², $\mu_s = 0$, a z = 4 m sotto il centro.

GeoTerva

Calcoli geotecnici online

# Dalla teoria alla pratica

Inserire in GeoTerva i propri cerchi e rettangoli, il punto A e il valore di $\mu_s$; il modulo restituisce insieme η, i valori di $I_W$, i rettangoli d'angolo, il confronto con Boussinesq, il profilo con la profondità, la soluzione passo per passo e la relazione.

**Aprire il modulo →** | **Pagina di teoria →**

**Aprire dallo smartphone**
I moduli di prova non richiedono registrazione.

Se si desidera utilizzarli nelle proprie lezioni: info@geoterva.com