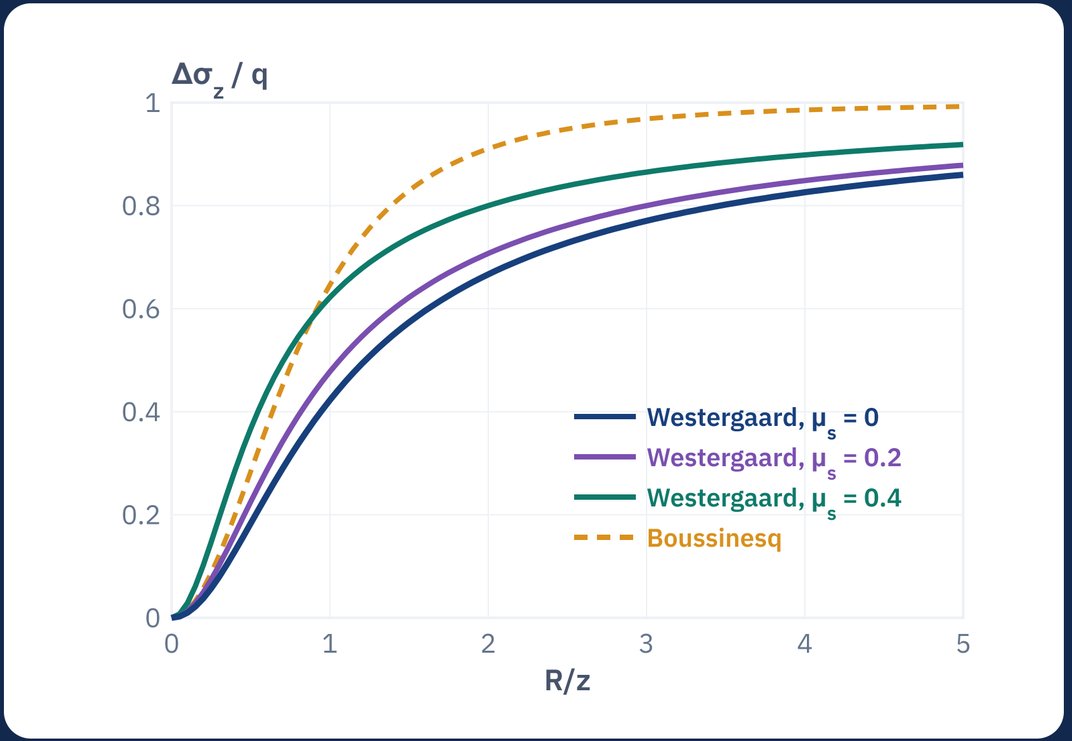
Cours de géotechnique · Contraintes dans le massif de sol

Westergaard : contrainte sous une charge répartie sur une surface

Cours : contrainte sous un cercle et un rectangle uniformément chargés dans un milieu de Westergaard ; le centre du cercle et le coin du rectangle sont résolus à la main.

Milieu de Westergaard | Centre du cercle | Angle du rectangle | Rectangles d'angle | Superposition



Que verrons-nous dans ce cours ?

- L'**intégration sur une aire chargée** de la solution de Westergaard pour une charge ponctuelle : deux résultats en forme fermée
- Sous le **centre du cercle** : $\Delta\sigma_z = q\,\{1 - \eta/[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}\}$
- Sous **le coin du rectangle** : $\Delta\sigma_z = q\,I_w$; pour les autres points, **quatre rectangles de coin** affectés d'un signe
- Comparaison des contraintes de Westergaard et de **Boussinesq** ; effet du coefficient de Poisson $\boldsymbol{\mu_s}$
- **Superposition** de plusieurs surfaces ; variation avec la profondeur

DÉROULÉ DU COURS

Chaque thème est traité en **trois étapes** :

1 · **Théorie** : formule et justification

2 · **Énoncé** : données et à déterminer

3 · **Solution** : étape par étape, avec les valeurs numériques

Exemple : aire circulaire flexible, R = 4 m, q = 300 kN/m² ; à z = 4 m sous le centre ; dans le sol compris entre les plaques, $\mu_s = 0$.

Surfaces chargées dans un milieu de Westergaard

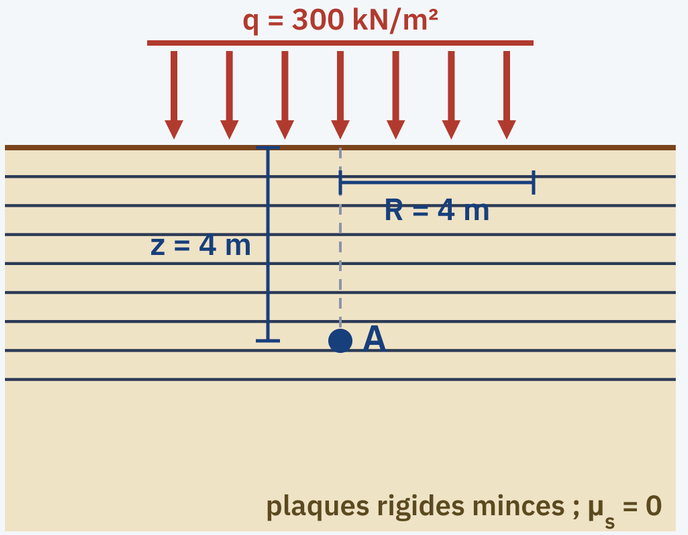
THÉORIE

La solution de Westergaard pour une charge ponctuelle peut être **intégrée sur une aire chargée**, comme l'a été la solution de Boussinesq pour le cercle et le rectangle

Pour une aire flexible uniformément chargée, on obtient **deux résultats en forme fermée** : la contrainte sous le **centre du cercle** et sous le **coin du rectangle**

μ_s est le coefficient de Poisson du sol compris entre les couches rigides ; pour $\mu_s = 0$, $\eta = 1/\sqrt{2}$

$$\eta = \sqrt{\frac{1 - 2\mu_s}{2 - 2\mu_s}}$$



Sous le centre

THÉORIE

Sous le centre d'une aire circulaire flexible de rayon **R** soumise à une charge uniformément répartie :

$$\Delta\sigma_z = q\left\{1 - \frac{\eta}{\left[\eta^2 + (R/z)^2\right]^{1/2}}\right\}$$

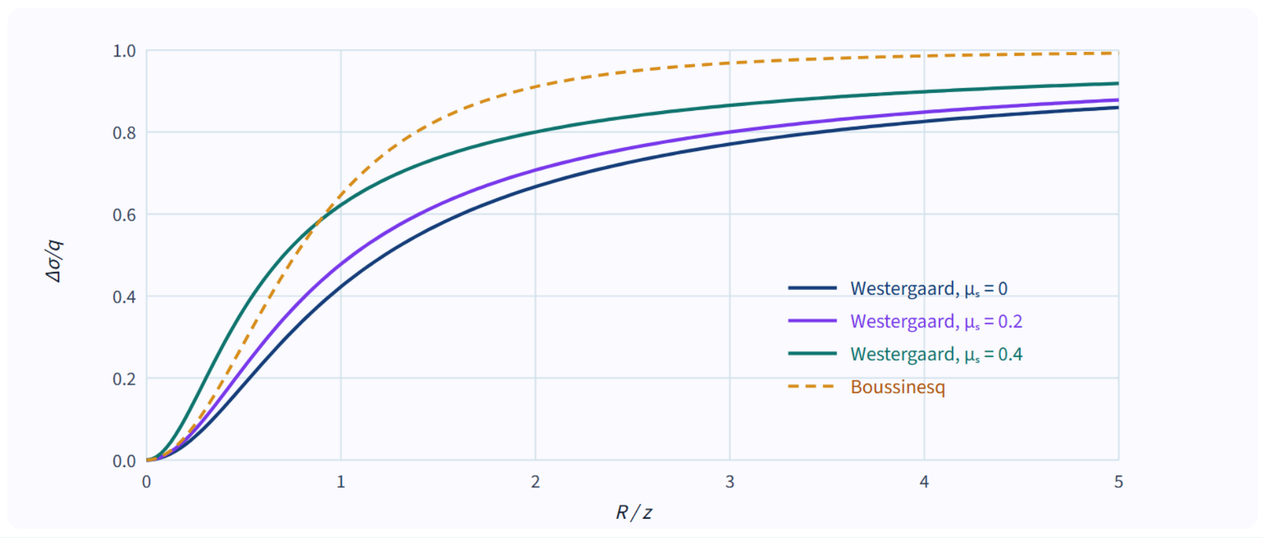
La relation est obtenue à partir de la solution de la charge ponctuelle : l'élément **r dr dα** supporte la charge **q r dr dα** ; l'intégrale en r, avec la valeur d'influence $\mathbf{I_5}$ de la charge ponctuelle, s'exprime au moyen de fonctions élémentaires

$$\Delta\sigma_z = q\int_0^R \frac{r\,dr}{\eta^2 z^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2} = q\left\{1 - \left[\left(\frac{R}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}\right\}$$

Variation de $\Delta\sigma_z/q$ en fonction de R/z

THÉORIE

R/z	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	2	2.5	3	4	5	10
Westergaard ($\mu_s = 0$)	0.0572	0.1835	0.3140	0.4226	0.5076	0.5736	0.6667	0.7278	0.7706	0.8259	0.8600	0.9295
Boussinesq	0.0869	0.2845	0.4880	0.6464	0.7562	0.8293	0.9106	0.9488	0.9684	0.9857	0.9925	0.9990



Sous le coin : I_w

THÉORIE

Sous le coin d'un rectangle souple de dimensions **B × L**, uniformément chargé, avec **m = B/z** et **n = L/z** :

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{2\pi}\left[\cot^{-1}\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\eta^4\left(\frac{1}{m^2 n^2}\right)}\right] = q\,I_w$$

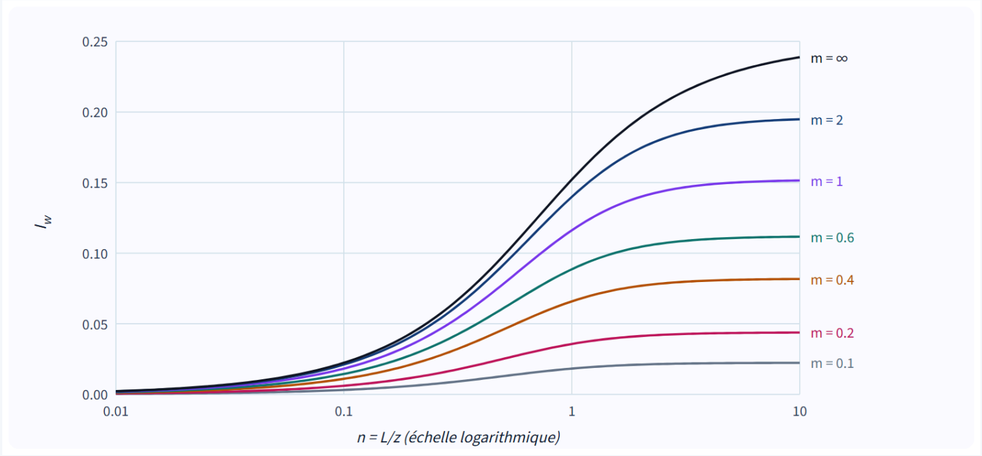
Pour tous les autres points, comme pour le rectangle de Boussinesq, on utilise **les quatre rectangles de coin, affectés d'un signe** ; le module effectue cette opération

$$\Delta\sigma_z = q\,\left[\pm I_w(m_1,n_1) \pm I_w(m_2,n_2) \pm I_w(m_3,n_3) \pm I_w(m_4,n_4)\right]$$

Valeurs de I_w ($\mu_s = 0$)

THÉORIE

m	n = 0.1	n = 0.4	n = 1	n = 2	n = 5	n = 10
0.1	0.0031	0.0110	0.0182	0.0211	0.0221	0.0223
0.2	0.0061	0.0214	0.0357	0.0413	0.0434	0.0438
0.5	0.0129	0.0459	0.0781	0.0916	0.0969	0.0977
1	0.0182	0.0658	0.1161	0.1398	0.1498	0.1515
2	0.0211	0.0768	0.1398	0.1743	0.1916	0.1948
10	0.0223	0.0817	0.1515	0.1948	0.2250	0.2341



Intégrale polaire pour le cercle

THÉORIE

Il n'existe pas de relation fermée pour les points autres que le centre du cercle : le module intègre la solution de Westergaard pour une charge ponctuelle sur le cercle, **en coordonnées polaires** par rapport au point situé sous le point A

Le long de chaque rayon, l'intégrale radiale s'exprime sous forme fermée ; seule l'intégrale angulaire est numérique. Au centre (r = 0), ce résultat se réduit à la relation fermée ci-dessus

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\oint \left[G(\rho_1) - G(\rho_2)\right] d\varphi \qquad G(\rho) = \left[\left(\frac{\rho}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}$$

Superposition

THÉORIE

Il est possible de saisir des cercles et des rectangles, chacun défini par sa propre valeur de **q**, sa taille et son centre sur le sol (huit au maximum) ; deux aires peuvent se toucher mais ne peuvent pas se chevaucher

Le milieu de Westergaard étant **élastique**, la contrainte due à chaque aire est déterminée à partir de sa propre distance au point A et les contraintes sont **additionnées** ; la valeur de comparaison de Boussinesq est additionnée de la même manière

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_k \left\{ 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R_k/z)^2}} \right\} \text{ ou } q_k \sum \pm I_w$$

Énoncé

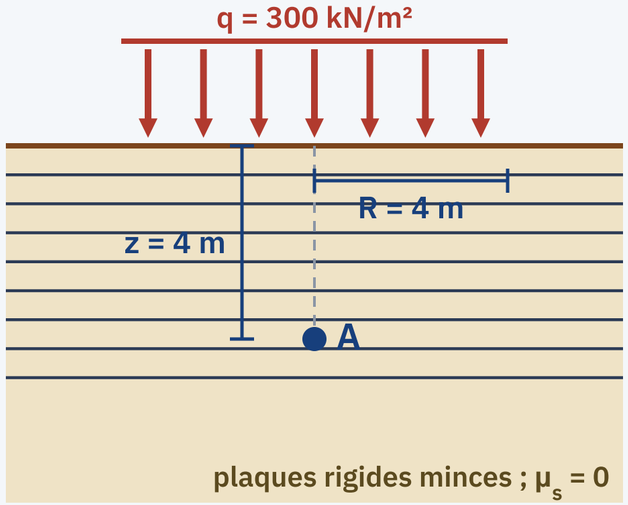
EXEMPLE

Données

Charge	**surface circulaire souple, uniformément répartie : $q = 300$ kN/m², $R = 4$ m**
Point A	**sous le centre du cercle, $z = 4$ m**
Sol	**entre les plaques $\mu_s = 0$**

À DÉTERMINER

η, **R/z**, **$\Delta\sigma_z/q$**, **$\Delta\sigma_z$** et comparaison avec la contrainte de Boussinesq.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Constante de Westergaard η

$$\eta = \sqrt{\frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \mathbf{0.7071} \qquad \eta^2 = 0.5000$$

2 Rapport et contrainte

$$\frac{R}{z} = \frac{4}{4} = 1 \qquad \sqrt{\eta^2 + (R/z)^2} = \sqrt{0.5000 + 1} = 1.2247$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R/z)^2}} = 1 - \frac{0.7071}{1.2247} = \mathbf{0.4226}$$

$$\Delta\sigma_z = q\,\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 300\,(0.4226) = \mathbf{126.79}\ \mathrm{kN/m^2}$$

La contrainte de Westergaard est trouvée égale à **126.79 kN/m²** (42.3 % de q).

Solution (2/2)

SOLUTION

4 Boussinesq (comparaison)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{1}{\left[(R/z)^2 + 1\right]^{3/2}} = 1 - \frac{1}{2^{3/2}} = \mathbf{0.6464}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 300\,(0.6464) = \mathbf{193.93}\ \mathrm{kN/m^2} \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = \frac{126.79}{193.93} = 0.654$$

Westergaard **126.79 kN/m²**, Boussinesq **193.93 kN/m²** : comme les plaques rigides répartissent la charge latéralement, la contrainte de Westergaard sous le centre ne représente que **65.4 %** de celle de Boussinesq.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

EXEMPLE

Données

Charge	**cercle** $R = 4$ **m,** $q = 300$ **kN/m²,** $\mu_s = 0$
Profondeurs	$z = 0.4;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12$ **m (**$z/R = 0.1 \ldots 3$**)**

À DÉTERMINER

À chaque profondeur, **$\Delta\sigma_z/q$**, contraintes de Westergaard et de Boussinesq ; vérification à la main pour z = 2 m et 12 m.

Solution (1/2)

SOLUTION

z (m)	z/R	R/z	$\Delta\sigma_z/q$	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	Rapport W/B
0.4	0.1	10.00	0.9295	**278.84**	299.70	0.930
2	0.5	2.00	0.6667	**200.00**	273.17	0.732
4	1.0	1.00	0.4226	**126.79**	193.93	0.654
6	1.5	0.67	0.2724	**81.72**	127.19	0.642
8	2.0	0.50	0.1835	**55.05**	85.34	0.645
10	2.5	0.40	0.1296	**38.88**	59.88	0.649
12	3.0	0.33	0.0955	**28.64**	43.86	0.653

La contrainte de Westergaard est inférieure à celle de Boussinesq à toute profondeur (z = 4 m : 126.79 et 193.93 kN/m² ; z = 12 m : 28.64 et 43.86 kN/m²). Le rapport part de 0.930 près de la surface, vaut 0.654 à z = 4 m et reste voisin de 0.65 en profondeur.

Solution (2/2)

SOLUTION

1 z = 2 m (R/z = 2)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.7071}{\sqrt{0.5000 + 4}} = 1 - \frac{0.7071}{2.1213} = \mathbf{0.6667}$$

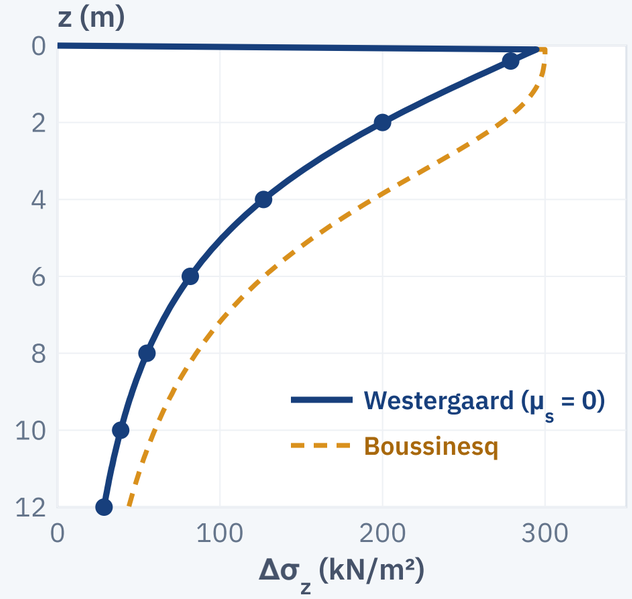
$$\Delta\sigma_z = 300\,(0.6667) = \mathbf{200.00}\ \mathrm{kN/m^2}$$

2 z = 12 m (R/z = 1/3)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.7071}{\sqrt{0.5000 + 0.1111}} = 1 - \frac{0.7071}{0.7817} = \mathbf{0.0955}$$

$$\Delta\sigma_z = 300\,(0.0955) = \mathbf{28.64}\ \mathrm{kN/m^2}$$

À z = 2 m, la contrainte vaut exactement **2q/3 = 200.00 kN/m²** (Boussinesq : 273.17) ; à z = 12 m, elle vaut **28.64 kN/m²** (Boussinesq : 43.86).



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

EXEMPLE

Données

Charge et point	**cercle $R = 4$ m, $q = 300$ kN/m², sous le centre $z = 4$ m**
Variable	$\mu_s = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.49$

À DÉTERMINER

Pour chaque μ_s : **η**, **$\Delta\sigma_z/q$**, **$\Delta\sigma_z$** et rapport à Boussinesq ; à la main pour $\mu_s = 0.2$ et 0.4.

Solution (1/2)

SOLUTION

μ_s	η	$\Delta\sigma_z/q$	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	$\Delta\sigma_z$ / Boussinesq
0.00	0.7071	0.4226	**126.79**	0.654
0.10	0.6667	0.4453	**133.59**	0.689
0.20	0.6124	0.4778	**143.33**	0.739
0.30	0.5345	0.5286	**158.58**	0.818
0.40	0.4082	0.6220	**186.61**	0.962
0.49	0.1400	0.8613	**258.40**	1.332

Lorsque μ_s augmente, la contrainte de Westergaard sous le centre **augmente** : 126.79 pour $\mu_s = 0$, 186.61 kN/m² pour $\mu_s = 0.4$ (Boussinesq : 193.93). Pour $\mu_s = 0.49$, avec 258.40 kN/m², elle **dépasse** la valeur de Boussinesq.

Solution (2/2)

SOLUTION

1 μ_s = 0.2

$$\eta^2 = \frac{1 - 0.4}{2 - 0.4} = 0.3750\,, \quad \eta = 0.6124\,, \quad \sqrt{\eta^2 + 1} = 1.1726$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.6124}{1.1726} = 0.4778 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = 300\,(0.4778) = \mathbf{143.33}\ \mathrm{kN/m^2}$$

2 μ_s = 0.4

$$\eta^2 = \frac{1 - 0.8}{2 - 0.8} = 0.1667\,, \quad \eta = 0.4082\,, \quad \sqrt{\eta^2 + 1} = 1.0801$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.4082}{1.0801} = 0.6220 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = 300\,(0.6220) = \mathbf{186.61}\ \mathrm{kN/m^2}$$

Plus η diminue, plus la contrainte augmente : **143.33 → 186.61 kN/m²** (μ_s = 0.2 → 0.4).

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

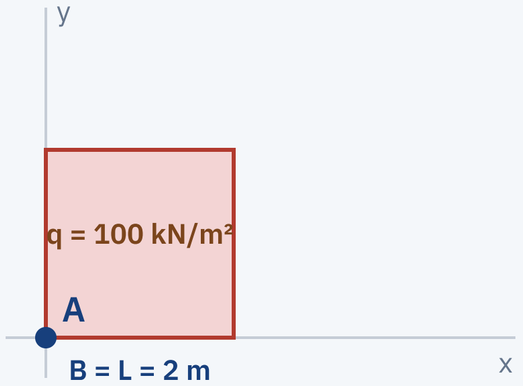
EXEMPLE

Données

Charge	**carrée souple uniformément répartie : $B = L = 2$ m, $q = 100$ kN/m²**
Point A	**sous un coin du carré, $z = 2$ m**
Sol	**entre les plaques $\mu_s = 0$**

À DÉTERMINER

m, **n**, **I_W**, **$\Delta\sigma_z$** ; comparaison avec la valeur de Boussinesq ; effet de μ_s.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 m, n et η

$$m = \frac{B}{z} = \frac{2}{2} = 1\,, \quad n = \frac{L}{z} = 1\,, \quad \eta^2 = \frac{1}{2} = 0.5000$$

2 Valeur d'influence I_w

$$\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\eta^4}{m^2 n^2}} = \sqrt{0.5\,(2)+0.25} = \sqrt{1.25} = 1.1180$$

$$I_w = \frac{1}{2\pi}\cot^{-1}(1.1180) = \frac{0.7297}{2\pi} = \mathbf{0.1161}$$

Sous le coin du carré, à z = 2 m, on trouve **I_w = 0.1161** (valeur du tableau de la page : I_w(1 ; 1) = 0.1161).

Solution (2/2)

SOLUTION

3 Contrainte et Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = q\, I_w = 100\,(0.1161) = \mathbf{11.61}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\text{Boussinesq} : I_3(1;1) = 0.1752 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z,B} = \mathbf{17.52}\ \mathrm{kN/m^2}$$

μ_s	η	I_w (m = n = 1)	$\Delta\sigma_z = q\, I_w$ (kN/m²)	Boussinesq I_3	$\Delta\sigma_{z,B}$ (kN/m²)
0.0	0.7071	0.1161	**11.61**	0.1752	17.52
0.2	0.6124	0.1296	**12.96**	0.1752	17.52
0.3	0.5345	0.1418	**14.18**	0.1752	17.52
0.4	0.4082	0.1639	**16.39**	0.1752	17.52

Sous le coin du carré, la contrainte de Westergaard est de **11.61 kN/m²** et la contrainte de Boussinesq de 17.52 kN/m² (rapport 0.663). Lorsque μ_s augmente, I_W croît : 0.1161 → 0.1639 (μ_s = 0 → 0.4) ; la valeur de Boussinesq est I_3 = 0.1752.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

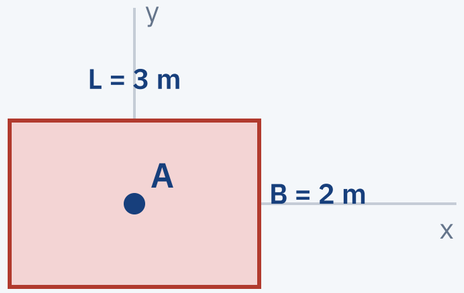
EXEMPLE

Données

Charge	**rectangle souple : $L = 3$ m (direction x), $B = 2$ m, $q = 300$ kN/m²**
Point A	**sous le centre, $z = 4$ m ; $\mu_s = 0$**
Indication	**le centre est le coin commun de quatre rectangles à coin égal**

À DÉTERMINER

$\Delta\sigma_z$ par la méthode du rectangle à quatre angles et valeur de Boussinesq ; tableau de variation avec la profondeur.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Quatre rectangles de coin égaux (1.5 m × 1.0 m)

$$m = \frac{1.0}{4} = 0.2500\,, \quad n = \frac{1.5}{4} = 0.3750\,, \quad \eta^2 = 0.5000$$

2 I_w (pour chaque rectangle de coin)

$$\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\eta^4}{m^2n^2}} = \sqrt{0.5\,(23.1111)+28.4444} = \sqrt{40} = 6.3246$$

$$I_w = \frac{1}{2\pi}\cot^{-1}(6.3246) = \frac{0.15682}{2\pi} = \mathbf{0.02496}$$

Pour chaque rectangle d'angle, on obtient **I_w = 0.02496** ; le centre est le coin commun des quatre rectangles d'angle égaux.

Solution (2/2)

SOLUTION

3 Contrainte (4 rectangles de coin) et Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = 4\,q\,I_w = 4\,(300)\,(0.02496) = \mathbf{29.95}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 4\,q\,I_3(0.25;0.375) = 4\,(300)\,(0.03830) = 45.96\ \mathrm{kN/m^2}$$

4 Même méthode à chaque profondeur (m = 1.0/z, n = 1.5/z)

z (m)	1	2	4	6	8	12
$\Delta\sigma_z$ Westergaard (kN/m²)	**158.69**	**82.80**	**29.95**	**14.62**	**8.52**	**3.89**
$\Delta\sigma_z$ Boussinesq (kN/m²)	232.37	128.49	45.96	22.21	12.88	5.86
Rapport W/B	0.683	0.644	0.652	0.658	0.662	0.664

La contrainte de Westergaard est inférieure à celle de Boussinesq à toute profondeur : 158.69 et 232.37 kN/m² à z = 1 m, 3.89 et 5.86 kN/m² à z = 12 m. Le rapport reste compris entre 0.644 et 0.683 pour z = 1–12 m.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

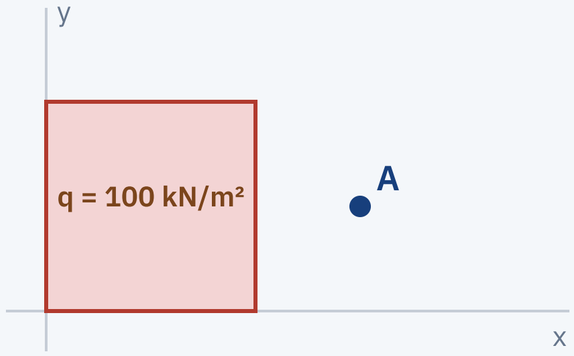
EXEMPLE

Données

Charge	**carré souple $[0;\,2]\times[0;\,2]$ m, $q = 100$ kN/m²**
Point A	**$x = 3$ m, $y = 1$ m (1 m à l'extérieur du bord), $z = 2$ m**
Sol	**entre les plaques $\mu_s = 0$**

À DÉTERMINER

$\Delta\sigma_z$ avec le **rectangle à quatre angles** indiqué ; comparaison avec la valeur de Boussinesq.



Solution

SOLUTION

1 Distances de A aux coins a = $x_{coin} - x_A$, b = $y_{coin} - y_A$; quatre rectangles de coin

Rectangle de coin	(a ; b) (m)	m = |a|/z	n = |b|/z	I_w	Signe
1	(−1 ; 1)	0.50	0.50	0.05409	−
2	(−3 ; 1)	1.50	0.50	0.08745	+
3	(−1 ; −1)	0.50	0.50	0.05409	−
4	(−3 ; −1)	1.50	0.50	0.08745	+

2 Total

$$\Delta\sigma_z = q\,[-I_w(0.5;0.5) + I_w(1.5;0.5) - I_w(0.5;0.5) + I_w(1.5;0.5)]$$

$$= 2q\,[0.08745 - 0.05409] = 200\,(0.03336) = \mathbf{6.673}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 9.466\ \mathrm{kN/m^2}$$

Bien que le point A soit situé en dehors de la charge, il reçoit une contrainte de **6.67 kN/m²** ; la valeur de Boussinesq est de 9.47 kN/m². Une seule opération suffit : retrancher les deux rectangles de 1 m × 1 m des deux rectangles de 3 m × 1 m.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

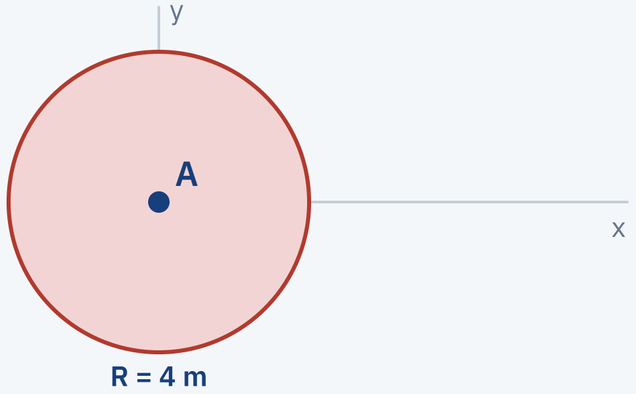
EXEMPLE

Données

Charge	**cercle** $R = 4$ **m,** $q = 300$ **kN/m² ;** $\mu_s = 0$**,** $z = 4$ **m**
Point A	**distance horizontale depuis le centre** $r = 0;\ 0.5R;\ R;\ 1.5R;\ 2R;\ 3R$

À DÉTERMINER

Contraintes de Westergaard et de Boussinesq à chaque distance (intégrale polaire du module).



Solution

SOLUTION

r (m)	r/R	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	Rapport W/B
0	0.0	**126.79**	193.93	0.654
2	0.5	**111.97**	168.67	0.664
4	1.0	**69.51**	99.67	0.697
6	1.5	**30.71**	37.99	0.808
8	2.0	**13.75**	12.54	1.096
12	3.0	**4.05**	1.87	2.163

Au centre (r = 0), la relation analytique donne 126.79 kN/m². Au bord du cercle (r = R), on obtient 69.51 kN/m² (Boussinesq : 99.67) ; en s'éloignant du cercle, la contrainte de Westergaard décroît plus lentement et **entre r = 1.5R et 2R**, elle dépasse celle de Boussinesq (r = 12 m : 4.05 et 1.87 kN/m²).

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

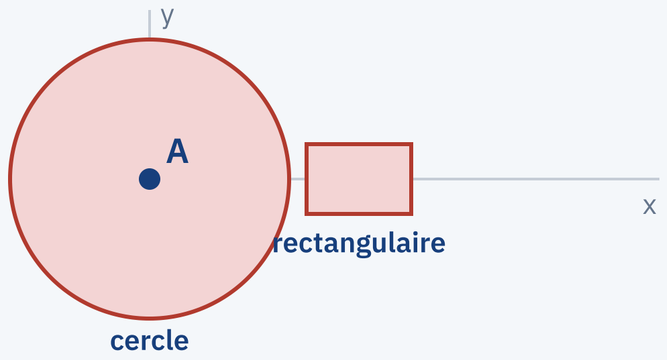
EXEMPLE

Données

Zone 1	**cercle $R = 4$ m, $q = 300$ kN/m², centre $(0;\ 0)$**
Zone 2	**rectangulaire 3×2 m (3 m dans la direction x), $q = 300$ kN/m², centre $(6;\ 0)$**
Point A	**$x = 0$, $y = 0$, $z = 4$ m ; $\mu_s = 0$ (les zones ne se chevauchent pas)**

À DÉTERMINER

Contribution de chaque aire, contrainte totale et somme de Boussinesq ; tableau par profondeur.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Aire 1 (cercle, sous le centre)

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 300\left\{1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R/z)^2}}\right\} = 300\,(0.4226) = \mathbf{126.79}\ \mathrm{kN/m^2} \quad (\text{Exemple 1})$$

2 Aire 2 (rectangle ; x = 4.5 et 7.5 m depuis A, y = ±1 m)

$$\Delta\sigma_{z(2)} = q\left[I_w\left(\tfrac{7.5}{4};\tfrac{1}{4}\right) - I_w\left(\tfrac{4.5}{4};\tfrac{1}{4}\right)\right] \times 2 = 600\,[0.05048 - 0.04553]$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = 600\,(0.00495) = \mathbf{2.97}\ \mathrm{kN/m^2} \qquad \Delta\sigma_{z(2),B} = 3.18$$

Le rectangle A étant éloigné du point, sa contribution est faible : **2.97 kN/m²** (Boussinesq : 3.18). La contribution du cercle est de 126.79 kN/m².

Solution (2/2)

SOLUTION

1 Les contraintes s'additionnent (z = 4 m)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 126.79 + 2.97 = \mathbf{129.76}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 193.93 + 3.18 = 197.11\ \mathrm{kN/m^2}$$

2 Profil en profondeur sous un même point

z (m)	2	4	6	8	12
Zone 1 (cercle)	200.00	126.79	81.72	55.05	28.64
Zone 2 (rectangulaire)	1.91	2.97	3.18	2.95	2.17
Westergaard total	**201.91**	**129.76**	**84.90**	**58.00**	**30.81**
Boussinesq total	274.02	197.11	131.63	89.82	47.27

Au point A, les deux aires produisent ensemble **129.76 kN/m²** (total de Boussinesq : 197.11 kN/m²). La part de l'aire latérale augmente avec la profondeur : à z = 12 m, elle représente environ 7.0 % du total.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Synthèse

Points à retenir

Cercle, centre : $\Delta\sigma_z = q\,\{1 - \eta/[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}\}$, $\eta = \sqrt{[(1 - 2\mu_s)/(2 - 2\mu_s)]}$; **rectangle, coin** : $\Delta\sigma_z = q\,I_w$, $I_w = (1/2\pi)\,\cot^{-1}\sqrt{[\eta^2(1/m^2 + 1/n^2) + \eta^4/(m^2n^2)]}$

Exemple (R = 4 m, q = 300, z = 4 m, $\mu_s = 0$) : $\eta = 0.7071$; $\Delta\sigma_z/q = 0.4226$ → **$\Delta\sigma_z$ = 126.79 kN/m²** ; Boussinesq 193.93 kN/m²

Rectangle : à l'angle (2 m × 2 m, z = 2 m) $I_w = 0.1161$; au centre, quatre rectangles d'angle égaux (3 × 2 m, z = 4 m : 29.95 kN/m²) ; au point extérieur, quatre rectangles d'angle **affectés d'un signe** (6.67 kN/m²)

Lorsque **μ_s** augmente, la contrainte sous le centre augmente (0 → 0.4 : 126.79 → 186.61 kN/m²) ; pour $\mu_s = 0$, la contrainte de Westergaard sous la charge vaut environ 65 % de celle de Boussinesq, et loin de la charge cet ordre s'inverse

Superposition : chaque aire est traitée avec sa propre distance, les contraintes sont additionnées (cercle + rectangle : 129.76 kN/m²)

Références bibliographiques

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1938). A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics: soft material reinforced by numerous strong horizontal sheets. In Contributions to the Mechanics of Solids, Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume. Macmillan, New York, 268–277.

REMARQUE

Tous les exemples numériques ont été produits avec le moteur de calcul propre au module ; le module donne les mêmes valeurs. L'exemple d'ouverture du module : cercle R = 4 m, q = 300 kN/m², μ_s = 0, à z = 4 m sous le centre.

GeoTerva

Calculs géotechniques en ligne

De la théorie à la pratique

Renseigner dans GeoTerva les cercles et les rectangles étudiés, le point A et la valeur de μ_s ; le module fournit ensemble η, les valeurs de I_W, les rectangles d'angle, la comparaison avec Boussinesq, le profil en profondeur, la solution étape par étape et le rapport.

Ouvrir sur smartphone
Les modules d'essai ne nécessitent pas d'inscription.

Ouvrir le module →

Page de théorie →

Si vous souhaitez les utiliser dans vos cours : info@geoterva.com