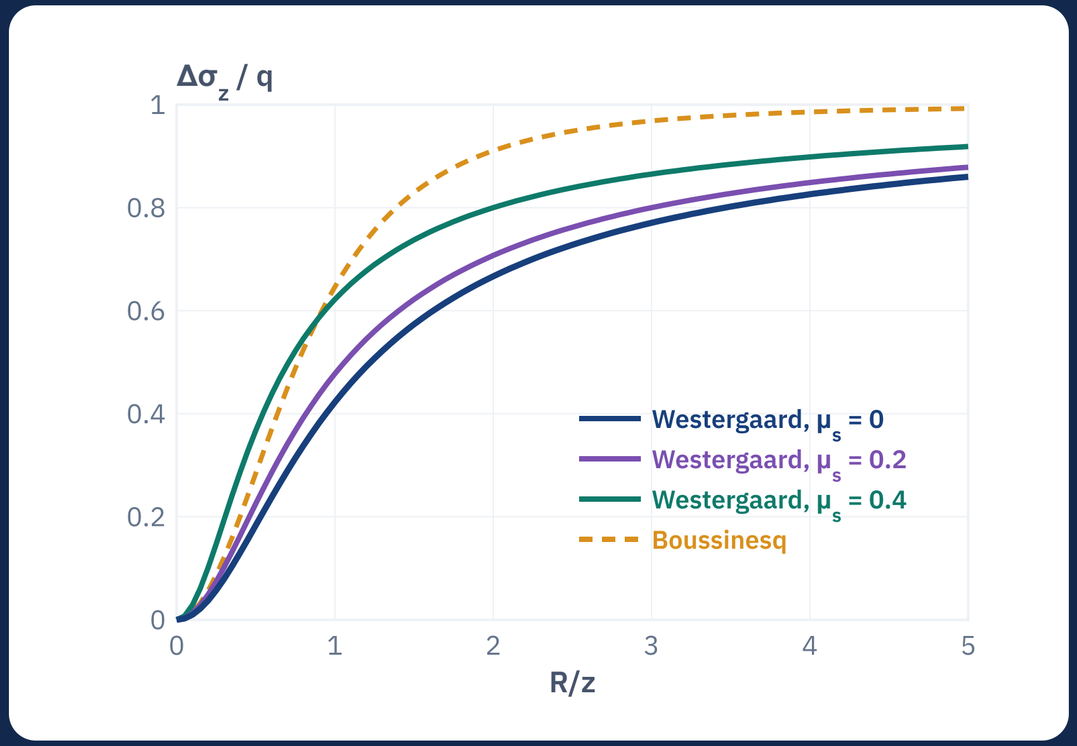
Geotechnische Vorlesungspräsentation · Spannungen im Baugrund

Westergaard: Spannung unter einer Flächenlast

Vorlesung: Spannung unter einer gleichmäßig belasteten Kreis- und Rechteckfläche im Westergaard-Medium; der Kreismittelpunkt und die Rechteckecke werden von Hand gelöst.

- Westergaard-Medium
- Mittelpunkt des Kreises
- Ecke des Rechtecks
- Eckrechtecke
- Superposition



Was lernen wir in dieser Vorlesung?

Integration der Westergaard-Lösung für die Einzellast über eine belastete Fläche: zwei geschlossene Lösungen

Unterhalb des **Kreismittelpunkts**: $\Delta\sigma_z = q\,\{1 - \eta/[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}\}$

Unter der Ecke des Rechtecks: $\Delta\sigma_z = q\,I_w$; für andere Punkte das vorzeichenbehaftete **Vier-Ecken-Rechteck**

Vergleich der Spannungen nach Westergaard und **Boussinesq**; Einfluss der Querdehnzahl μ_s

Superposition mehrerer Flächen; Änderung mit der Tiefe

VORLESUNGSABLAUF

Jedes Thema wird in **drei Schritten** behandelt:

1 · **Theorie**: Formel und Begründung

2 · **Aufgabe**: Gegeben und Gesucht

3 · **Lösung**: Schritt für Schritt, mit Zahlen

Beispiel: flexible Kreisfläche, R = 4 m, q = 300 kN/m²; unterhalb des Mittelpunkts bei z = 4 m; im Boden zwischen den Platten $\mu_s = 0$.

Belastete Flächen im Westergaard-Medium

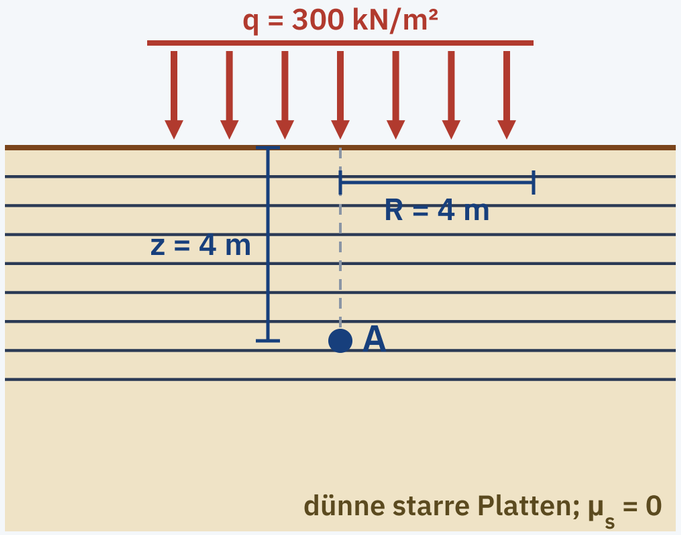
THEORIE

Die Westergaard-Lösung für die Einzellast kann **über eine belastete Fläche integriert** werden, so wie die Boussinesq-Lösung für den Kreis und das Rechteck durchgeführt wurde

Für eine flexible, gleichmäßig belastete Fläche erhält man **zwei geschlossene Lösungen**: die Spannung unter der **Mitte des Kreises** und unter der **Ecke des Rechtecks**

μ_s ist die Querdehnzahl des Bodens zwischen starren Schichten; für $\mu_s = 0$ gilt $\eta = 1/\sqrt{2}$

$$\eta = \sqrt{\frac{1 - 2\mu_s}{2 - 2\mu_s}}$$



Unter der Mitte

THEORIE

Unter dem Mittelpunkt einer flexiblen Kreisfläche mit dem Radius **R** unter Gleichlast:

$$\Delta\sigma_z = q\left\{1 - \frac{\eta}{[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}}\right\}$$

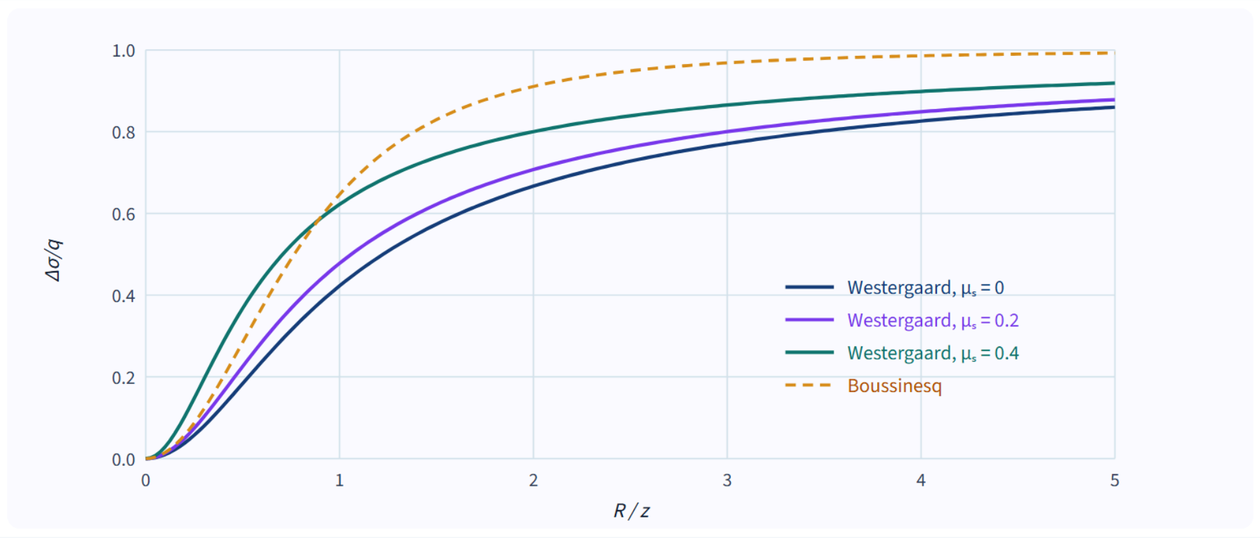
Die Beziehung wird aus der Lösung der Einzellast gewonnen: Das Element **r dr dα** trägt die Last **q r dr dα**; das Integral über r mit dem Einflussbeiwert $\mathbf{I_5}$ der Einzellast wird mit elementaren Funktionen ausgeführt

$$\Delta\sigma_z = q\int_0^R \frac{r\,dr}{\eta^2 z^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2} = q\left\{1 - \left[\left(\frac{R}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}\right\}$$

Verlauf von $\Delta\sigma_z/q$ über R/z

THEORIE

R/z	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	2	2.5	3	4	5	10
Westergaard ($\mu_s = 0$)	0.0572	0.1835	0.3140	0.4226	0.5076	0.5736	0.6667	0.7278	0.7706	0.8259	0.8600	0.9295
Boussinesq	0.0869	0.2845	0.4880	0.6464	0.7562	0.8293	0.9106	0.9488	0.9684	0.9857	0.9925	0.9990



Unter der Ecke: I_w

THEORIE

Unter der Ecke eines flexiblen Rechtecks der Abmessungen **B × L** mit gleichmäßig verteilter Last, mit **m = B/z** und **n = L/z**:

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{2\pi}\left[\cot^{-1}\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\eta^4\left(\frac{1}{m^2 n^2}\right)}\right] = q\,I_w$$

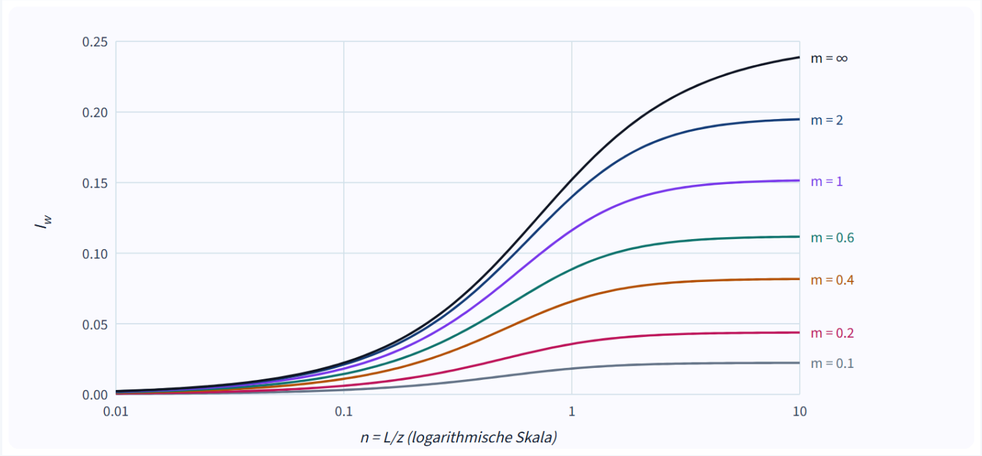
Für alle anderen Punkte wird, wie beim Boussinesq-Rechteck, ein **vorzeichenbehaftetes Vier-Ecken-Rechteck** verwendet; das Modul führt diese Operation aus

$$\Delta\sigma_z = q\,\left[\pm I_w(m_1,n_1) \pm I_w(m_2,n_2) \pm I_w(m_3,n_3) \pm I_w(m_4,n_4)\right]$$

Werte I_w ($\mu_s = 0$)

THEORIE

m	n = 0.1	n = 0.4	n = 1	n = 2	n = 5	n = 10
0.1	0.0031	0.0110	0.0182	0.0211	0.0221	0.0223
0.2	0.0061	0.0214	0.0357	0.0413	0.0434	0.0438
0.5	0.0129	0.0459	0.0781	0.0916	0.0969	0.0977
1	0.0182	0.0658	0.1161	0.1398	0.1498	0.1515
2	0.0211	0.0768	0.1398	0.1743	0.1916	0.1948
10	0.0223	0.0817	0.1515	0.1948	0.2250	0.2341



Polares Integral für den Kreis

THEORIE

Für Punkte außerhalb des Kreismittelpunkts gibt es keine geschlossene Beziehung: Das Modul integriert die Westergaard-Lösung für die Einzellast über den Kreis **in Polarkoordinaten** bezogen auf den Punkt unterhalb des Punktes A

Entlang jedes Strahls ist das Radialintegral geschlossen lösbar; nur das Winkelintegral wird numerisch ausgewertet. Im Zentrum (r = 0) reduziert sich dieses Ergebnis auf den oben angegebenen geschlossenen Ausdruck

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\oint \left[G(\rho_1) - G(\rho_2)\right] d\varphi \qquad G(\rho) = \left[\left(\frac{\rho}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}$$

Superposition

THEORIE

Es können Kreise und Rechtecke eingegeben werden, die jeweils durch ihren eigenen **q**-Wert, ihre Größe und ihren Mittelpunkt auf dem Baugrund definiert sind (höchstens acht); die beiden Flächen dürfen sich berühren, jedoch nicht überlappen

Da das Medium nach Westergaard **elastisch** ist, wird die Spannung jeder Fläche aus ihrem eigenen Abstand zum Punkt A ermittelt, und die Spannungen werden **summiert**; der Vergleichswert nach Boussinesq wird in gleicher Weise summiert

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_k \left\{ 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R_k/z)^2}} \right\} \text{ oder } q_k \sum \pm I_w$$

Aufgabe

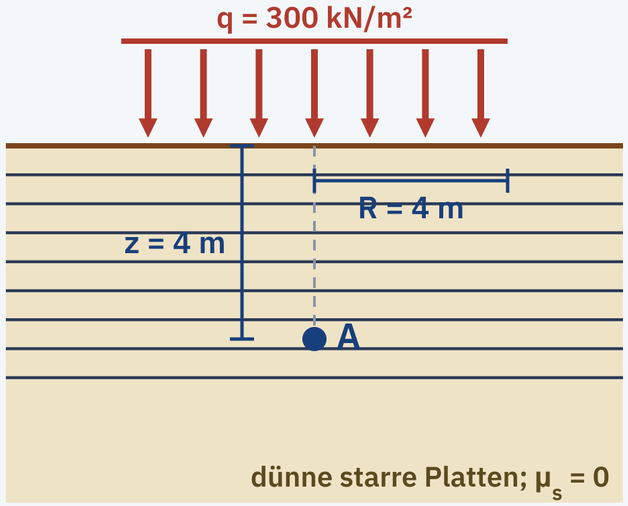
BEISPIEL

Gegeben

Last	**elastische, gleichmäßig verteilte Kreisfläche:** $q = 300$ **kN/m²,** $R = 4$ **m**
Punkt A	**unterhalb des Kreismittelpunktes,** $z = 4$ **m**
Baugrund	**zwischen den Platten** $\mu_s = 0$

GESUCHT

η, **R/z**, **$\Delta\sigma_z/q$**, **$\Delta\sigma_z$** und Vergleich mit der Boussinesq-Spannung.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Westergaard-Konstante η

$$\eta = \sqrt{\frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \mathbf{0.7071} \qquad \eta^2 = 0.5000$$

2 Verhältnis und Spannung

$$\frac{R}{z} = \frac{4}{4} = 1 \qquad \sqrt{\eta^2 + (R/z)^2} = \sqrt{0.5000 + 1} = 1.2247$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R/z)^2}} = 1 - \frac{0.7071}{1.2247} = \mathbf{0.4226}$$

$$\Delta\sigma_z = q\,\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 300\,(0.4226) = \mathbf{126.79}\ \mathrm{kN/m^2}$$

Die Westergaard-Spannung ergibt sich zu **126.79 kN/m²** (42.3 % von q).

Lösung (2/2)

LÖSUNG

4 Boussinesq (Vergleich)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{1}{\left[(R/z)^2 + 1\right]^{3/2}} = 1 - \frac{1}{2^{3/2}} = \mathbf{0.6464}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 300\,(0.6464) = \mathbf{193.93}\ \mathrm{kN/m^2} \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = \frac{126.79}{193.93} = 0.654$$

Westergaard **126.79 kN/m²**, Boussinesq **193.93 kN/m²**: Da starre Platten die Last seitlich verteilen, beträgt die Westergaard-Spannung unter der Mitte nur **65.4 %** der Boussinesq-Spannung.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Last	**Kreis** $R = 4$ **m,** $q = 300$ **kN/m²,** $\mu_s = 0$
Tiefen	$z = 0.4;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12$ **m (**$z/R = 0.1 \ldots 3$**)**

GESUCHT

In jeder Tiefe **$\Delta\sigma_z/q$**, Spannungen nach Westergaard und Boussinesq; Handrechnung für z = 2 m und 12 m.

Lösung (1/2)

LÖSUNG

z (m)	z/R	R/z	$\Delta\sigma_z/q$	$\Delta\sigma_z$ nach Westergaard	$\Delta\sigma_z$ nach Boussinesq	Verhältnis W/B
0.4	0.1	10.00	0.9295	**278.84**	299.70	0.930
2	0.5	2.00	0.6667	**200.00**	273.17	0.732
4	1.0	1.00	0.4226	**126.79**	193.93	0.654
6	1.5	0.67	0.2724	**81.72**	127.19	0.642
8	2.0	0.50	0.1835	**55.05**	85.34	0.645
10	2.5	0.40	0.1296	**38.88**	59.88	0.649
12	3.0	0.33	0.0955	**28.64**	43.86	0.653

Die Spannung nach Westergaard ist in jeder Tiefe kleiner als die nach Boussinesq (z = 4 m: 126.79 und 193.93 kN/m²; z = 12 m: 28.64 und 43.86 kN/m²). Das Verhältnis beginnt nahe der Oberfläche bei 0.930, beträgt bei z = 4 m 0.654 und bleibt in der Tiefe bei etwa 0.65.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

1 z = 2 m (R/z = 2)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.7071}{\sqrt{0.5000 + 4}} = 1 - \frac{0.7071}{2.1213} = \mathbf{0.6667}$$

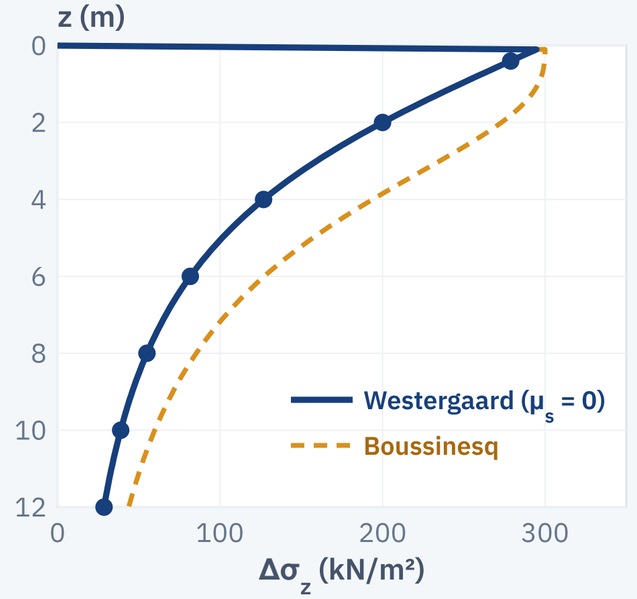
$$\Delta\sigma_z = 300\,(0.6667) = \mathbf{200.00}\ \mathrm{kN/m^2}$$

2 z = 12 m (R/z = 1/3)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.7071}{\sqrt{0.5000 + 0.1111}} = 1 - \frac{0.7071}{0.7817} = \mathbf{0.0955}$$

$$\Delta\sigma_z = 300\,(0.0955) = \mathbf{28.64}\ \mathrm{kN/m^2}$$

Bei z = 2 m beträgt die Spannung genau **2q/3 = 200.00 kN/m²** (Boussinesq: 273.17); bei z = 12 m beträgt sie **28.64 kN/m²** (Boussinesq: 43.86).



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Last und Punkt	**Kreis $R = 4$ m, $q = 300$ kN/m², unterhalb des Mittelpunkts $z = 4$ m**
Veränderlich	$\mu_s = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.49$

GESUCHT

Für jedes μ_s **η**, **$\Delta\sigma_z/q$**, **$\Delta\sigma_z$** und das Verhältnis zu Boussinesq; von Hand für μ_s = 0.2 und 0.4.

Lösung (1/2)

LÖSUNG

μ_s	η	$\Delta\sigma_z/q$	$\Delta\sigma_z$ nach Westergaard	$\Delta\sigma_z$ / Boussinesq
0.00	0.7071	0.4226	**126.79**	0.654
0.10	0.6667	0.4453	**133.59**	0.689
0.20	0.6124	0.4778	**143.33**	0.739
0.30	0.5345	0.5286	**158.58**	0.818
0.40	0.4082	0.6220	**186.61**	0.962
0.49	0.1400	0.8613	**258.40**	1.332

Mit zunehmendem μ_s **nimmt** die Westergaard-Spannung unter der Mitte zu: 126.79 bei μ_s = 0, 186.61 kN/m² bei μ_s = 0.4 (Boussinesq: 193.93). Bei μ_s = 0.49 **überschreitet** sie mit 258.40 kN/m² den Boussinesq-Wert.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

1 μ_s = 0.2

$$\eta^2 = \frac{1 - 0.4}{2 - 0.4} = 0.3750\,, \quad \eta = 0.6124\,, \quad \sqrt{\eta^2 + 1} = 1.1726$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.6124}{1.1726} = 0.4778 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = 300\,(0.4778) = \mathbf{143.33}\ \mathrm{kN/m^2}$$

2 μ_s = 0.4

$$\eta^2 = \frac{1 - 0.8}{2 - 0.8} = 0.1667\,, \quad \eta = 0.4082\,, \quad \sqrt{\eta^2 + 1} = 1.0801$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.4082}{1.0801} = 0.6220 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = 300\,(0.6220) = \mathbf{186.61}\ \mathrm{kN/m^2}$$

Je kleiner η wird, desto größer wird die Spannung: **143.33 → 186.61 kN/m²** (μ_s = 0.2 → 0.4).

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

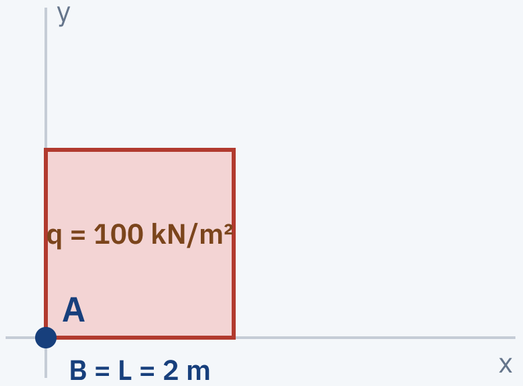
BEISPIEL

Gegeben

Last	**elastisch, gleichmäßig verteilt, quadratisch: $B = L = 2$ m, $q = 100$ kN/m²**
Punkt A	**unter einer Ecke des Quadrats, $z = 2$ m**
Baugrund	**zwischen den Platten $\mu_s = 0$**

GESUCHT

m, **n**, **I_W**, **$\Delta\sigma_z$**; Vergleich mit dem Wert nach Boussinesq; Einfluss von μ_s.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 m, n und η

$$m = \frac{B}{z} = \frac{2}{2} = 1\,, \quad n = \frac{L}{z} = 1\,, \quad \eta^2 = \frac{1}{2} = 0.5000$$

2 Einflussbeiwert I_w

$$\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\eta^4}{m^2 n^2}} = \sqrt{0.5\,(2)+0.25} = \sqrt{1.25} = 1.1180$$

$$I_w = \frac{1}{2\pi}\cot^{-1}(1.1180) = \frac{0.7297}{2\pi} = \mathbf{0.1161}$$

Unter der Ecke des Quadrats ergibt sich bei z = 2 m **I_w = 0.1161** (Tabellenwert auf der Seite: $I_w(1; 1)$ = 0.1161).

Lösung (2/2)

LÖSUNG

3 Spannung und Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = q\, I_w = 100\,(0.1161) = \mathbf{11.61}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\text{Boussinesq: } I_3(1;1) = 0.1752 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z,B} = \mathbf{17.52}\ \mathrm{kN/m^2}$$

μ_s	η	I_w (m = n = 1)	$\Delta\sigma_z = q\, I_w$ (kN/m²)	Boussinesq I_3	$\Delta\sigma_{z,B}$ (kN/m²)
0.0	0.7071	0.1161	**11.61**	0.1752	17.52
0.2	0.6124	0.1296	**12.96**	0.1752	17.52
0.3	0.5345	0.1418	**14.18**	0.1752	17.52
0.4	0.4082	0.1639	**16.39**	0.1752	17.52

Unter der Ecke des Quadrats beträgt die Spannung nach Westergaard **11.61 kN/m²**, die Spannung nach Boussinesq 17.52 kN/m² (Verhältnis 0.663). Mit steigendem μ_s wächst I_W: 0.1161 → 0.1639 (μ_s = 0 → 0.4); der Wert nach Boussinesq ist I_3 = 0.1752.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

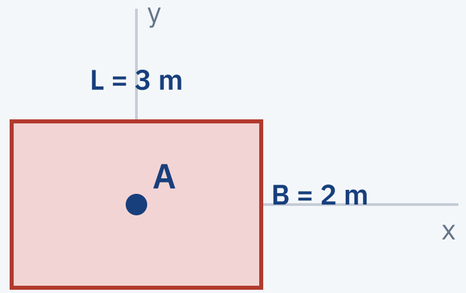
BEISPIEL

Gegeben

Last	**elastisches Rechteck: $L = 3$ m (Richtung x), $B = 2$ m, $q = 300$ kN/m²**
Punkt A	**unterhalb des Mittelpunkts, $z = 4$ m; $\mu_s = 0$**
Hinweis	**der Mittelpunkt ist der gemeinsame Eckpunkt von vier gleichen Eckrechtecken**

GESUCHT

$\Delta\sigma_z$ nach dem Verfahren des Rechtecks mit der Lastangriffsstelle in einer Ecke und der Wert nach Boussinesq; Tabelle der Änderung mit der Tiefe.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Vier gleiche Eckrechtecke (1.5 m × 1.0 m)

$$m = \frac{1.0}{4} = 0.2500\,, \quad n = \frac{1.5}{4} = 0.3750\,, \quad \eta^2 = 0.5000$$

2 I_w (für jedes Eckrechteck)

$$\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\eta^4}{m^2n^2}} = \sqrt{0.5\,(23.1111)+28.4444} = \sqrt{40} = 6.3246$$

$$I_w = \frac{1}{2\pi}\cot^{-1}(6.3246) = \frac{0.15682}{2\pi} = \mathbf{0.02496}$$

Für jedes Eckrechteck ergibt sich $\mathbf{I_w = 0.02496}$; der Mittelpunkt ist der gemeinsame Eckpunkt der vier gleichen Eckrechtecke.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

3 Spannung (4 Eckrechtecke) und Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = 4\,q\,I_w = 4\,(300)\,(0.02496) = \mathbf{29.95}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 4\,q\,I_3(0.25;0.375) = 4\,(300)\,(0.03830) = 45.96\ \mathrm{kN/m^2}$$

4 Gleiches Verfahren in jeder Tiefe (m = 1.0/z, n = 1.5/z)

z (m)	1	2	4	6	8	12
$\Delta\sigma_z$ nach Westergaard (kN/m²)	**158.69**	**82.80**	**29.95**	**14.62**	**8.52**	**3.89**
$\Delta\sigma_z$ nach Boussinesq (kN/m²)	232.37	128.49	45.96	22.21	12.88	5.86
Verhältnis W/B	0.683	0.644	0.652	0.658	0.662	0.664

Die Spannung nach Westergaard ist in jeder Tiefe kleiner als die nach Boussinesq: 158.69 und 232.37 kN/m² bei z = 1 m, 3.89 und 5.86 kN/m² bei z = 12 m. Das Verhältnis liegt im Bereich z = 1–12 m zwischen 0.644 und 0.683.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

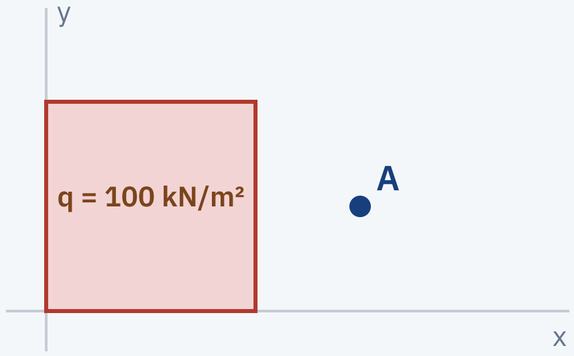
BEISPIEL

Gegeben

Last	**elastisches Quadrat** $[0;\,2] \times [0;\,2]$ **m,** $q = 100$ **kN/m²**
Punkt A	$x = 3$ **m,** $y = 1$ **m (1 m außerhalb der Kante),** $z = 2$ **m**
Baugrund	**zwischen den Platten** $\mu_s = 0$

GESUCHT

Mit dem markierten **Vier-Ecken-Rechteck $\Delta\sigma_z$**; Vergleich mit dem Wert nach Boussinesq.



Lösung

LÖSUNG

1 Abstände von A zu den Ecken a = $x_{Ecke} - x_A$, b = $y_{Ecke} - y_A$; Rechteck aus vier Ecken

Eckrechteck	(a ; b) (m)	m = |a|/z	n = |b|/z	I_w	Vorzeichen
1	(−1 ; 1)	0.50	0.50	0.05409	−
2	(−3 ; 1)	1.50	0.50	0.08745	+
3	(−1 ; −1)	0.50	0.50	0.05409	−
4	(−3 ; −1)	1.50	0.50	0.08745	+

2 Gesamt

$$\Delta\sigma_z = q\,[-I_w(0.5;0.5) + I_w(1.5;0.5) - I_w(0.5;0.5) + I_w(1.5;0.5)]$$

$$= 2q\,[0.08745 - 0.05409] = 200\,(0.03336) = \mathbf{6.673}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 9.466\ \mathrm{kN/m^2}$$

Obwohl der Punkt A außerhalb der Last liegt, erhält er eine Spannung von **6.67 kN/m²**; der Boussinesq-Wert beträgt 9.47 kN/m². Ein einziger Rechenschritt genügt: Von den zwei Rechtecken 3 m × 1 m werden die zwei Rechtecke 1 m × 1 m abgezogen.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

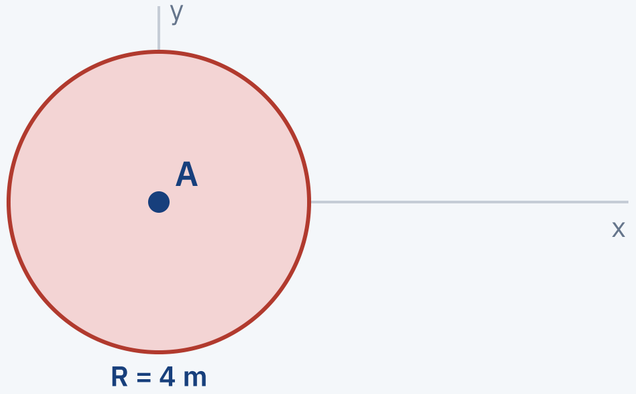
BEISPIEL

Gegeben

Last	**Kreis $R = 4$ m, $q = 300$ kN/m²; $\mu_s = 0$, $z = 4$ m**
Punkt A	**horizontaler Abstand vom Mittelpunkt $r = 0;\ 0.5R;\ R;\ 1.5R;\ 2R;\ 3R$**

GESUCHT

Die Spannungen nach Westergaard und Boussinesq in jedem Abstand (das Polarenintegral des Moduls).



Lösung

LÖSUNG

r (m)	r/R	$\Delta\sigma_z$ nach Westergaard	$\Delta\sigma_z$ nach Boussinesq	Verhältnis W/B
0	0.0	**126.79**	193.93	0.654
2	0.5	**111.97**	168.67	0.664
4	1.0	**69.51**	99.67	0.697
6	1.5	**30.71**	37.99	0.808
8	2.0	**13.75**	12.54	1.096
12	3.0	**4.05**	1.87	2.163

Im Zentrum (r = 0) ergibt sich für den geschlossenen Ausdruck der Wert 126.79 kN/m². Am Kreisrand (r = R) 69.51 kN/m² (Boussinesq: 99.67); mit zunehmendem Abstand vom Kreis nimmt die Westergaard-Spannung langsamer ab und steigt **zwischen r = 1.5R und 2R** über die von Boussinesq (r = 12 m: 4.05 und 1.87 kN/m²).

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

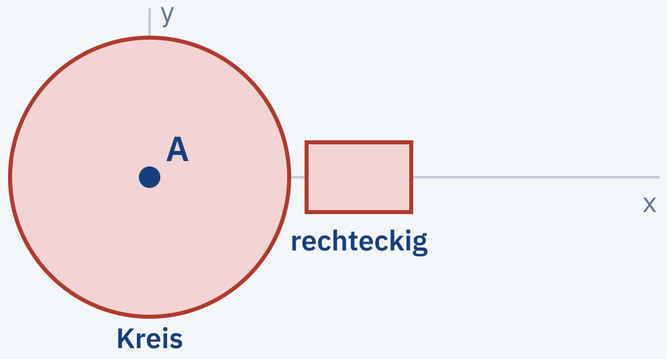
BEISPIEL

Gegeben

Bereich 1	**Kreis $R = 4$ m, $q = 300$ kN/m², Mittelpunkt $(0;\ 0)$**
Fläche 2	**Rechteck 3×2 m (3 m in x-Richtung), $q = 300$ kN/m², Mittelpunkt $(6;\ 0)$**
Punkt A	**$x = 0$, $y = 0$, $z = 4$ m; $\mu_s = 0$ (die Flächen überschneiden sich nicht)**

GESUCHT

Beitrag jeder Fläche, Gesamtspannung und Boussinesq-Summe; Tiefentabelle.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Fläche 1 (Kreis, unterhalb des Mittelpunkts)

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 300\left\{1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R/z)^2}}\right\} = 300\,(0.4226) = \mathbf{126.79}\ \mathrm{kN/m^2} \quad \text{(Beispiel 1)}$$

2 Fläche 2 (Rechteck; x = 4.5 und 7.5 m von A, y = ±1 m)

$$\Delta\sigma_{z(2)} = q\left[I_w\left(\tfrac{7.5}{4};\tfrac{1}{4}\right) - I_w\left(\tfrac{4.5}{4};\tfrac{1}{4}\right)\right] \times 2 = 600\,[0.05048 - 0.04553]$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = 600\,(0.00495) = \mathbf{2.97}\ \mathrm{kN/m^2} \qquad \Delta\sigma_{z(2),B} = 3.18$$

Da das Rechteck A vom Punkt weit entfernt ist, ist sein Beitrag klein: **2.97 kN/m²** (Boussinesq: 3.18). Der Beitrag des Kreises beträgt 126.79 kN/m².

Lösung (2/2)

LÖSUNG

1 Die Spannungen werden summiert (z = 4 m)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 126.79 + 2.97 = \mathbf{129.76}\ \mathrm{kN/m^2}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 193.93 + 3.18 = 197.11\ \mathrm{kN/m^2}$$

2 Tiefenprofil unter demselben Punkt

z (m)	2	4	6	8	12
Bereich 1 (Kreis)	200.00	126.79	81.72	55.05	28.64
Fläche 2 (rechteckig)	1.91	2.97	3.18	2.95	2.17
Gesamt nach Westergaard	**201.91**	**129.76**	**84.90**	**58.00**	**30.81**
Gesamt nach Boussinesq	274.02	197.11	131.63	89.82	47.27

Am Punkt A erzeugen die beiden Flächen zusammen **129.76 kN/m²** (Boussinesq-Summe: 197.11 kN/m²). Der Anteil der Seitenfläche nimmt mit der Tiefe zu: bei z = 12 m beträgt er etwa 7.0 % der Summe.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Zusammenfassung

Die wichtigsten Punkte

Kreis, Mitte: $\Delta\sigma_z = q\,\{1 - \eta/[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}\}$, $\eta = \sqrt{[(1 - 2\mu_s)/(2 - 2\mu_s)]}$; **Rechteck, Ecke**: $\Delta\sigma_z = q\,I_w$, $I_w = (1/2\pi)\,\cot^{-1}\sqrt{[\eta^2(1/m^2 + 1/n^2) + \eta^4/(m^2n^2)]}$

Beispiel (R = 4 m, q = 300, z = 4 m, $\mu_s = 0$): $\eta = 0.7071$; $\Delta\sigma_z/q = 0.4226$ → **$\Delta\sigma_z = 126.79$ kN/m²**; Boussinesq 193.93 kN/m²

Rechteck: an der Ecke (2 m × 2 m, z = 2 m) $I_w = 0.1161$; im Zentrum vier gleiche Eckrechtecke (3 × 2 m, z = 4 m: 29.95 kN/m²); am außerhalb liegenden Punkt vier **vorzeichenbehaftete** Eckrechtecke (6.67 kN/m²)

Mit zunehmendem **μ_s** wächst die Spannung unter der Mitte (0 → 0.4: 126.79 → 186.61 kN/m²); bei $\mu_s = 0$ beträgt die Westergaard-Spannung unter der Last etwa 65 % der Boussinesq-Spannung, und in der Ferne von der Last kehrt sich diese Reihenfolge um

Superposition: jede Fläche wird mit ihrem eigenen Abstand behandelt, die Spannungen werden summiert (Kreis + Rechteck: 129.76 kN/m²)

Literatur

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1938). A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics: soft material reinforced by numerous strong horizontal sheets. In Contributions to the Mechanics of Solids, Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume. Macmillan, New York, 268–277.

HINWEIS

Alle Zahlenbeispiele wurden mit der Rechenkern des Moduls selbst erzeugt; das Modul liefert dieselben Werte. Das Einstiegsbeispiel des Moduls: Kreis R = 4 m, q = 300 kN/m², μ_s = 0, unterhalb des Mittelpunkts bei z = 4 m.

GeoTerva

Geotechnische Berechnungen online

Von der Theorie zur Praxis

Geben Sie Ihre eigenen Kreise und Rechtecke, den Punkt A und den Wert μ_s in GeoTerva ein; das Modul liefert η, die I_W-Werte, die Eckrechtecke, den Vergleich mit Boussinesq, das Tiefenprofil, die schrittweise Lösung und den Bericht zusammen.

Modul öffnen →

Theorieseite →

Auf dem Smartphone öffnen

Die Beispielmodule erfordern keine Registrierung.

Falls Sie sie in Ihren Vorlesungen verwenden möchten: info@geoterva.com