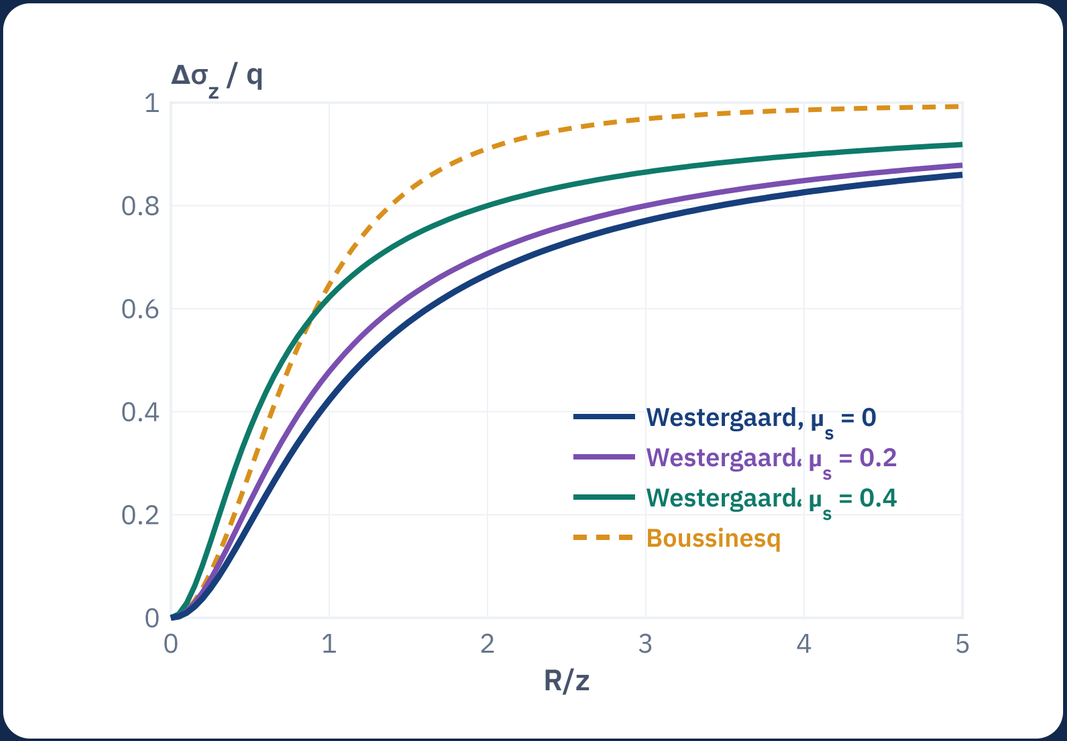


شرائح محاضرات الجيوتكنيك · الإجهادات في التربة

Westergaard: الإجهاد تحت حمل مساحي

المحاضرة: الإجهاد تحت دائرة ومستطيل محملين بحمل منتظم التوزيع في وسط Westergaard؛ يحل مركز الدائرة وركن المستطيل يدوياً.

وسط Westergaard · مركز الدائرة · ركن المستطيل · مستطيلات الركن · التراكب

يستند إلى صفحة النظرية في GeoTerva · geoterva.com

ماذا سنتعلم في هذه المحاضرة؟

- **تكامل حل Westergaard للحمل النقطي على مساحة محملة**: نتيجتان مغلقتان
- أسفل **مركز الدائرة**: $\Delta\sigma_z = q\,\{1 - \eta/[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}\}$
- تحت **ركن المستطيل**: $\Delta\sigma_z = q\,I_W$؛ أما للنقاط الأخرى فتستخدم **المستطيلات الركنية الأربعة** ذات الإشارات
- مقارنة إجهادات Westergaard و**Boussinesq**؛ تأثير نسبة بواسون μ_s
- **تراكب** عدة مساحات؛ التغير مع العمق

تسلسل المحاضرة

يعالج كل موضوع في **ثلاث خطوات**:

1. **النظرية**: المعادلة ومبرراتها
2. **المسألة**: المعطيات والمطلوب
3. **الحل**: خطوة بخطوة، بالأرقام

مثال: مساحة دائرية مرنة، $R = 4\ m$، $q = 300\ kN/m^2$؛ على العمق $z = 4\ m$ تحت المركز؛ وفي التربة بين اللوحين $\mu_s = 0$.

مناطق محملة في وسط Westergaard

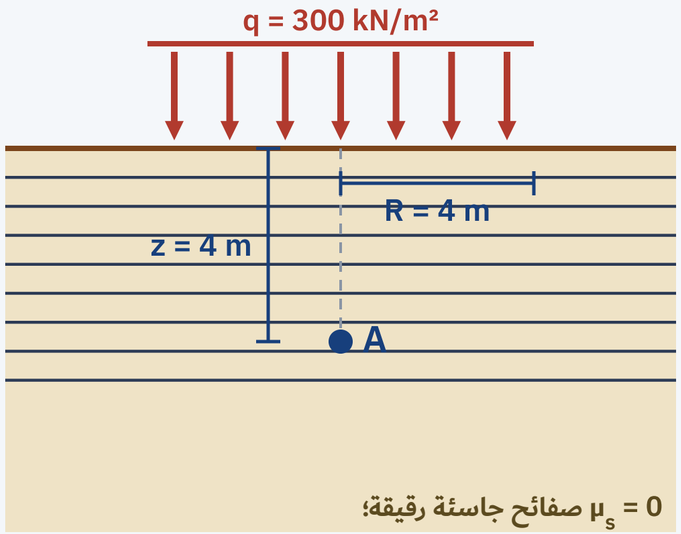
النظرية

حل Westergaard للحمل النقطي يمكن **تكامله على مساحة محملة**، كما فعل مع حل Boussinesq في حالتي الدائرة والمستطيل

يمكن الحصول لمساحة مرنة محملة بحمل منتظم التوزيع على **نتيجتين بصيغة مغلقة**: الإجهاد تحت **مركز الدائرة** والإجهاد تحت **ركن المستطيل**

μ_s هي نسبة بواسون للتربة بين الطبقات الجاسئة؛ وعند $\mu_s = 0$ تكون $\eta = 1/\sqrt{2}$

$$\eta = \sqrt{\frac{1 - 2\mu_s}{2 - 2\mu_s}}$$



تحت المركز

النظرية

تحت مركز مساحة دائرية مرنة نصف قطرها **R** ومحملة بحمل منتظم التوزيع:

$$\Delta\sigma_z = q\left\{1 - \frac{\eta}{\left[\eta^2 + (R/z)^2\right]^{1/2}}\right\}$$

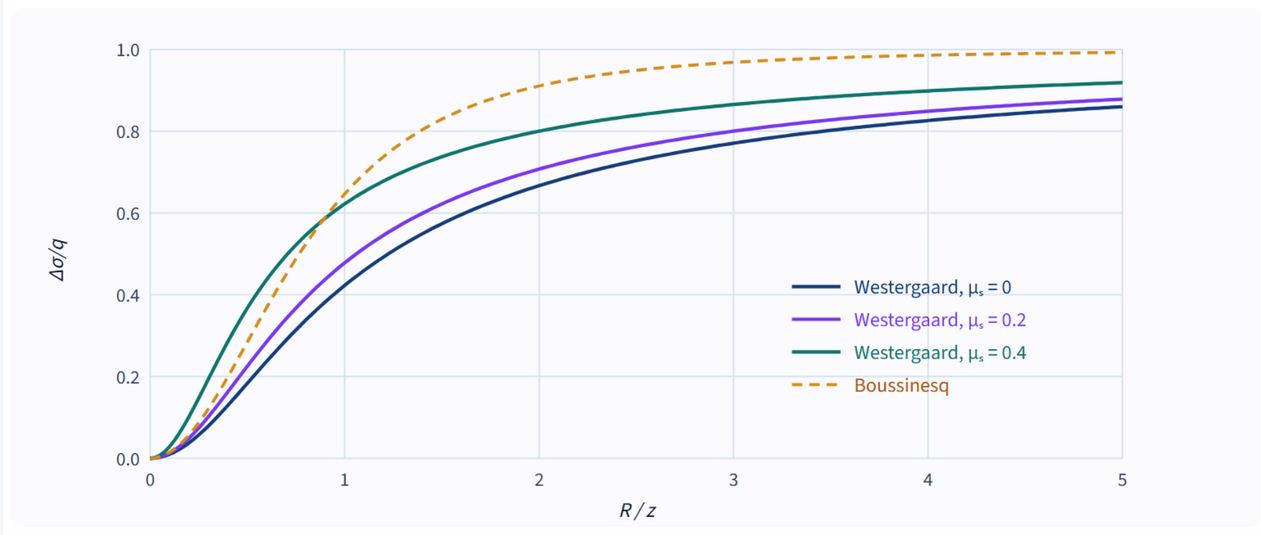
تستخلص العلاقة من حل الحمل النقطي: العنصر **r dr dα** يحمل الحمل **q r dr dα**؛ ويؤخذ التكامل على r بقيمة التأثير **I_5** للحمل النقطي بدلالة دوال أولية

$$\Delta\sigma_z = q\int_0^R \frac{r\,dr}{\eta^2 z^2}\left[\left(\frac{r}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-3/2} = q\left\{1 - \left[\left(\frac{R}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}\right\}$$

النظرية

تغير قيمة $\Delta\sigma_z/q$ مع R/z

10	5	4	3	2.5	2	1.5	1.25	1	0.75	0.5	0.25	R/z
0.9295	0.8600	0.8259	0.7706	0.7278	0.6667	0.5736	0.5076	0.4226	0.3140	0.1835	0.0572	Westergaard ($\mu_s = 0$)
0.9990	0.9925	0.9857	0.9684	0.9488	0.9106	0.8293	0.7562	0.6464	0.4880	0.2845	0.0869	Boussinesq



تحت الركن: I_w

النظرية

تحت ركن مستطيل مرن أبعاده **B × L** يحمل حملاً منتظم التوزيع، حيث **m = B/z** و**n = L/z**:

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{2\pi}\left[\cot^{-1}\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\eta^4\left(\frac{1}{m^2 n^2}\right)}\right] = q\,I_w$$

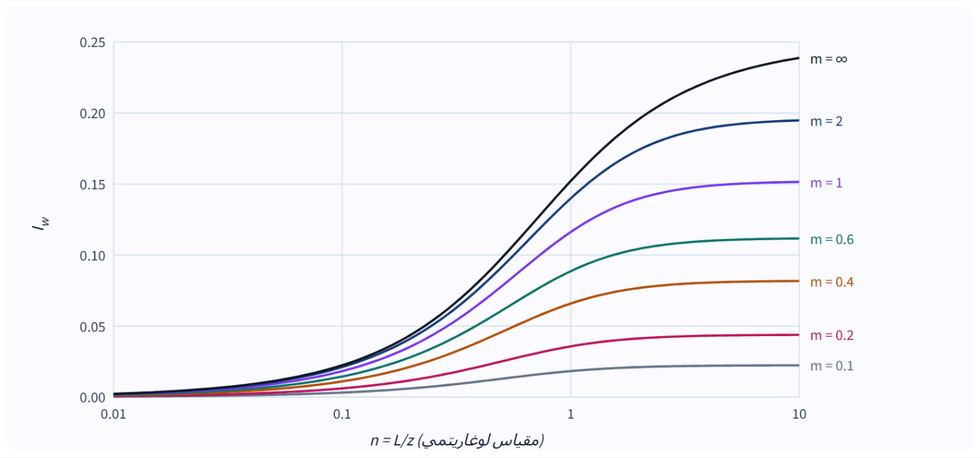
بالنسبة إلى جميع النقاط الأخرى، كما في مستطيل Boussinesq، تستخدم **أربعة مستطيلات ركنية بإشارات جبرية**؛ وتجري الوحدة هذه العملية

$$\Delta\sigma_z = q\,\left[\pm I_w(m_1,n_1) \pm I_w(m_2,n_2) \pm I_w(m_3,n_3) \pm I_w(m_4,n_4)\right]$$

قيم I_w ($\mu_s = 0$)

النظرية

n = 10	n = 5	n = 2	n = 1	n = 0.4	n = 0.1	m
0.0223	0.0221	0.0211	0.0182	0.0110	0.0031	0.1
0.0438	0.0434	0.0413	0.0357	0.0214	0.0061	0.2
0.0977	0.0969	0.0916	0.0781	0.0459	0.0129	0.5
0.1515	0.1498	0.1398	0.1161	0.0658	0.0182	1
0.1948	0.1916	0.1743	0.1398	0.0768	0.0211	2
0.2341	0.2250	0.1948	0.1515	0.0817	0.0223	10



التكامل القطبي للدائرة

النظرية

لا توجد علاقة مغلقة للنقاط الواقعة خارج مركز الدائرة: فتُجري الوحدة تكامل حل Westergaard للحمل النقطي على الدائرة **بالإحداثيات القطبية** بالنسبة إلى النقطة الواقعة أسفل النقطة A

على امتداد كل شعاع يكون التكامل الشعاعي في صيغة مغلقة؛ والتكامل الزاوي وحده عددي. وعند المركز (r = 0) يؤول هذا الناتج إلى العلاقة المغلقة أعلاه

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\oint \left[G(\rho_1) - G(\rho_2)\right] d\varphi \qquad G(\rho) = \left[\left(\frac{\rho}{\eta z}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}$$

التراكب

النظرية

يمكن إدخال دوائر ومستطيلات، يعرف كل منها بقيمته **q** وأبعاده ومركزه على الأرض (حتى ثمانية كحد أقصى)؛ ويجوز أن تتلامس منطقتان لكن لا يجوز أن تتداخلا

ولأن وسط Westergaard وسط **مرن** يُوجد إجهاد كل مساحة من بُعدها الخاص عن النقطة A ثم **تُجمع** الإجهادات؛ وتُجمع قيمة المقارنة لـ Boussinesq بالطريقة نفسها

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_k \left\{ 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R_k/z)^2}} \right\} \quad \text{أو} \quad q_k \sum \pm I_w$$

المسألة

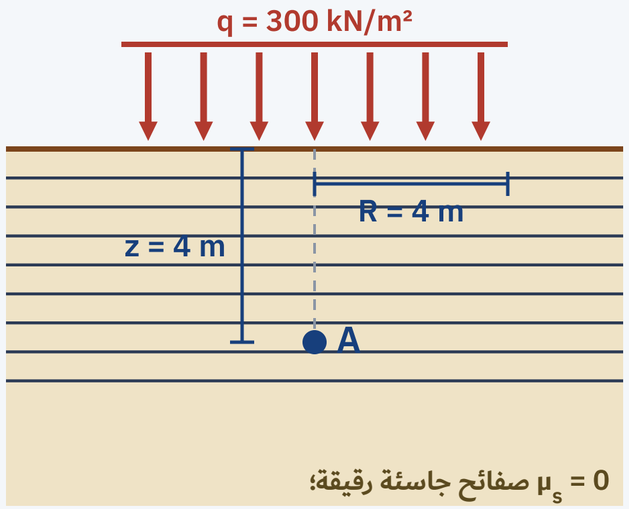
مثال

المعطيات

الحمل	**مساحة دائرية مرنة بحمل منتظم التوزيع:** $q = 300$ **kN/m²**، $R = 4$ **m**
النقطة A	$z = 4$ **m أسفل مركز الدائرة،**
التربة	$\mu_s = 0$ **بين الألواح**

المطلوب

$\Delta\sigma_z$، $\Delta\sigma_z/q$، R/z، η والمقارنة مع إجهاد Boussinesq.



الحل (1/2)

الحل

1 ثابت Westergaard η

$$\eta = \sqrt{\frac{1-2\mu_s}{2-2\mu_s}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \mathbf{0.7071} \qquad \eta^2 = 0.5000$$

2 النسبة والإجهاد

$$\frac{R}{z} = \frac{4}{4} = 1 \qquad \sqrt{\eta^2 + (R/z)^2} = \sqrt{0.5000 + 1} = 1.2247$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R/z)^2}} = 1 - \frac{0.7071}{1.2247} = \mathbf{0.4226}$$

$$\Delta\sigma_z = q\,\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 300\,(0.4226) = \mathbf{126.79}\ \text{kN/m}^2$$

نحصل على إجهاد **126.79 kN/m²** Westergaard (42.3% من q).

الحل (2/2)

الحل

4 Boussinesq (للمقارنة)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{1}{\left[(R/z)^2 + 1\right]^{3/2}} = 1 - \frac{1}{2^{3/2}} = \mathbf{0.6464}$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 300\,(0.6464) = \mathbf{193.93}\ \text{kN/m}^2 \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{\Delta\sigma_{z,B}} = \frac{126.79}{193.93} = 0.654$$

ولما كانت الصفائح الجاسئة تنشر الحمل: Westergaard **126.79 kN/m²**، Boussinesq **193.93 kN/m²**
جانبياً فإن إجهاد Westergaard تحت المركز لا يبلغ إلا **65.4%** من إجهاد Boussinesq.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

مثال

المعطيات

الحمل — دائرة $R = 4$ m، $q = 300$ kN/m²، $\mu_s = 0$

الأعماق — $z = 0.4;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12$ m ($z/R = 0.1 \ldots 3$)

المطلوب

عند كل عمق **$\Delta\sigma_z/q$**، إجهادات Westergaard وBoussinesq؛ تحقق يدوي عند $z = 2$ m و12 m.

الحل (1/2)

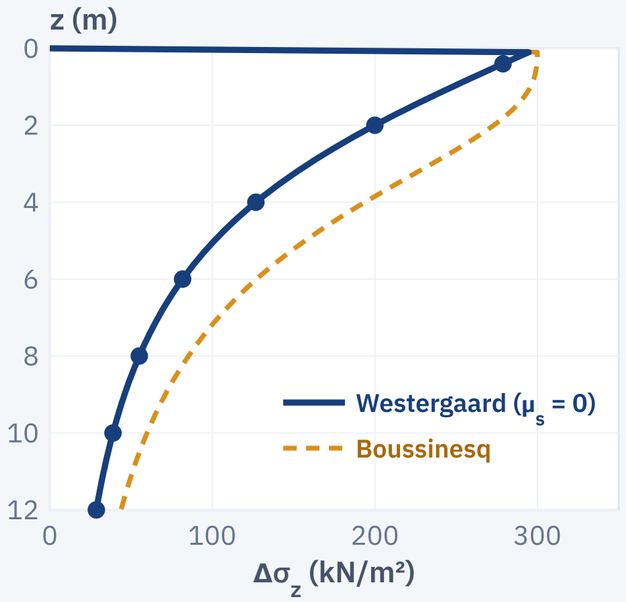
الحل

نسبة W/B	$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	$\Delta\sigma_z/q$	R/z	z/R	z (m)
0.930	299.70	**278.84**	0.9295	10.00	0.1	0.4
0.732	273.17	**200.00**	0.6667	2.00	0.5	2
0.654	193.93	**126.79**	0.4226	1.00	1.0	4
0.642	127.19	**81.72**	0.2724	0.67	1.5	6
0.645	85.34	**55.05**	0.1835	0.50	2.0	8
0.649	59.88	**38.88**	0.1296	0.40	2.5	10
0.653	43.86	**28.64**	0.0955	0.33	3.0	12

إجهاد Westergaard أصغر من إجهاد Boussinesq عند كل عمق (z = 4 m: 126.79 و 193.93 kN/m²؛ z = 12 m: 28.64 و 43.86 kN/m²). وتبدأ النسبة بالقيمة 0.930 قرب السطح، وتصبح 0.654 عند z = 4 m، وتبقى نحو 0.65 في العمق.

الحل (2/2)

الحل



1 z = 2 m (R/z = 2)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.7071}{\sqrt{0.5000 + 4}} = 1 - \frac{0.7071}{2.1213} = \mathbf{0.6667}$$

$$\Delta\sigma_z = 300\,(0.6667) = \mathbf{200.00}\ \text{kN/m}^2$$

2 z = 12 m (R/z = 1/3)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.7071}{\sqrt{0.5000 + 0.1111}} = 1 - \frac{0.7071}{0.7817} = \mathbf{0.0955}$$

$$\Delta\sigma_z = 300\,(0.0955) = \mathbf{28.64}\ \text{kN/m}^2$$

عند z = 2 m يساوي الإجهاد تماماً **2q/3 = 200.00 kN/m²** (Boussinesq: 273.17)؛ وعند z = 12 m يساوي **28.64 kN/m²** (Boussinesq: 43.86).

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

مثال

المعطيات

الحمل والنقطة	**الدائرة** $R = 4$ m، $q = 300$ kN/m²، **أسفل المركز** $z = 4$ m
المتغير	$\mu_s = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.49$

المطلوب

لكل قيمة من **η** :μ_s و **$\Delta\sigma_z/q$** و **$\Delta\sigma_z$** ونسبتها إلى قيمة Boussinesq؛ ويدوياً من أجل μ_s = 0.2 و 0.4.

الحل (1/2)

الحل

$\Delta\sigma_z$ / Boussinesq	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	$\Delta\sigma_z/q$	η	μ_s
0.654	**126.79**	0.4226	0.7071	0.00
0.689	**133.59**	0.4453	0.6667	0.10
0.739	**143.33**	0.4778	0.6124	0.20
0.818	**158.58**	0.5286	0.5345	0.30
0.962	**186.61**	0.6220	0.4082	0.40
1.332	**258.40**	0.8613	0.1400	0.49

يزداد إجهاد Westergaard تحت المركز كلما زادت μ_s: 126.79 عند $\mu_s = 0$ و 186.61 kN/m² عند $\mu_s = 0.4$ (Boussinesq: 193.93). وعند $\mu_s = 0.49$ **يتجاوز** قيمة Boussinesq إذ يبلغ 258.40 kN/m².

الحل (2/2)

الحل

1 $\mu_s = 0.2$

$$\eta^2 = \frac{1 - 0.4}{2 - 0.4} = 0.3750\,, \quad \eta = 0.6124\,, \quad \sqrt{\eta^2 + 1} = 1.1726$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.6124}{1.1726} = 0.4778 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = 300\,(0.4778) = \mathbf{143.33}\ \text{kN/m}^2$$

2 $\mu_s = 0.4$

$$\eta^2 = \frac{1 - 0.8}{2 - 0.8} = 0.1667\,, \quad \eta = 0.4082\,, \quad \sqrt{\eta^2 + 1} = 1.0801$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 1 - \frac{0.4082}{1.0801} = 0.6220 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = 300\,(0.6220) = \mathbf{186.61}\ \text{kN/m}^2$$

بتناقص η يزداد الإجهاد: **143.33** → (μ_s = 0.2 → 0.4) **186.61 kN/m²**.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

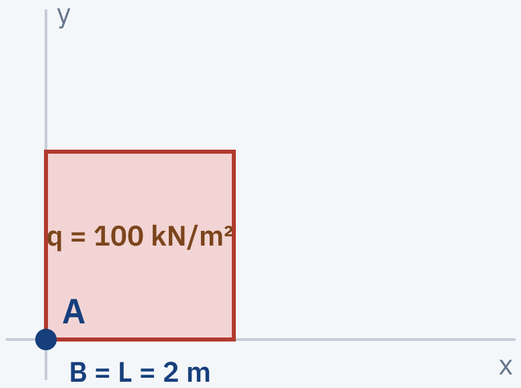
مثال

المعطيات

الحمل	مربع مرن موزع بانتظام: $B = L = 2$ m، $q = 100$ kN/m²
النقطة A	أسفل إحدى زوايا المربع، $z = 2$ m
التربة	بين الألواح $\mu_s = 0$

المطلوب

m و **n** و $\mathbf{I_W}$ و $\mathbf{\Delta\sigma_z}$؛ والمقارنة مع قيمة Boussinesq؛ وأثر μ_s.



الحل (1/2)

الحل

1 m و n و η

$$m = \frac{B}{z} = \frac{2}{2} = 1\,, \quad n = \frac{L}{z} = 1\,, \quad \eta^2 = \frac{1}{2} = 0.5000$$

2 قيمة التأثير I_W

$$\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\eta^4}{m^2n^2}} = \sqrt{0.5\,(2)+0.25} = \sqrt{1.25} = 1.1180$$

$$I_w = \frac{1}{2\pi}\cot^{-1}(1.1180) = \frac{0.7297}{2\pi} = \mathbf{0.1161}$$

تحت ركن المربع عند z = 2 m نحصل على **I_W = 0.1161** (قيمة الجدول في الصفحة: $I_W(1;1) = 0.1161$).

الحل (2/2)

الحل

3 الإجهاد و Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = q\, I_w = 100\,(0.1161) = \mathbf{11.61}\ \text{kN/m}^2$$

$$\text{Boussinesq: } I_3(1;1) = 0.1752 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z,B} = \mathbf{17.52}\ \text{kN/m}^2$$

$\Delta\sigma_{z,B}$ (kN/m²)	Boussinesq I_3	$\Delta\sigma_z = q\, I_w$ (kN/m²)	I_w (m = n = 1)	η	μ_s
17.52	0.1752	**11.61**	0.1161	0.7071	0.0
17.52	0.1752	**12.96**	0.1296	0.6124	0.2
17.52	0.1752	**14.18**	0.1418	0.5345	0.3
17.52	0.1752	**16.39**	0.1639	0.4082	0.4

تحت ركن المربع يبلغ إجهاد Westergaard **11.61 kN/m²** وإجهاد Boussinesq 17.52 kN/m² (النسبة 0.663). وتزداد I_w بازدياد μ_s: 0.1161 → 0.1639 (μ_s = 0 → 0.4)؛ أما قيمة Boussinesq فهي I_3 = 0.1752.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

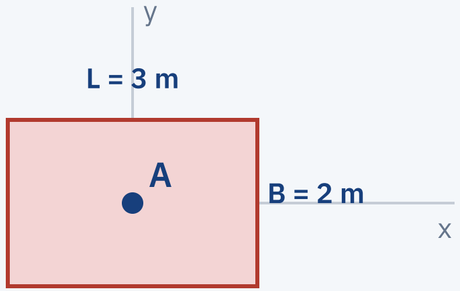
مثال

المعطيات

الحمل	**مستطيل مرن:** $L = 3$ m (اتجاه x)، $B = 2$ m، $q = 300$ kN/m²
النقطة A	**أسفل المركز،** $z = 4$ m؛ $\mu_s = 0$
تلميح	**المركز هو الركن المشترك لأربعة مستطيلات متطابقة**

المطلوب

قيمة $\Delta\sigma_z$ بطريقة المستطيل ذي الزوايا الأربع وقيمة Boussinesq؛ جدول التغير مع العمق.



الحل (1/2)

الحل

1 أربعة مستطيلات زوايا متساوية (1.5 m × 1.0 m)

$$m = \frac{1.0}{4} = 0.2500\,, \quad n = \frac{1.5}{4} = 0.3750\,, \quad \eta^2 = 0.5000$$

2 I_W (لكل مستطيل زاوية)

$$\sqrt{\eta^2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\eta^4}{m^2 n^2}} = \sqrt{0.5\,(23.1111)+28.4444} = \sqrt{40} = 6.3246$$

$$I_w = \frac{1}{2\pi}\cot^{-1}(6.3246) = \frac{0.15682}{2\pi} = \mathbf{0.02496}$$

لكل مستطيل ركني نحصل على **I_W = 0.02496**؛ والمركز هو الركن المشترك لأربعة مستطيلات ركنية متطابقة.

الحل (2/2)

الحل

3 الإجهاد (4 مستطيلات ركنية) وBoussinesq

$$\Delta\sigma_z = 4\,q\,I_w = 4\,(300)\,(0.02496) = \mathbf{29.95}\ \text{kN/m}^2$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 4\,q\,I_3(0.25;\,0.375) = 4\,(300)\,(0.03830) = 45.96\ \text{kN/m}^2$$

4 الطريقة نفسها عند كل عمق (m = 1.0/z، n = 1.5/z)

z (m)	1	2	4	6	8	12
$\Delta\sigma_z$ Westergaard (kN/m²)	**158.69**	**82.80**	**29.95**	**14.62**	**8.52**	**3.89**
$\Delta\sigma_z$ وفق Boussinesq (kN/m²)	232.37	128.49	45.96	22.21	12.88	5.86
نسبة W/B	0.683	0.644	0.652	0.658	0.662	0.664

إجهاد Westergaard أصغر من إجهاد Boussinesq عند كل عمق: 158.69 و 232.37 kN/m² عند z = 1 m، و 3.89 و 5.86 kN/m² عند z = 12 m. وتبقى النسبة بين 0.644 و 0.683 في المدى z = 1–12 m.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

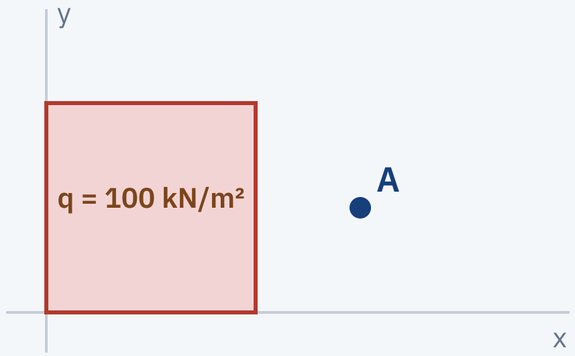
مثال

المعطيات

الحمل	مربعة مرنة $[0;\,2]\times[0;\,2]$ m، $q = 100$ kN/m²
النقطة A	$x = 3$ m، $y = 1$ m (على بعد 1 m خارج الحافة)، $z = 2$ m
التربة	بين الألواح $\mu_s = 0$

المطلوب

$\Delta\sigma_z$ بواسطة **مستطيل الزوايا الأربع** المحدد؛ ومقارنة مع قيمة Boussinesq.



الحل

الحل

1 المسافات من A إلى الأركان $b = y_{corner} - y_A$ ، $a = x_{corner} - x_A$؛ والمستطيلات الركنية الأربعة

مستطيل الزاوية	(m) (a ; b)	m = |a|/z	n = |b|/z	I_w	الإشارة
1	(1 ; 1–)	0.50	0.50	0.05409	–
2	(1 ; 3–)	1.50	0.50	0.08745	+
3	(1– ; 1–)	0.50	0.50	0.05409	–
4	(1– ; 3–)	1.50	0.50	0.08745	+

2 المجموع

$$\Delta\sigma_z = q\,[-I_w(0.5;0.5) + I_w(1.5;0.5) - I_w(0.5;0.5) + I_w(1.5;0.5)]$$

$$= 2q\,[0.08745 - 0.05409] = 200\,(0.03336) = \mathbf{6.673}\ \text{kN/m}^2$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 9.466\ \text{kN/m}^2$$

تتلقى النقطة A إجهاداً قدره **6.67 kN/m²** مع أنها تقع خارج الحمل؛ وقيمة Boussinesq هي 9.47 kN/m².
والعملية الوحيدة المطلوبة هي طرح المستطيلين 1 m × 1 m من المستطيلين 1 m × 3 m.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

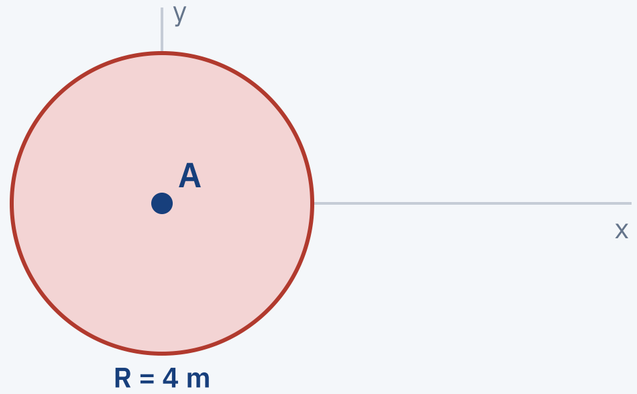
مثال

المعطيات

الحمل	دائرة $R = 4$ m، $q = 300$ kN/m²؛ $\mu_s = 0$، $z = 4$ m
النقطة A	المسافة الأفقية من المركز $r =$ $0;\ 0.5R;\ R;\ 1.5R;\ 2R;\ 3R$

المطلوب

إجهادات Westergaard و Boussinesq عند كل مسافة (التكامل القطبي للوحدة).



الحل

الحل

نسبة W/B	$\Delta\sigma_z$ Boussinesq	$\Delta\sigma_z$ Westergaard	r/R	r (m)
0.654	193.93	**126.79**	0.0	0
0.664	168.67	**111.97**	0.5	2
0.697	99.67	**69.51**	1.0	4
0.808	37.99	**30.71**	1.5	6
1.096	12.54	**13.75**	2.0	8
2.163	1.87	**4.05**	3.0	12

عند المركز (r = 0) تبلغ قيمة العلاقة المغلقة 126.79 kN/m². وعند حافة الدائرة (r = R) تبلغ 69.51 kN/m² (Boussinesq: 99.67)؛ وبالابتعاد عن الدائرة يتناقص إجهاد Westergaard ببطء أكبر ويتجاوز إجهاد Boussinesq **بين r = 1.5R و 2R** (عند r = 12 m: 4.05 و 1.87 kN/m²).

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

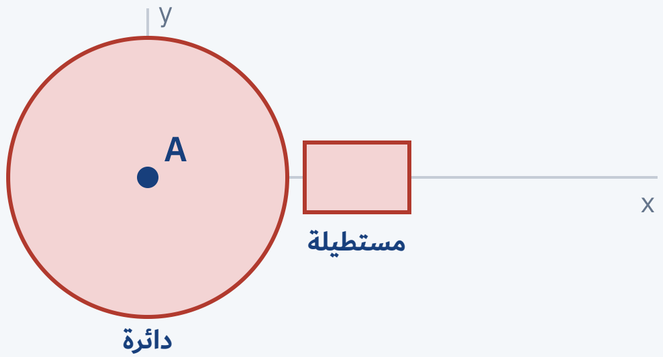
مثال

المعطيات

المساحة 1	دائرة $R = 4$ m، $q = 300$ kN/m²، المركز $(0;\ 0)$
المساحة 2	مستطيل 3×2 m (3 m في اتجاه x)، $q = 300$ kN/m²، المركز $(6;\ 0)$
النقطة A	$x = 0$, $y = 0$, $z = 4$ m؛ $\mu_s = 0$ (المساحات لا تتداخل)

المطلوب

مساهمة كل منطقة، والإجهاد الكلي ومجموع Boussinesq؛ وجدول الأعماق.



الحل (1/2)

الحل

1 المنطقة 1 (دائرة، أسفل المركز)

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 300\left\{1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (R/z)^2}}\right\} = 300\,(0.4226) = \mathbf{126.79}\ \text{kN/m}^2 \quad \text{(مثال 1)}$$

2 المساحة 2 (مستطيل؛ x = 4.5 و 7.5 m من A، y = ±1 m)

$$\Delta\sigma_{z(2)} = q\left[I_w\left(\tfrac{7.5}{4};\tfrac{1}{4}\right) - I_w\left(\tfrac{4.5}{4};\tfrac{1}{4}\right)\right] \times 2 = 600\,[0.05048 - 0.04553]$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = 600\,(0.00495) = \mathbf{2.97}\ \text{kN/m}^2 \qquad \Delta\sigma_{z(2),B} = 3.18$$

لأن المستطيل A بعيد عن النقطة فإن إسهامه صغير: **2.97 kN/m²** (Boussinesq: 3.18). أما إسهام الدائرة فيبلغ 126.79 kN/m².

الحل (2/2)

الحل

1 تُجمع الإجهادات (z = 4 m)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 126.79 + 2.97 = \mathbf{129.76}\ \text{kN/m}^2$$

$$\Delta\sigma_{z,B} = 193.93 + 3.18 = 197.11\ \text{kN/m}^2$$

2 مقطع العمق تحت النقطة نفسها

z (m)	2	4	6	8	12
المساحة 1 (دائرة)	200.00	126.79	81.72	55.05	28.64
المساحة 2 (مستطيلة)	1.91	2.97	3.18	2.95	2.17
Westergaard الكلي	**201.91**	**129.76**	**84.90**	**58.00**	**30.81**
Boussinesq الكلي	274.02	197.11	131.63	89.82	47.27

عند النقطة A تولّد المساحتان معاً **129.76 kN/m²** (مجموع Boussinesq: 197.11 kN/m²). وتزداد حصة المساحة الجانبية مع العمق: فعند z = 12 m تبلغ نحو 7.0% من المجموع.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

النقاط الرئيسية

دائرة، المركز: $\eta = \sqrt{[(1 - 2\mu_s)/(2 - 2\mu_s)]}$، $\Delta\sigma_z = q\,\{1 - \eta/[\eta^2 + (R/z)^2]^{1/2}\}$؛ **مستطيل، الركن:** $I_W = (1/2\pi)\,\cot^{-1}\sqrt{[\eta^2(1/m^2 + 1/n^2) + \eta^4/(m^2n^2)]}$، $\Delta\sigma_z = q\,I_W$

مثال ($R = 4$ m، $q = 300$، $z = 4$ m، $\mu_s = 0$): $\eta = 0.7071$؛ $\Delta\sigma_z/q = 0.4226 \rightarrow$ **$\Delta\sigma_z = 126.79$ kN/m²**؛ حل Boussinesq: 193.93 kN/m²

المستطيل: عند الركن (2 m × 2 m، $z = 2$ m) $I_W = 0.1161$؛ وعند المركز أربعة مستطيلات ركنية متساوية (3 × 29.95 kN/m²: 2 m، $z = 4$ m)؛ وعند النقطة الواقعة خارج المستطيل أربعة مستطيلات ركنية **بإشارات جبرية** (6.67 kN/m²)

كلما زادت **μ_s** ازداد الإجهاد تحت المركز (من 0 إلى 0.4: 126.79 kN/m² → 186.61 kN/m²)؛ وعند $\mu_s = 0$ يبلغ إجهاد Westergaard تحت الحمل نحو 65% من إجهاد Boussinesq، وبعيداً عن الحمل ينعكس هذا الترتيب

التراكب: تُعالج كل مساحة بمسافتها الخاصة بها، وتُجمع الإجهادات (دائرة + مستطيل: 129.76 kN/m²)

المراجع

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Westergaard, H.M. (1938). A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics: soft material reinforced by numerous strong horizontal sheets. In Contributions to the Mechanics of Solids, Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume. Macmillan, New York, 268–277.

ملاحظة

جميع الأمثلة العددية مستخرجة بمحرك الحساب الخاص بالوحدة؛ وتعطي الوحدة القيم نفسها. المثال الابتدائي للوحدة: دائرة $R = 4\ m$ و $q = 300\ kN/m^2$ و $\mu_s = 0$، عند $z = 4\ m$ تحت المركز.

حسابات الجيوتكنيك عبر الإنترنت

من النظرية إلى التطبيق

أدخل الدوائر والمستطيلات الخاصة بك والنقطة A وقيمة μ_s في GeoTerva؛ وتقدم الوحدة معا η وقيم I_w والمستطيلات الركنية والمقارنة مع Boussinesq ومخطط التغير مع العمق والحل خطوة بخطوة والتقرير.

افتح الوحدة ←

صفحة النظرية ←

افتح على الهاتف

لا تتطلب الوحدات التجريبية تسجيلاً.

إذا رغبت في استخدامها في محاضراتك: info@geoterva.com