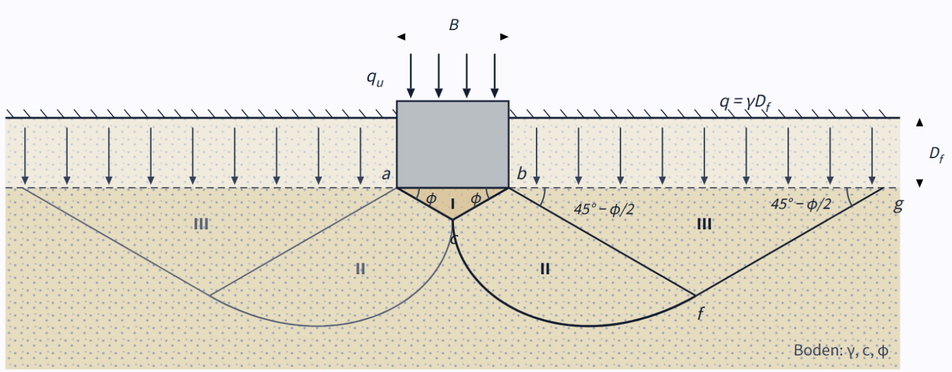
Geotechnische Vorlesungspräsentation · Fundamente

Tragfähigkeit nach Terzaghi

Vorlesung: von Terzaghis Bruchmechanismus und seiner Herleitung zu den Beiwerten N_q, N_c, N_γ, von quadratischen und kreisförmigen Fundamenten zum lokalen Grundbruch und zum Grundwasser; zu jedem Thema ein Rechenbeispiel.



Drei Zonen · Logarithmische Spirale · $N_c \cdot N_q \cdot N_\gamma$ · Quadratisches und kreisförmiges Fundament · Lokaler Grundbruch · Rechenbeispiele

Einführung

Was lernen wir in dieser Vorlesung?

- die **Annahmen** der Terzaghi-Gleichung und die Unterscheidung zwischen **allgemeinem / lokalem Grundbruch**
- Das Versagensmechanisma (**drei Zonen**, logarithmische Spirale) und die Zerlegung der passiven Kraft in drei Anteile nachzuvollziehen
- Die Beiwerte $\mathbf{N_q}$ **und** $\mathbf{N_c}$ aus geschlossenen Formeln und $\mathbf{N_\gamma}$ aus der Tabelle nach Kumbhojkar zu bestimmen
- Die Gleichung für **Streifen-, quadratisches und Kreisfundament** anzugeben; den undränierten Fall ($\varphi = 0$) zu behandeln
- Für den **lokalen Grundbruch** dieselbe Gleichung mit c' und φ' anzuwenden
- Die drei Zustände des **Grundwassers** sowie die Brutto-/Netto-Bodenpressung zu berechnen und das Fundament zu **nachweisen**

VORLESUNGSABLAUF

Jedes Thema wird in **drei Schritten** behandelt:

1 · **Theorie**: Wie lautet die Regel, warum ist sie so?

2 · **Aufgabe**: Gegeben und Gesucht

3 · **Lösung**: Schritt für Schritt, mit Zahlen

Beispielfundament, das beim Öffnen des Moduls geladene Modell: ein quadratisches Fundament 1.5 m × 1.5 m in Boden mit $c = 15.2$ kPa, $\varphi' = 20°$, $\gamma = 17.8$ kN/m³, $D_f = 1$ m, Grundwasserspiegel bei 2 m.

Worauf beruht die Gleichung von Terzaghi?

THEORIE

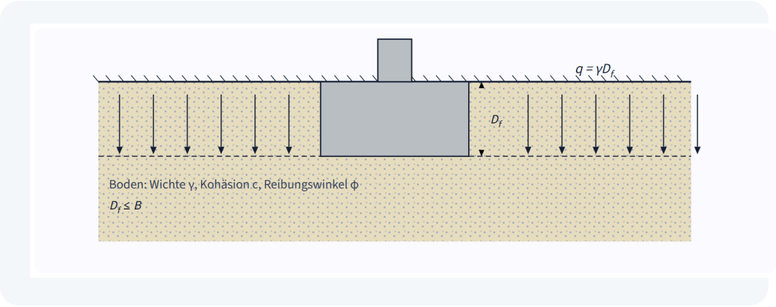
Terzaghi (1943) ermittelte die Tragfähigkeit q_u, also die mittlere Pressung, bei der der Boden unter dem Fundament durch Scherung versagt, aus einem angenommenen Bruchmechanismus und dem Gleichgewicht seiner Teile. Die Herleitung beruht auf folgenden Annahmen:

Das Fundament ist ein **langer Streifen** (ebener Verzerrungszustand), starr und **rau auf der Sohle**: Der Boden darunter kann an der Sohle nicht gleiten und setzt sich zusammen mit dem Fundament als ein einziger Körper ab.

Der Boden unter der Fundamentsohle ist **homogen** und reicht sehr tief; die Last ist **vertikal und mittig**.

Das Fundament ist **flach**, $D_f \le B$: Der Boden über der Sohle nimmt am Mechanismus nicht teil und wirkt nur als **Auflast $q = \gamma D_f$**; die Scherfestigkeit wird vernachlässigt (eine Vereinfachung auf der sicheren Seite).

Der Boden versagt durch **allgemeinen Grundbruch**; der lokale Grundbruch wird anschließend mit reduzierten Parametern behandelt.



Die Scherfestigkeit folgt Mohr–Coulomb:

$$s = c + \sigma' \tan \varphi$$

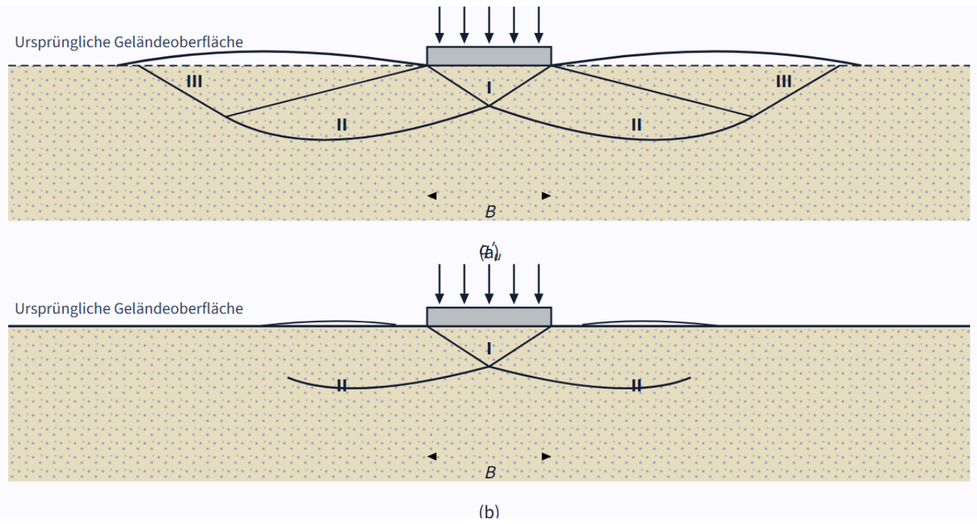
Wie versagt ein Fundament?

THEORIE

Ein Streifenfundament auf dichtem Sand oder steifem Ton werde schrittweise belastet. Die Setzung nimmt zunächst langsam zu; dann läuft die Setzung bei einem bestimmten Druck **ohne Erhöhung der Last** davon: Vom Fundamentrand bis zur Geländeoberfläche hat sich eine durchgehende Gleitfläche ausgebildet, und der Baugrund neben dem Fundament hebt sich. Dies ist der **allgemeine Grundbruch**, und dieser Druck ist $\mathbf{q_u}$.

In **lockerem Sand und weichem Ton** weist die Kurve keinen Höchstpunkt auf: Nach q'_u geht sie in eine steilere, aber noch ansteigende Gerade über; die Gleitflächen bleiben im Boden, die Hebung ist gering: **lokaler Grundbruch**.

Drei Zonen unter dem Fundament: der **Keil (I)**, der sich als ein einziger Körper nach unten bewegt, die vom Keil gedrückte **radiale Zone (II)** und die nach oben und seitlich gedrückte **passive Zone (III)**. Beim lokalen Grundbruch entsteht der Keil in gleicher Weise, jedoch klingen die Zonen II und III im Boden ab, ohne die Oberfläche zu erreichen.



(b)

Drei Zonen und logarithmische Spirale

THEORIE

Terzaghi teilte den Boden auf beiden Seiten in drei Bereiche ein:

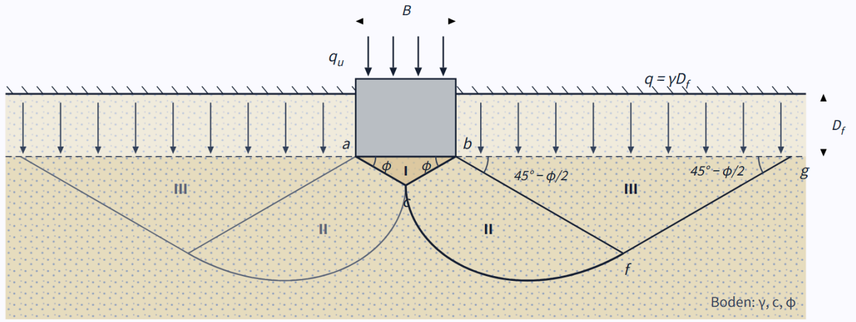
I · Keil abc: Die raue Sohle haftet; der Keil bewegt sich starr mit dem Fundament nach unten. Seine Seiten ac und bc bilden mit der Horizontalen **α = φ**.

II · radiale Zone bcf (Prandtl): Jeder von b ausgehende Strahl ist eine Gleitlinie; die Begrenzung cf ist ein **Logarithmus-Spiralbogen** mit Pol b.

III · passive Rankine-Zone bfg: bf und fg sind gerade Gleitlinien, die mit der Horizontalen einen Winkel von 45° − φ/2 bilden.

$$r = r_0\, e^{\theta \tan\varphi} \qquad \theta_1 = \angle cbf = 180^\circ - \varphi - \left(45^\circ - \tfrac{\varphi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

Eigenschaft der Spirale: In jedem Punkt bildet der vom Pol gezogene Radius mit der Normalen der Kurve den Winkel φ. Folglich erzeugt die Reibung entlang der Spirale bezüglich des Pols **kein Moment**, und das Gleichgewicht wird mit Momenten um diesen Pol formuliert.



Er ist vertikal und wird in drei Teile geteilt

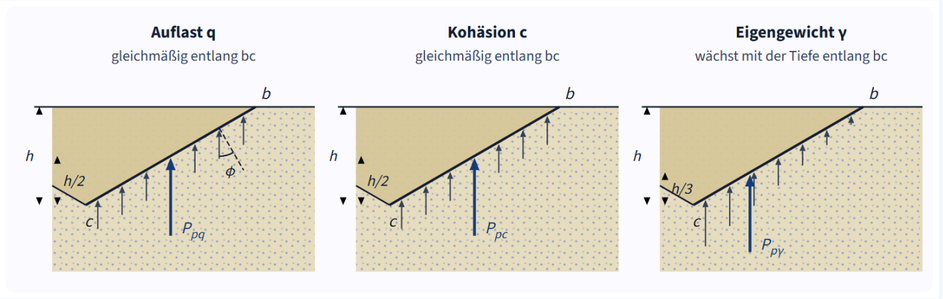
THEORIE

Das Fundament drückt den Keil nach unten; der Boden in den Zonen II und III widersteht an jeder Fläche mit einer **passiven Kraft P_p**. Da der Boden gegen den Boden gleitet, wirkt der volle Reibungswinkel: P_p bildet mit der Flächennormale den Winkel φ. Da die Fläche bc mit der Horizontalen den Winkel φ bildet, bildet ihre Normale mit der Vertikalen den Winkel φ; die von dieser Normale um φ abweichende Kraft ist **genau vertikal**.

P_p hängt gleichzeitig von q, c und γ′ ab, und die drei Größen zusammen liefern keine geschlossene Lösung. Terzaghi ermittelte jede einzelne, als wären die beiden anderen null, und **addierte** sie (Superposition):

$$P_p = P_{pq} + P_{pc} + P_{p\gamma} \qquad h = \frac{B}{2}\tan\varphi$$

- P_{pq}: nur Auflast (γ = 0, c = 0) → **N_q**
- P_{pc}: nur Kohäsion (γ = 0, q = 0) → **N_c**
- $P_{p\gamma}$: nur Bodeneigengewicht (q = 0, c = 0) → **N_γ**



Momente um den Pol b

THEORIE

Bei alleiniger Auflast liegt der Pol in b. Auf die Masse bcfj wirken P_{pq} entlang bc, q entlang bj, die passive Rankine-Kraft entlang jf und die Resultierende F entlang der Spirale; F geht durch den Pol und entfällt aus dem Momentengleichgewicht:

$$P_{p(1)} = q\,H_d \tan^2\!\left(45^\circ + \tfrac{\varphi}{2}\right) \qquad P_{pq}\frac{B}{4} = q\,\overline{bj}\,\frac{\overline{bj}}{2} + P_{p(1)}\frac{H_d}{2}$$

$$r_0 = \frac{B}{2}\sec\varphi \quad r_1 = r_0\, e^{\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\tan\varphi} \quad \overline{bj} = r_1\cos\left(45^\circ - \tfrac{\varphi}{2}\right) \quad H_d = r_1\sin\left(45^\circ - \tfrac{\varphi}{2}\right)$$

Da tan(45° + φ/2) = cot(45° − φ/2) ist, ergeben sich beide Terme als gleich: $P_{pq} = (4/B)\, q\, r_1^2 \cos^2(45° - \varphi/2)$. Mit dem Keilgleichgewicht $\mathbf{q_q\, B = 2\, P_{pq}}$:

$$q_q = qN_q \qquad N_q = \frac{e^{2\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\tan\varphi}}{2\cos^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}$$

ERGEBNIS

Für φ = 0 ist $N_q = 1$: Ohne Reibung wird die Auflast unverändert übertragen. Für φ = 30° ist **N_q = 22.46**.

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Baugrund	$\varphi' = 30°$ **und** $\varphi' = 20°$ **(Modell mit Elastizitätsmoduln)**
Formel	$N_q = \dfrac{e^{2(3\pi/4 - \varphi/2)\tan\varphi}}{2\cos^2(45° + \varphi/2)}$

GESUCHT

Für jedes φ′ den Wert von **N_q** aus der geschlossenen Form ermitteln.

Lösung

LÖSUNG

1 φ′ = 30° (3π/4 − φ/2 = 2.0944 rad; tan 30° = 0.5774; 45° + 15° = 60°)

$$N_q = \frac{e^{2(2.0944)(0.5774)}}{2\cos^2 60^\circ} = \frac{e^{2.4184}}{2(0.25)} = \frac{11.228}{0.5} = \mathbf{22.46}$$

2 φ′ = 20° (3π/4 − φ/2 = 2.1817 rad; tan 20° = 0.3640; 45° + 10° = 55°)

$$N_q = \frac{e^{2(2.1817)(0.3640)}}{2\cos^2 55^\circ} = \frac{e^{1.5881}}{2(0.3290)} = \frac{4.895}{0.6580} = \mathbf{7.44}$$

$N_q(30°)$ = **22.46**, $N_q(20°)$ = **7.44**; für φ′ = 0 ist N_q = 1. Dies sind die Werte aus der Tabelle des Moduls.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

$\cot \varphi \, (N_q - 1)$

THEORIE

Bei alleiniger Kohäsion liegt der Pol wiederum in b. In der Masse bcfj wirkt die Kohäsionskraft C = c·bc (längs eines Radius, momentenfrei), auf jf wirkt der kohäsive passive Rankine-Erddruck, und längs der Spirale wirkt c. Das Spiralementelement ist ds = r sec φ dθ, und sein Moment ist c r² dθ:

$$P_{p(2)} = 2cH_d \tan\left(45^\circ + \tfrac{\varphi}{2}\right) \qquad M_c = \int_0^{\theta_1} c\, r^2 d\theta = \frac{c}{2\tan\varphi}\left(r_1^2 - r_0^2\right)$$

Aus dem Momentengleichgewicht P_{pc} B/4 = $P_{p(2)}$ H_d/2 + M_c wird P_{pc} ermittelt; aus dem Keilgleichgewicht **q_c B = 2 C sin φ + 2 P_{pc}** (die vertikale Komponente von C). Mit den beiden Identitäten heben sich die Klammerausdrücke auf:

$$q_c = c\cot\varphi\left[\frac{e^{2\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\tan\varphi}}{2\cos^2\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)} - 1\right] = c\cot\varphi\,(N_q - 1) = cN_c$$

$$N_c = \cot\varphi\,(N_q - 1)$$

ERGEBNIS

Für φ → 0 gilt $N_c \to 3\pi/2 + 1 = 5.71$; der Wert nach Terzaghi für φ = 0 ist **5.7** (ein von Prandtls 5.14 abweichendes Verfahren). Für φ = 30° ist **N_c = 37.16**.

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Baugrund	$\varphi' = 30°$ **und** $\varphi' = 20°$
Vorheriges Beispiel	$N_q(30°) = 22.46,\ N_q(20°) = 7.44$

GESUCHT

Die **N_c**-Werte sind aus $N_c = \cot \varphi\,(N_q - 1)$ zu ermitteln; der Grenzfall $\varphi \to 0$ ist anzugeben.

Lösung

LÖSUNG

1 φ′ = 30° und φ′ = 20°

$$N_c(30^\circ) = \frac{22.46 - 1}{0.5774} = \mathbf{37.16} \qquad N_c(20^\circ) = \frac{7.44 - 1}{0.3640} = \mathbf{17.69}$$

2 Grenzfall φ → 0

$$N_c \to \frac{3\pi}{2} + 1 = \mathbf{5.71} \approx 5.7 \text{ (Wert nach Terzaghi)}$$

$N_c(30°)$ = **37.16**, $N_c(20°)$ = **17.69**. Bei gleichem φ′ ist N_c deutlich größer als N_q: Der Kohäsionsterm dominiert bei kleinem φ′.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Probepol und der Beiwert ohne geschlossene Form

THEORIE

Mit dem Gewicht ist die Spirale am Pol b nicht mehr maßgebend: Der Pol O wird **durch Probieren** auf der Verlängerung der Geraden fb über b hinaus verschoben; jede Lage ergibt eine neue Spirale und eine neue Masse bcfj. Momente um O:

$$P_{p\gamma} = \frac{W\, l_w + P_{p(3)}\, l_R}{l_p} \qquad P_{p(3)} = \tfrac{1}{2}\gamma H_d^2 \tan^2\!\left(45^\circ + \tfrac{\varphi}{2}\right)$$

Das kleinste $P_{p\gamma}$ ist der vom Boden entwickelte Wert. Der Keil trägt nun auch sein Eigengewicht: W_W = ½ B h γ = (B²/4) γ tan φ. Setzt man $P_{p\gamma}$ = ⅛ γ B² $K_{p\gamma}$ tan²φ an ($K_{p\gamma}$ hängt nur von φ ab):

$$q_\gamma B = 2P_{p\gamma} - W_w \;\Rightarrow\; q_\gamma = \tfrac{1}{2}\gamma B\, N_\gamma \qquad N_\gamma = \tfrac{1}{2}K_{p\gamma}\tan^2\varphi - \tfrac{1}{2}\tan\varphi$$

Da $K_{p\gamma}$ aus einer iterativen Reduktion hervorgeht, **gibt es keine geschlossene Form für N_γ**; sie wird für jedes φ numerisch berechnet. Das Modul verwendet die Werte nach **Kumbhojkar (1993)** (Tabelle 1) und interpoliert linear zwischen ihnen: für φ = 30° ist N_γ = 19.13.

WARUM EINE TABELLE?

N_c und N_q ergeben sich aus geschlossenen Ausdrücken. N_γ hingegen ist das Ergebnis einer Minimierung: Obwohl es nach derselben Methode angeschrieben wird, gibt es keine allgemein verwendete Formel.

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Baugrund	$\varphi' = 20°$ **(Modell des Elastizitätsmoduls) und** $30°$**; außerdem** $22.5°$
Quelle	**Kumbhojkar (1993) Tabelle 1: N_γ(22°) = 5.09, N_γ(23°) = 6.00**

GESUCHT

N_γ(20°), N_γ(30°); daraus $K_{p\gamma}$; und N_γ(22.5°) (lineare Interpolation).

Lösung

LÖSUNG

1 Tabelle 1 ($N_\gamma = ½\, K_{p\gamma} \tan^2\varphi - ½ \tan\varphi \Rightarrow K_{p\gamma} = (2N_\gamma + \tan\varphi)/\tan^2\varphi$)

$$N_\gamma(20^\circ) = 3.64 \;\Rightarrow\; K_{p\gamma} = \frac{2(3.64) + 0.3640}{0.3640^2} = 57.7$$

$$N_\gamma(30^\circ) = 19.13 \;\Rightarrow\; K_{p\gamma} = \frac{2(19.13) + 0.5774}{0.5774^2} = 116.5$$

2 $\varphi' = 22.5°$: auf halbem Weg zwischen 22° und 23° (t = 0.5)

$$N_\gamma = 5.09 + 0.5(6.00 - 5.09) = \mathbf{5.545}$$

$N_\gamma(20°) = \mathbf{3.64}$, $N_\gamma(30°) = \mathbf{19.13}$; $K_{p\gamma}$ 57.7 → 116.5. Das Modul interpoliert N_c und N_q ebenfalls linear aus derselben Tabelle: bei 22.5° ist $N_c = 21.01$, $N_q = 9.71$.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Summe der drei Teile und Tabelle 1

THEORIE

Durch Summieren der drei Anteile ergibt sich die Tragfähigkeit des **Streifenfundaments** auf einem bindig-reibungsbehafteten Boden mit Wichte:

$$q_u = q_c + q_q + q_\gamma = c\,N_c + q\,N_q + \tfrac{1}{2}\gamma B\,N_\gamma$$

N_q, N_c, N_γ hängen **nur von φ** ab; Tabelle 1 gibt die vom Modul verwendeten Werte an.

Die Superposition ist nicht exakt: N_q und N_c stammen aus Spiralen mit Pol am Fundamentrand, N_γ aus einer Spirale mit Pol in O. Die Summe der getrennt minimierten Anteile kann das Minimum des zusammengesetzten Problems nicht überschreiten; der Fehler liegt **auf der sicheren Seite**.

Versuche zeigen, dass die Keilflächen nicht unter φ, sondern unter etwa **45° + φ/2** geneigt sind. Die Beiwerte von Terzaghi (und dieses Modul) behalten α = φ bei; der Keil unter 45° + φ/2 ist die Grundlage der Prandtl–Reissner-Beuiwerte (Module Meyerhof, Hansen, Vesic), und deren N_c- und N_q-Werte unterscheiden sich deshalb.

TABELLE 1 (Terzaghi)

φ′ (°)	N_c	N_q	N_γ
0	5.70	1.00	0.00
5	7.34	1.64	0.14
10	9.60	2.69	0.56
15	12.86	4.45	1.52
20	17.69	7.44	3.64
25	25.13	12.72	8.34
30	37.16	22.46	19.13
35	57.75	41.44	45.41
40	95.66	81.27	116.31
45	172.29	173.29	325.34
50	347.51	415.15	1,072.80

Aufgabe

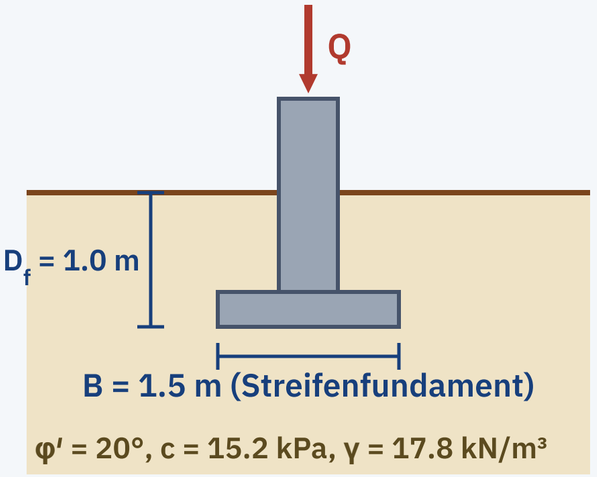
BEISPIEL

Gegeben

Fundament	**Streifenfundament (durchlaufend), B = 1.5 m, D_f = 1.0 m**
Baugrund	$c = 15.2\ \mathrm{kPa},\ \varphi' = 20°,\ \gamma = 17.8\ \mathrm{kN/m^3}$
Grundwasser	**keine (in der Tiefe)**
Tabelle 1 (20°)	**N_c = 17.69, N_q = 7.44, N_γ = 3.64**

GESUCHT

q_u und **Q_u** je Längeneinheit ermitteln.



Lösung

LÖSUNG

1 Auflast $q = \gamma D_f = 17.8 \times 1.0 = 17.8$ kPa; beim Streifenfundament kein Formbeiwert

$$q_u = 15.2(17.69) + 17.8(7.44) + \tfrac{1}{2}(17.8)(1.5)(3.64)$$
$$= 268.89 + 132.43 + 48.59 = \mathbf{449.91}\ \mathrm{kPa}$$

2 Last je Längeneinheit

$$Q_u = q_u B = 449.91(1.5) = \mathbf{674.9}\ \mathrm{kN/m}$$

Die Tragfähigkeit des Streifenfundaments beträgt **449.9 kPa**: Kohäsionsterm 60 %, Auflast 29 %, Eigengewicht 11 %.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Halbempirische Formbeiwerte

THEORIE

Unter einem quadratischen oder kreisförmigen Fundament befindet sich der Boden nicht im ebenen Verzerrungszustand; die Herleitung kann nicht direkt angewendet werden. Terzaghi schlug **halbernpirische Beiwerte** für die Kohäsions- und die Wichteterme vor:

$$q_u = 1.3\,c\,N_c + q\,N_q + 0.4\,\gamma B\,N_\gamma \qquad (\text{quadratisch, B} \times \text{B})$$

$$q_u = 1.3\,c\,N_c + q\,N_q + 0.3\,\gamma B\,N_\gamma \qquad (\text{Kreis, Durchmesser B})$$

Undränierte Belastung in gesättigtem Ton (φ = 0, c = c_u; N_c = 5.7, N_q = 1, N_γ = 0):

$$q_u = 5.7\,c_u + q\ (\text{Streifen}) \qquad q_u = 1.3 \times 5.7\,c_u + q = 7.41\,c_u + q\ (\text{quadratisch, kreisförmig})$$

Die Option **Form** des Moduls wählt diese Beiwerte. Terzaghi hat für ein Rechteckfundament keine Beiwerte angegeben; dieser Fall wird von der allgemeinen Grundbruchgleichung mit Formbeiwerten (Meyerhof, Hansen, Vesic) abgedeckt.

BEIWERTE

Fundament	c N_c	γ B N_γ	B
Streifen	1	0.5	Breite
Quadrat	1.3	0.4	Rand
Kreis	1.3	0.3	Durchmesser

Aufgabe

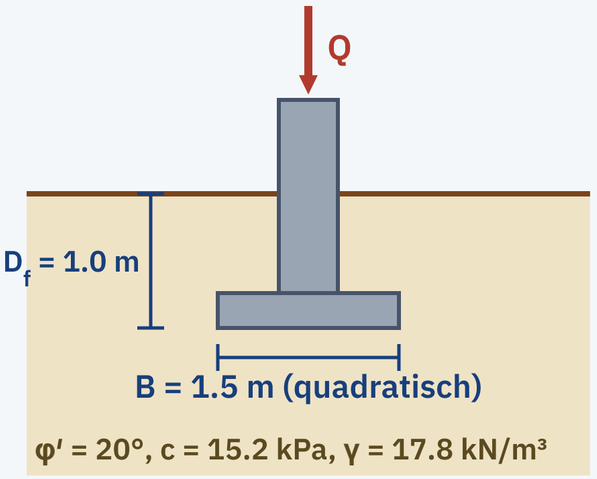
BEISPIEL

Gegeben

Fundament	**quadratisch, B = L = 1.5 m, Gründungstiefe D_f = 1.0 m**
Baugrund	$c = 15.2\ \mathrm{kPa},\ \varphi' = 20^\circ$
Wichte	$\gamma = 17.8\ \mathrm{kN/m^3}$ **(oben)**
Grundwasser	**keine (in der Tiefe)**
Vergleich	**Kreis, Durchmesser B = 1.5 m; außerdem Ton: φ = 0, c_u = 40 kPa, γ = 18 kN/m³, D_f = 1 m**

GESUCHT

q_u und **Q_u** für das Quadrat und den Kreis; **q_u** für das Streifen- und das Quadratfundament bei Ton.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Quadrat (0.4) und Kreis (0.3); $N_c = 17.69$, $N_q = 7.44$, $N_\gamma = 3.64$

$$\begin{aligned}\text{quadratisch}: \quad q_u &= 1.3(15.2)(17.69) + 17.8(7.44) + 0.4(17.8)(1.5)(3.64) \\ &= 349.55 + 132.43 + 38.88 = \mathbf{520.86}\ \text{kPa} \\ \text{Kreis}: \quad q_u &= 349.55 + 132.43 + 0.3(17.8)(1.5)(3.64) = \mathbf{511.14}\ \text{kPa}\end{aligned}$$

2 Lasten

$$Q_u^{square} = q_u B^2 = 520.86(2.25) = \mathbf{1{,}171.9}\ \text{kN}$$

$$Q_u^{circle} = q_u \frac{\pi B^2}{4} = 511.14(1.767) = \mathbf{903.3}\ \text{kN}$$

Die q_u des quadratischen Fundaments ist nur 1.9 % höher als die des Kreisfundaments (nur der γ-Term unterscheidet sich).

Lösung (2/2)

LÖSUNG

3 Undränierter Ton (q = 18 × 1 = 18 kPa; N_c = 5.7)

$$\text{Streifen}: \quad q_u = 5.7(40) + 18 = \mathbf{246.0}\ \text{kPa}$$

$$\text{quadratisch, kreisförmig}: \quad q_u = 1.3(5.7)(40) + 18 = 7.41(40) + 18 = \mathbf{314.4}\ \text{kPa}$$

Fundament	c N_c-Term	q	q_u (kPa)
Streifen	228.0	18.0	**246.0**
Quadrat / Kreis	296.4	18.0	**314.4**

Im Ton stammt die Tragfähigkeit nahezu ausschließlich aus der Kohäsion; quadratische und kreisförmige Fundamente tragen **28 %** mehr als ein Streifenfundament (Beiwert 1.3).

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Gleiche Gleichung, reduzierte c und φ

THEORIE

Wenn der Boden durch lokalen Grundbruch versagt, bildet sich der Mechanismus nicht vollständig aus, und nur ein Teil der Festigkeit wird mobilisiert. Terzaghi behielt **dieselben Gleichungen** bei und reduzierte die Festigkeitsparameter:

$$c' = \tfrac{2}{3}\,c \qquad \varphi' = \tan^{-1}\left(\tfrac{2}{3}\tan\varphi\right)$$

Die korrigierten N'_c, N'_q, N'_γ sind dieselben Funktionen, ausgewertet bei φ′ (Tabelle 3):

$$q_u = c' N'_c + q N'_q + \tfrac{1}{2}\gamma B N'_\gamma \ \text{(Streifen)} \qquad q_u = 1.3\,c' N'_c + q N'_q + 0.4\,\gamma B N'_\gamma \ \text{(quadratisch)}$$

Da c′ = ⅔ c ist, ergibt sich der Kohäsionsterm für quadratische und kreisförmige Fundamente zu 1.3 × ⅔ = **0.867 c N'_c**.

Für Sande schlug Vesic (1973) anstelle eines festen ⅔ eine von der bezogenen Lagerungsdichte abhängige Abminderung vor: **φ′ = $\tan^{-1}$(k tan φ)**, k = 0.67 + D_r − 0.75 D_r^2 (0 ≤ D_r ≤ 0.67).

TABELLE 3 (lokaler Grundbruch)

φ (°)	φ′ (°)	N'_c	N'_q	N'_γ
10	6.70	8.03	1.94	0.25
15	10.13	9.67	2.73	0.58
20	13.64	11.86	3.88	1.18
25	17.27	14.82	5.61	2.29
30	21.05	18.99	8.31	4.35
35	25.02	25.18	12.75	8.38
40	29.22	34.89	20.53	16.84

Aufgabe

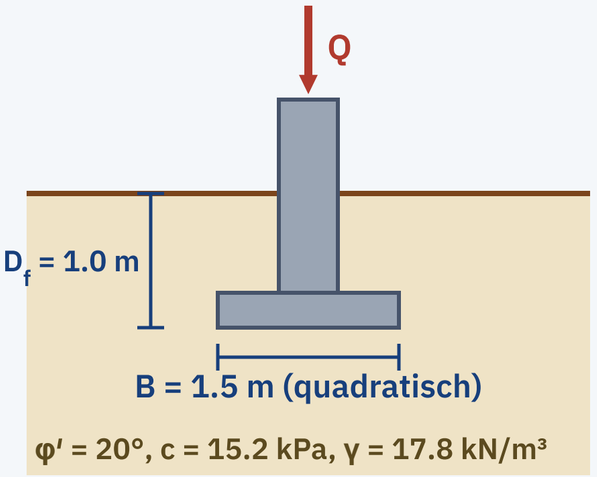
BEISPIEL

Gegeben

Fundament	**quadratisch, B = L = 1.5 m, Gründungstiefe D_f = 1.0 m**
Baugrund	$c = 15.2\ \mathrm{kPa},\ \varphi' = 20^\circ$
Wichte	$\gamma = 17.8\ \mathrm{kN/m^3}$ **(oben)**
Grundwasser	**keine (in der Tiefe)**
Bruchform	**lokaler Grundbruch**

GESUCHT

c′, φ′, korrigierte Beiwerte und q_u; deren Verhältnis zum allgemeinen Grundbruch.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Reduzierte Festigkeit (tan 20° = 0.3640)

$$\varphi' = \tan^{-1}\left(\tfrac{2}{3}\cdot 0.3640\right) = \mathbf{13.64}^\circ \qquad c' = \tfrac{2}{3}(15.2) = \mathbf{10.13}\ \mathrm{kPa}$$

2 Tabelle 3 (φ′ = 13.64°, durch Interpolation)

$$N_c' = \mathbf{11.86} \qquad N_q' = \mathbf{3.88} \qquad N_\gamma' = \mathbf{1.18}$$

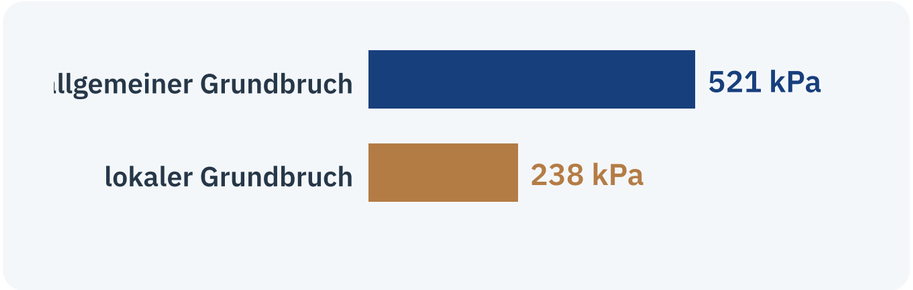
Lösung (2/2)

LÖSUNG

3 Quadratisches Fundament (q = 17.8 kPa)

$$q_u = 1.3(10.13)(11.86) + 17.8(3.88) + 0.4(17.8)(1.5)(1.18)$$
$$= 156.20 + 69.05 + 12.61 = \mathbf{237.86}\ \text{kPa}$$

Beim lokalen Grundbruch ist q_u = **237.86 kPa**, nur **46 %** des Werts beim allgemeinen Grundbruch (520.86 kPa). Bei lockerem oder weichem Boden nimmt diese Abminderung **mehr als die Hälfte** weg.



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Wasser ändert nur q und γ

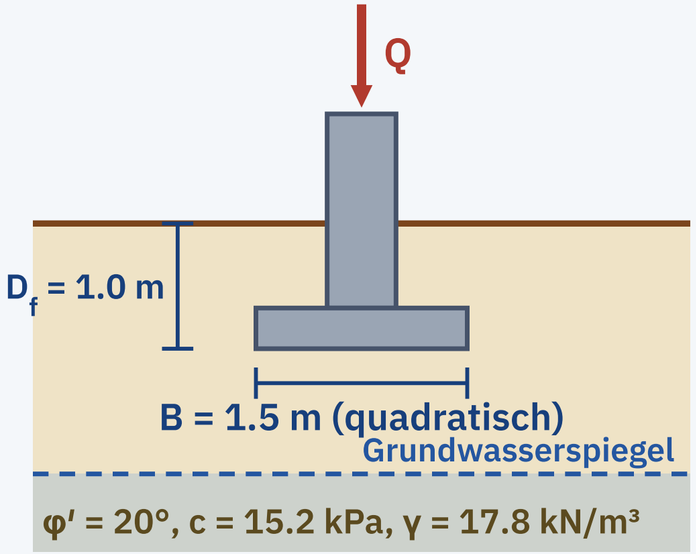
THEORIE

Die Herleitung setzt den Grundwasserspiegel sehr tief voraus. Wasser nahe der Sohle ändert zwei Dinge: die **Auflast q** und die **Wichte** im Term ½γBN$_\gamma$; niemals die Beiwerte. Unterhalb des Grundwasserspiegels ist die wirksame Wichte γ′ = γ$_{sat}$ − γ$_w$ (γ$_w$ = 9.81). Das Modul unterscheidet drei Fälle (D$_w$ ist die Tiefe ab Geländeoberfläche):

$$\text{I } (D_w \le D_f):\ q = \gamma D_w + \gamma'(D_f - D_w),\ \ \gamma \to \gamma' \text{ (dritter Term)}$$

$$\text{III } (D_w > D_f):\ q = \gamma D_f,\ \ \bar{\gamma} = \frac{1}{B}\left[\gamma D + \gamma'(B - D)\right],\ D = D_w - D_f \le B$$

D$_w$ = D$_f$ (Fall II) ist ein Sonderfall von I: q = γ D$_f$, mit γ′ im dritten Term. Liegt die Sohle tiefer als eine B unter der Fundamentsohle (D > B), so befindet sich das Wasser unterhalb der Bruchzone und die Gleichung wird verwendet, als wäre kein Wasser vorhanden.



Aufgabe

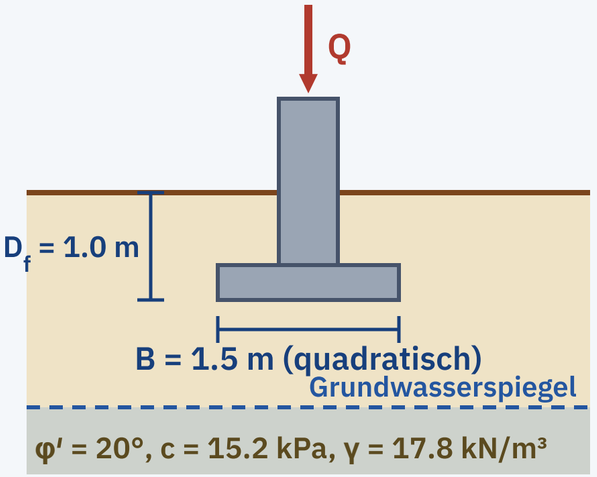
BEISPIEL

Gegeben

Fundament	**quadratisch, B = L = 1.5 m, Gründungstiefe D_f = 1.0 m**
Baugrund	$c = 15.2\ \mathrm{kPa},\ \varphi' = 20^\circ$
Wichte	$\gamma = 17.8\ \mathrm{kN/m^3}$ **(oben)**
Grundwasser	$\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3}$; $D_w = 0.5;\ 1.0;\ 2.0$ **und** $3.5\ \mathrm{m}$

GESUCHT

Für jeden Fall **q**, die Wichte im dritten Glied und den q_u-Wert des quadratischen Fundaments ermitteln.



Lösung (1/3)

LÖSUNG

1 $\gamma' = 19 - 9.81 = 9.19$ kN/m³. Fall I ($D_w = 0.5$) und II ($D_w = D_f = 1.0$)

$$D_w = 0.5: \; q = 17.8(0.5) + 9.19(0.5) = \mathbf{13.495}\ \mathrm{kPa},\ \gamma' = 9.19$$

$$D_w = 1.0: \; q = 17.8(1.0) = \mathbf{17.8}\ \mathrm{kPa},\ \gamma' = 9.19$$

2 Fall III ($D_w = 2.0 \Rightarrow D = 1.0 \leq B = 1.5$) und Wasser unwirksam ($D_w = 3.5 \Rightarrow D = 2.5 > B$)

$$D_w = 2.0: \; \bar{\gamma} = \frac{1}{1.5}\left[17.8(1.0) + 9.19(0.5)\right] = \mathbf{14.93}\ \mathrm{kN/m^3},\ q = 17.8\ \mathrm{kPa}$$

$$D_w = 3.5: \; q = 17.8,\ \gamma = 17.8$$

Lösung (2/3)

LÖSUNG

3 q_u für D_w = 2.0 m (quadratisch; erster und zweiter Term unverändert)

$$q_u = 1.3(15.2)(17.69) + 17.8(7.44) + 0.4(14.93)(1.5)(3.64)$$
$$= 349.55 + 132.43 + 32.61 = \mathbf{514.59}\ \mathrm{kPa}$$

Das Modell, mit dem das Modul geöffnet wird (D_w = 2 m, Fall III): q_u = **514.59 kPa**; ohne Wasser wären es 520.86 kPa.

Lösung (3/3)

LÖSUNG

D_w (m)	Zustand	q (kPa)	γ dritter Term	q_u (kPa)
0.5	I	13.50	9.19	**470.0**
1.0	II	17.80	9.19	**502.1**
2.0	III	17.80	14.93	**514.6**
3.5	vernachlässigbar	17.80	17.80	**520.9**

Bei Wasserstand in 0.5 m beträgt q_u = 470, bei tiefem Wasserstand 521 kPa (10 % Unterschied). Der Kohäsionsterm (349.6 kPa) ändert sich nie: **Das Wasser geht nur über q und γ ein**.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Brutto und netto, aufgebrachte Pressung

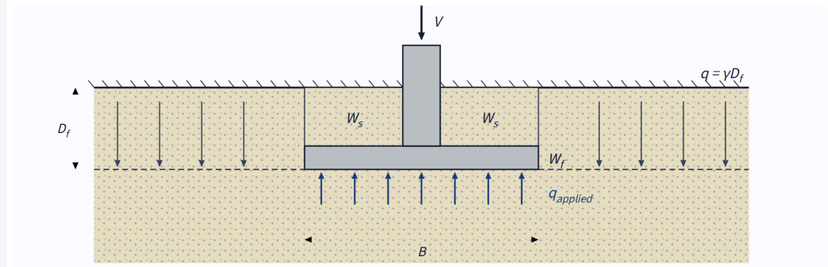
THEORIE

q_u ist die Pressung im Bruchzustand. Das Modul teilt sie durch den Sicherheitsfaktor FS und hält die **Brutto-** und die **Netto**-Pressung getrennt. Die Netto-Pressung ist die Pressung, die das Fundament über der vor dem Aushub an der Sohle vorhandenen Auflast q **hinzufügt**:

$$q_{u,net} = q_u - q \qquad q_{all,g} = \frac{q_u}{FS} \qquad q_{all,n} = \frac{q_{u,net}}{FS}$$

Die aufgebrachte Pressung $q_{u,auf}$ ist die **vertikale Bruttopressung** an der Sohle unter Gebrauchslasten: die Stützenlast V, das Fundamentgewicht W_f und der Boden über dem Fundament W_s, geteilt durch die Sohlfläche (quadratisch B^2, kreisförmig $\pi B^2/4$, Streifen B). Das Fundament ist unter folgenden Bedingungen zulässig:

$$q_{apply} = \frac{V + W_f + W_s}{A} \leq q_{all,g} \qquad FS_{\text{tatsächlich}} = \frac{q_u}{q_{apply}} \qquad q_{apply} - q \leq q_{all,n}$$



Wenn q ≥ 0 und FS ≥ 1 gilt, ist **der Bruttonachweis maßgebend**: Wird er erfüllt, so ist auch der Nettomachweis erfüllt. Wird q_{app} nicht eingegeben, liefert das Modul nur die Tragfähigkeiten. FS ≈ 3 ist üblich; er deckt eher die Unsicherheit der Festigkeitsparameter als die der Theorie ab.

Aufgabe

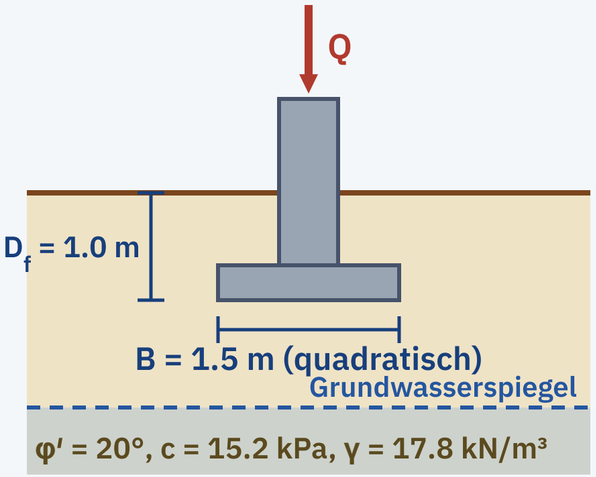
BEISPIEL

Gegeben

Fundament	**quadratisch, B = L = 1.5 m, Gründungstiefe D_f = 1.0 m**
Baugrund	$c = 15.2\ \mathrm{kPa},\ \varphi' = 20^\circ$
Wichte	$\gamma = 17.8\ \mathrm{kN/m^3}$ **(oben)**
Grundwasser	$\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3},\ D_w = 2\ \mathrm{m}$ **(Beispiel 7: $q_u = 514.59$ kPa)**
Sicherheit	**FS = 3**
Aufgebrachter Druck	**(a) q_{app} = 150 kPa · (b) q_{app} = 200 kPa**

GESUCHT

$q_{u,net}$, $q_{all,g}$, $q_{all,n}$, Q_{all} und der Nachweis für jedes q_{vorh}.



Lösung

LÖSUNG

1 Zulässige Pressungen (q = 17.8 kPa)

$$q_{u,net} = 514.59 - 17.8 = 496.79\ \text{kPa}$$

$$q_{all,g} = \frac{514.59}{3} = \mathbf{171.53}\ \text{kPa} \qquad q_{all,n} = \frac{496.79}{3} = \mathbf{165.60}\ \text{kPa}$$

$$Q_{all} = 171.53(1.5^2) = \mathbf{385.9}\ \text{kN}$$

2 Nachweis

$$\text{(a) } 150 \leq 171.53 \Rightarrow \textbf{gültig},\ FS_{\text{tatsächlich}} = \frac{514.59}{150} = 3.43 \geq 3$$

$$\text{(b) } 200 > 171.53 \Rightarrow \textbf{nicht erfüllt},\ FS_{\text{tatsächlich}} = \frac{514.59}{200} = 2.57 < 3$$

Auch die Netto-Bedingung ist für q_{app} = 150 kPa erfüllt (132.2 ≤ 165.6 kPa); bei 200 kPa ist weder die Brutto- noch die Netto-Bedingung erfüllt. Ist die Brutto-Bedingung erfüllt, so ist die Netto-Bedingung stets erfüllt.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Zusammenfassung

Die wichtigsten Punkte

Terzaghi (1943): Streifenfundament, rau, flach ($D_f \leq B$); allgemeiner Grundbruch; Keil- (I), radialer (II) und passiver (III) Bereich; Keilflanken unter $\alpha = \varphi$

Superposition: $P_p = P_{pq} + P_{pc} + P_{p\gamma}$; $q_u = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma B N_\gamma$

$\mathbf{N_q = e^{2(3\pi/4 - \varphi/2)\tan\varphi}/[2\cos^2(45° + \varphi/2)]}$, $\mathbf{N_c = \cot\varphi\,(N_q - 1)}$ (geschlossen), $\mathbf{N_\gamma}$ aus der Tabelle nach Kumbhojkar ($\varphi = 20°$: 17.69; 7.44; 3.64)

Quadrat: 1.3 $cN_c + qN_q + 0.4\,\gamma B N_\gamma$; **Kreis**: 0.3; **undräniert**: $N_c = 5.7$, Streifen 5.7 $c_u + q$, Quadrat 7.41 $c_u + q$

Lokaler Grundbruch: dieselbe Gleichung mit $c' = \frac{2}{3}\,c$, $\varphi' = \tan^{-1}(\frac{2}{3}\tan\varphi)$ (Beispiel: 520.86 → 237.86 kPa)

Grundwasser ändert nur q und γ (3 Fälle): Beispiel 514.59 kPa

Nachweis: $q_{vorh} \leq q_{all,g}$, FS_{vorh} und netto; $Q_{all} = q_{all,g} \cdot A$

Literatur

Terzaghi, K. (1943). Theoretical Soil Mechanics. Wiley, New York.

Das, B.M. (2017). Shallow Foundations: Bearing Capacity and Settlement, 3rd ed. CRC Press, Boca Raton – Abschnitte 2.2–2.3; diese Seite folgt der Reihenfolge der dortigen Herleitung.

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning – Kapitel 16: die Grundwasserfälle, der Sicherheitsfaktor, Tabelle 16.1.

Kumbhojkar, A.S. (1993). Numerical evaluation of Terzaghi's Nγ. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 119(3), 598–607.

Prandtl, L. (1921). Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden. ZAMM, 1(1), 15–20.

Vesic, A.S. (1973). Analysis of ultimate loads of shallow foundations. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 99(SM1), 45–73.

Die Abbildungen dieser Seite sind aus dem Mechanismus selbst gezeichnet; die Nummern der Gleichungen, Abbildungen und Tabellen gelten nur für diese Seite.

HINWEIS

Ein Teil der Abbildungen ist der Theorieseite von GeoTerva entnommen; alle Zahlenbeispiele wurden mit der moduleigenen Berechnungsbibliothek und -tabelle erzeugt, das Modul liefert dieselben Werte.

GeoTerva

Geotechnische Berechnungen online

Von der Theorie zur Praxis

Berechnen Sie das Beispielfundament aus dieser Vorlesung Schritt für Schritt in GeoTerva: Das Modul öffnet sich mit diesem Modell.

Modul öffnen →

Theorieseite →

Auf dem Smartphone öffnen

Die Beispielmodule erfordern keine Registrierung.

Falls Sie sie in Ihren Vorlesungen verwenden möchten: info@geoterva.com