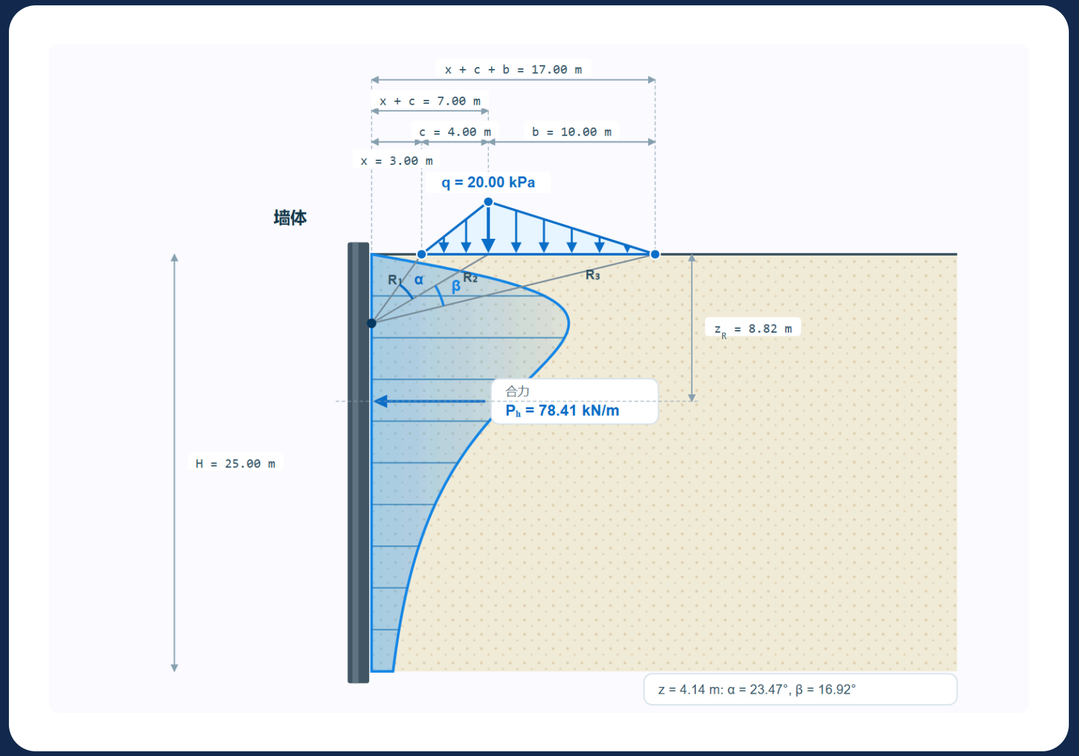
GeoTerva

岩土工程讲义 · 地表超载

三角形地面超载

讲义：自x处开始、升至峰值再降为零的三角形荷载；对某一深度处的纵坐标进行手算求解，剖面、合力及各种变化情形以表格给出。

线荷载的叠加 | A和B函数 | 刚性墙ψ = 2 | 合力与z_R | 可手算求解



本讲内容

三角形荷载的几何形状：自距墙**x**处从零开始，在**c**的宽度内增大到q值，再在**b**的宽度内降回零

在深度z处求出半径R_1、R_2、R_3和角度**α**、**β**（以弧度计）

由线荷载叠加得到的水平压力闭合表达式：采用函数**A(s)**和**B(s)**表示

刚性墙(ψ = 2)与**半无限体**(ψ = 1)的差异

合力P_H和**作用深度**z_R：压力图的面积和一次矩；以及x与荷载形状的影响

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：公式及其依据

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

算例：H = 25 m，x = 3 m，c = 4 m，b = 10 m，q = 20 kPa；刚性墙。在z = 5 m处手算其中一个纵坐标值。

作用于墙上的三角形地面超载

理论

地表超载始于距墙水平距离x处

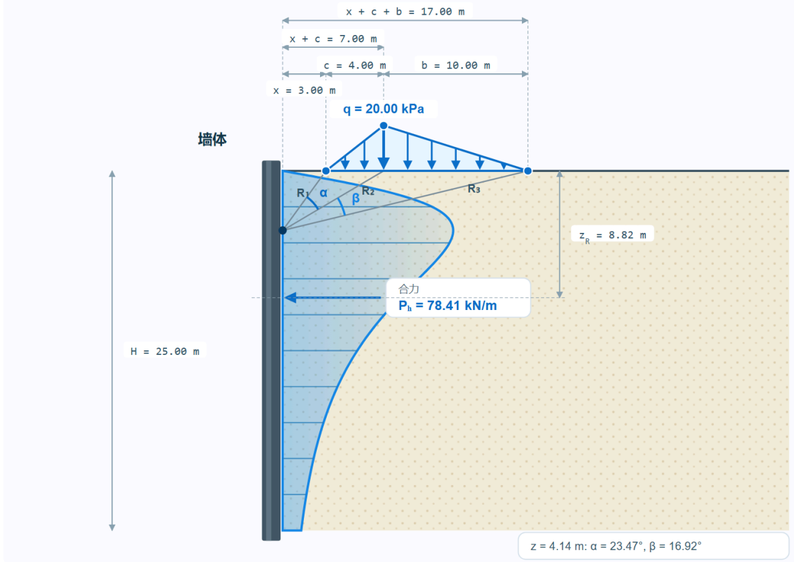
其强度在宽度c范围内由零线性增大至最大值q，随后在宽度b范围内又线性减小至零

在墙的每一深度z处，几何关系由R_1, R_2, R_3三个半径和α, β两个角度确定

H：墙的总高度；x：墙至荷载起点的距离

c：增大段的宽度，b：减小段的宽度

q：最大超载强度；z：自地面起算的深度



深度z处的几何关系

理论

深度z处，墙上该点到荷载**起点**、**峰值点**和**终点**的三条射线的长度及其之间的两个夹角如下

压力公式中的角度取**弧度**；以度表示的数值仅用于报告

$$R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \quad R_2 = \sqrt{(x+c)^2 + z^2} \quad R_3 = \sqrt{(x+c+b)^2 + z^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x+c}{z} - \tan^{-1}\frac{x}{z} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{x+c+b}{z} - \tan^{-1}\frac{x+c}{z}$$

线荷载的叠加

理论

三角形荷载是由一系列连续线荷载组成的，每一线荷载的强度为**w(s)·ds**；弹性水平应力(Flamant)沿荷载全长叠加

令$s_1 = x$，$s_2 = x + c$，$s_3 = x + c + b$，$R^2 = s^2 + z^2$，并引入下列函数A、B，积分即可得到封闭解

$$\sigma_H = \psi \frac{2}{\pi} \int w(s) \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} ds$$

$$A(s) = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{s}{z} - \frac{sz}{R^2}\right] \qquad B(s) = \frac{z}{2}\left[\ln R^2 + \frac{z^2}{R^2}\right]$$

$$\sigma_H = \psi \frac{2q}{\pi}\left\{\frac{B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)}{c} + \frac{s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)}{b}\right\}$$

A、B、α、β和ψ

理论

$A_2 - A_1$与$A_3 - A_2$两项含有角度α和β，$B_2 - B_1$与$B_3 - B_2$两项含有对数$\ln(R_2/R_1)$和$\ln(R_3/R_2)$

将同一叠加方法应用于均布条形荷载时，可精确得到已知的$(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cdot\cos 2\alpha]$表达式；方程即以此形式得到验证

$\psi = 1$表示半无限体（无墙）；$\psi = 2$表示使水平应力加倍的不发生位移的刚性墙：模块默认值

沿墙高重复计算，得到$\sigma_H(z)$；地表处压力为零

压力图的面积与一阶矩

理论

单位墙长上的**地面超载合力**及其距地面的深度，分别是分布图的面积和一次矩；模块以全精度对这两个积分进行数值计算

$$P_H = \int_0^H \sigma_H(z)\,dz$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z\,\sigma_H(z)\,dz}{P_H}$$

算例中，P_H = 78.41 kN/m（刚性墙）或39.21 kN/m（半无限介质）；两种情形下均为z_R = 8.82 m，位于地面以下

六个步骤与一个纵坐标

理论

1 · 定义H、x、c、b、q并选定ψ；**2** · 选定深度z

3 · 计算R_1、R_2、R_3；**4** · 计算α和β（弧度）

5 · 计算σ_H：函数A和B在s_1、s_2、s_3各点处取值并代入

6 · 重复计算并积分：压力分布，然后是P_H和z_R

$$z = 5\ \text{m}: \quad R_1 = 5.831\ \text{m} \quad R_2 = 8.602\ \text{m} \quad R_3 = 17.720\ \text{m} \qquad \alpha = 23.499^\circ \quad \beta = 19.148^\circ$$

$$\sigma_H = 3.247\ \text{kPa}\ (\psi = 1) \ \rightarrow \ 2 \times 3.247 = 6.494\ \text{kPa}\ (\psi = 2) \qquad P_H = 78.41\ \text{kN/m} \quad z_R = 8.82\ \text{m}$$

题目

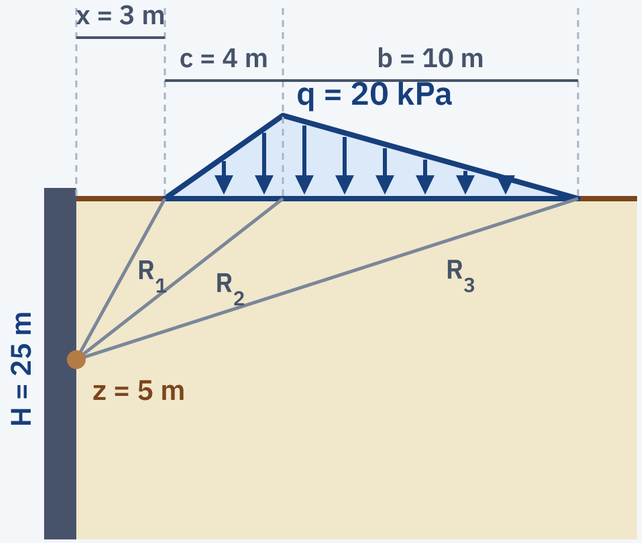
算例

求

在z = 5 m深度处，R_1, R_2, R_3、α, β、A和B的值，以及水平压力σ_H（对应两个ψ值）；并与模块结果比较。

已知条件

墙与荷载	$H = 25.0$ m; $x = 3.0$ m; $c = 4.0$ m; $b = 10.0$ m; $q = 20.0$ kPa
墙	**半无限介质($\psi = 1$)与刚性墙($\psi = 2$)**



解答 (1/3)

解答

1 点$s_1 = x$，$s_2 = x + c$，$s_3 = x + c + b$及射线

$$s_1 = 3\ \text{m} \quad s_2 = 3 + 4 = 7\ \text{m} \quad s_3 = 7 + 10 = 17\ \text{m}$$

$$R_1 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \mathbf{5.831} \quad R_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \mathbf{8.602} \quad R_3 = \sqrt{17^2 + 5^2} = \mathbf{17.720}\ \text{m}$$

2 角度（弧度）

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \tan^{-1}\frac{3}{5} = 0.95055 - 0.54042 = \mathbf{0.41013}\ \text{rad}\ \ (23.499^\circ)$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{17}{5} - \tan^{-1}\frac{7}{5} = 1.28474 - 0.95055 = \mathbf{0.33420}\ \text{rad}\ \ (19.148^\circ)$$

从墙上该点量取，荷载起点与峰值之间的夹角为**23.50°**，峰值与终点之间的夹角为**19.15°**。

解答 (2/3)

解答

3 三个点处的A(s) = ½[tan⁻¹(s/z) − sz/R²]和B(s) = (z/2)[ln R² + z²/R²]

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[0.54042 - \frac{3(5)}{34}\right] = 0.04962 \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left[0.95055 - \frac{7(5)}{74}\right] = 0.23879$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\left[1.28474 - \frac{17(5)}{314}\right] = 0.50702$$

s (m)	R² (m²)	tan⁻¹(s/z)	A(s)	ln R²	B(s)
3	34	0.54042	**0.04962**	3.52636	**10.6541**
7	74	0.95055	**0.23879**	4.30407	**11.6048**
17	314	1.28474	**0.50702**	5.74939	**14.5725**

A的差值包含角度，B的差值包含对数：$A_2 - A_1 = 0.18917$，$A_3 - A_2 = 0.26824$；$B_2 - B_1 = 0.9506$，$B_3 - B_2 = 2.9678$。

解答 (3/3)

解答

4 递增段与递减段的贡献

$$\text{递增} = \frac{B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)}{c} = \frac{0.9506 - 3(0.18917)}{4} = 0.09578$$

$$\text{递减} = \frac{s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)}{b} = \frac{17(0.26824) - 2.9678}{10} = 0.15922$$

5 半无限介质(ψ = 1)和刚性墙(ψ = 2)

$$\sigma_H = \frac{2q}{\pi}(\text{递增} + \text{递减}) = \frac{2(20)}{\pi}(0.09578 + 0.15922) = \mathbf{3.247}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1)$$

$$\sigma_H = 2 \times 3.247 = \mathbf{6.494}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2)$$

z = 5 m处**σ_H = 6.494 kPa**（刚性墙；半无限介质中为3.247）。模块给出相同的值。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

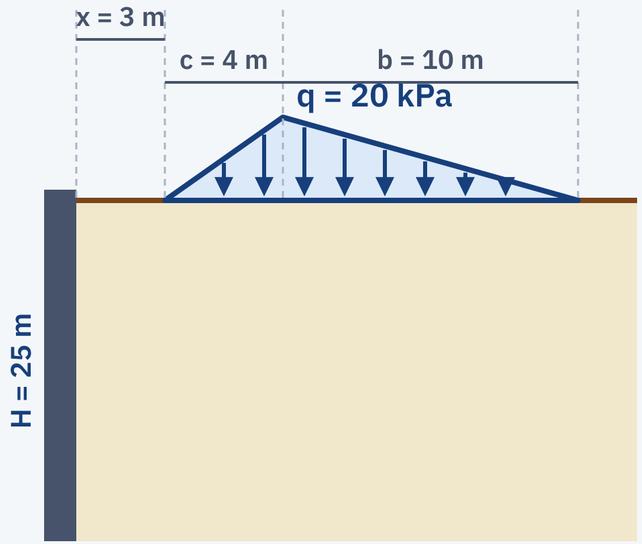
算例

求

压力分布；最大压力及其深度；峰值深度处的角度。

已知条件

模型	**算例1中的三角形荷载；刚性墙；表格每$H/30 = 0.833$ m取值**
每一行中	**R_1、R_2、R_3、α、β和σ_H；半无限介质的值为刚性墙的一半**



解答 (1/2)

解答

z (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	R_3 (m)	α (°)	β (°)	σ_H (kPa)
0.00	3.000	7.000	17.000	0.00	0.00	0.000
0.83	3.114	7.049	17.020	8.74	3.98	2.513
1.67	3.432	7.196	17.082	15.66	7.79	4.520
2.50	3.905	7.433	17.183	20.15	11.29	5.815
3.33	4.485	7.753	17.324	22.55	14.37	6.463
4.17	5.134	8.146	17.503	23.48	16.99	6.635
5.00	**5.831**	**8.602**	**17.720**	**23.50**	**19.15**	**6.494**
5.83	6.560	9.112	17.973	22.98	20.87	6.168
6.67	7.311	9.667	18.260	22.17	22.19	5.746
7.50	8.078	10.259	18.581	21.22	23.17	5.286
8.33	8.857	10.883	18.933	20.23	23.86	4.821
9.17	9.645	11.534	19.314	19.24	24.30	4.374
10.00	10.440	12.207	19.723	18.29	24.54	3.955
10.83	11.241	12.898	20.158	17.39	24.62	3.569
11.67	12.046	13.606	20.618	16.54	24.58	3.218
12.50	12.855	14.327	21.101	15.75	24.42	2.901
13.33	13.667	15.059	21.605	15.02	24.19	2.617
14.17	14.481	15.802	22.129	14.34	23.90	2.363
15.00	15.297	16.553	22.672	13.71	23.56	2.136
15.83	16.115	17.312	23.231	13.12	23.18	1.933
16.67	16.935	18.077	23.807	12.58	22.78	1.752
17.50	17.755	18.848	24.398	12.07	22.37	1.591
18.33	18.577	19.624	25.002	11.60	21.94	1.447
19.17	19.400	20.405	25.620	11.17	21.51	1.319
20.00	20.224	21.190	26.249	10.76	21.07	1.204
20.83	21.048	21.978	26.889	10.38	20.64	1.101
21.67	21.873	22.769	27.540	10.02	20.21	1.009
22.50	22.699	23.564	28.200	9.69	19.79	0.926
23.33	23.525	24.361	28.869	9.37	19.38	0.851
24.17	24.352	25.160	29.547	9.08	18.97	0.784
25.00	25.179	25.962	30.232	8.80	18.57	0.723

解答 (2/2)

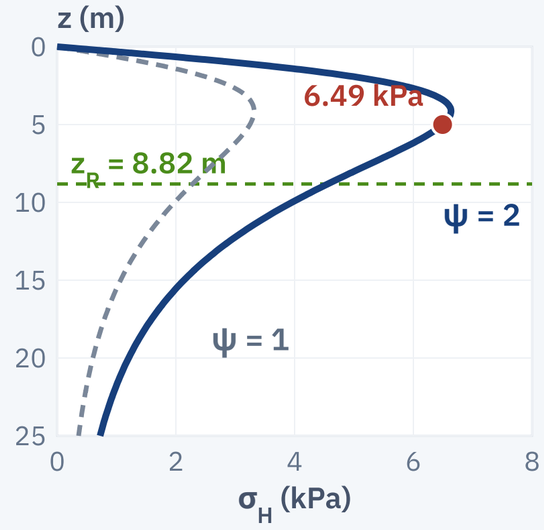
解答

1 压力在地表为零，在峰值深度处达到最大，之后减小

$$z = 0: \quad \sigma_H = 0 \qquad z = 4.14 \text{ m}: \quad \sigma_H = \mathbf{6.635} \text{ kPa}$$

$$\alpha = 23.47^\circ \quad \beta = 16.92^\circ \qquad z = H: \quad \sigma_H = 0.723 \text{ kPa}$$

最大压力为**6.63 kPa**，位于**z = 4.14 m**处（荷载顶部以下4.14 m）；在底部降至0.72 kPa。这些角度在模块的图中显示。z = 5 m处的纵坐标为6.494 kPa（粗体行，算例1）。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

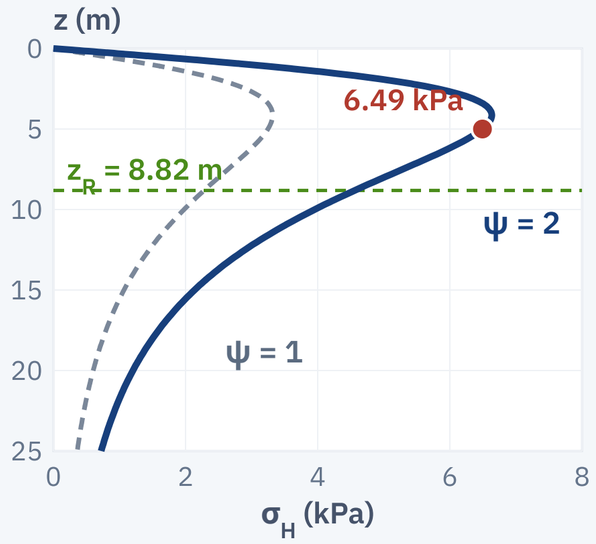
算例

已知条件

模型	**算例1中的三角形荷载；刚性墙；算例2的$H/30$表($n=30$, $h=H/30=0.8333$ m)**
方法	**Simpson法则；** $z_R=\int z\,\sigma\,dz\,/\,P_H$

求

P_H和z_R（手算，由表查得）；半无限介质的值；与模块结果的比较。



解答 (1/2)

解答

	σ_0	Σ奇数项(i = 1, 3, ..., 29)	Σ偶数项(i = 2, 4, ..., 28)	σ_{30}
σ_H (kPa)	0.000	47.277	46.234	0.723

1 Simpson求和与面积

$$\Sigma = \sigma_0 + 4(47.277) + 2(46.234) + \sigma_{30} = 282.30$$

$$P_H \approx \frac{h}{3}\Sigma = \frac{0.8333}{3}(282.30) = \mathbf{78.42}\ \text{kN/m}$$

手算**78.42 kN/m**；模块的精确积分结果为**78.41 kN/m**（相差0.004%）。在半无限介质中为其一半：**39.21 kN/m**。

解答 (2/2)

解答

	$z_0\sigma_0$	Σ单个	Σ成对	$z_{30}\sigma_{30}$
$z\sigma_H$ (kPa·m)	0.000	414.83	405.58	18.07

2 一阶矩与深度

$$\int z\,\sigma\,dz \approx \frac{0.8333}{3}\left[0 + 4(414.83) + 2(405.58) + 18.07\right] = 691.3 \text{ kN}$$

$$z_R = \frac{691.3}{78.42} = \mathbf{8.82}\text{ m} \quad \text{（自地面）} \qquad H - z_R = 16.18\text{ m} \quad \text{（自底部）}$$

手算**z_R = 8.82 m**；模块为8.82 m。合力78.41 kN/m作用于**地表以下8.82 m**处（位于底面以上16.18 m）；ψ变化时z_R不变。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

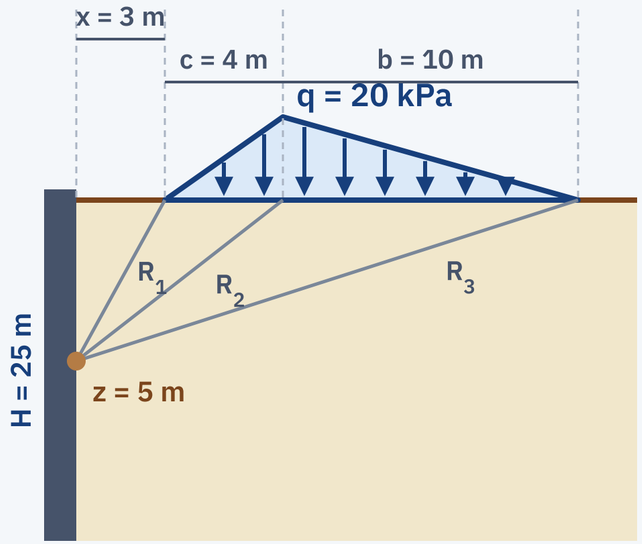
算例

已知条件

模型	**算例1**：$z = 5$ m；**半无限体**($\psi = 1$)
方法	$\sigma_H = \dfrac{2}{\pi}\int w(s)\,\dfrac{s^2 z}{(s^2+z^2)^2}\,ds$；$w$**三角形**：$s = 3$ m**处为**0，7 m**处为**q，17 m**处为**0
计算	**Simpson法则**，$n = 14$，$h = 1.0$ m ($s = 3, 4, \ldots, 17$)

求

由线荷载叠加求σ_H；与算例1闭式解的比较。



解答 (1/2)

解答

i	s (m)	w(s) (kPa)	f(s) = s²z/(s²+z²)² (1/m)	c	c·w·f
0	3	0.00	0.03893	1	0.00000
1	4	5.00	0.04759	4	0.95181
2	5	10.00	0.05000	2	1.00000
3	6	15.00	0.04837	4	2.90245
4	7	20.00	0.04474	2	1.78963
5	8	18.00	0.04040	4	2.90872
6	9	16.00	0.03604	2	1.15344
7	10	14.00	0.03200	4	1.79200
8	11	12.00	0.02838	2	0.68118
9	12	10.00	0.02521	4	1.00837
10	13	8.00	0.02245	2	0.35923
11	14	6.00	0.02007	4	0.48156
12	15	4.00	0.01800	2	0.14400
13	16	2.00	0.01621	4	0.12968
14	17	0.00	0.01466	1	0.00000
			Σ c·w·f =		**15.30207**

解答 (2/2)

解答

1 Simpson与ψ

$$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\,\frac{h}{3}\sum c_i\, w_i f_i = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{3}(15.30207) = \mathbf{3.2472}\ \text{kPa}\quad (\psi = 1)$$

$$\psi = 2:\quad \sigma_H = \mathbf{6.494}\ \text{kPa}$$

	线荷载之和(Simpson)	闭式解（A、B；算例1)	差值
σ_H, ψ = 1 (kPa)	3.2472	3.2468	%0.012
σ_H, ψ = 2 (kPa)	6.4944	6.4936	%0.012

两种途径给出相同的结果：闭合形式的A、B项是递增段与递减段线荷载积分之和。随着Simpson积分步长减小，差值趋于零(h = 0.5 m时为0.0006%)。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

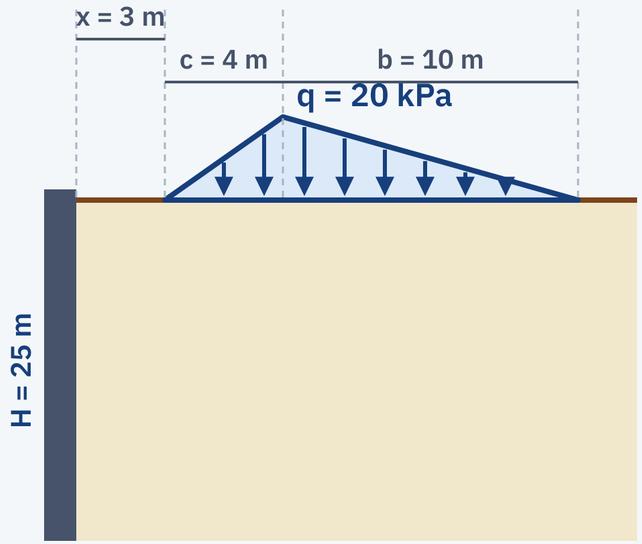
算例

已知条件

模型	$H = 25.0$ m；$q = 20$ kPa；**刚性墙；每次只改变其中一项**
变量	**起始距离**$x = 0; 3; 6; 10$ m ($c = 4, b = 10$ m)，**图形**$(c, b) = (2, 12); (4, 10); (7, 7); (10, 4); (12, 2)$ m ($x = 3$ m)
对比	**三角形的重量**$Q = q(c + b)/2$，**作为线荷载作用于其重心位置**$x + (2c + b)/3$

求

对每种情况给出P_H、z_R、$\sigma_{H,max}$及其所在深度；与等效线荷载的合力对比。



解答 (1/2)

解答

x (m)	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
0	83.46	41.73	6.53	10.12	1.93
3	78.41	39.21	8.82	6.63	4.14
6	72.25	36.13	10.51	4.91	6.14
10	63.33	31.67	12.13	3.65	8.64

(c, b) (m)	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
(2; 12)	79.61	39.81	8.33	7.30	3.63
(4; 10)	78.41	39.21	8.82	6.63	4.14
(7; 7)	76.44	38.22	9.45	5.87	4.78
(10; 4)	74.32	37.16	9.97	5.29	5.31
(12; 2)	72.85	36.43	10.28	4.97	5.62

荷载远离墙体(x ↑)时，**合力减小，z_R和峰值所在深度增大。**当总宽度不变(c + b = 14 m)、峰值远离墙体(c ↑)时，合力同样减小，z_R加深。ψ = 1时的数值为刚性墙的一半。

解答 (2/2)

解答

1 三角形的重量与重心

$$Q = \frac{q(c+b)}{2} = \frac{20(4+10)}{2} = \mathbf{140}\ \text{kN/m}$$

$$\bar{x} = x + \frac{2c+b}{3} = 3 + \frac{2(4)+10}{3} = \mathbf{9}\ \text{m} \qquad m = \frac{\bar{x}}{H} = 0.36$$

2 线荷载的合力(ψ = 2)：线荷载被积函数沿深度的积分

$$P_H = \psi \frac{Q}{\pi} \frac{H^2}{\bar{x}^2 + H^2} = \frac{2Q}{\pi} \frac{1}{1+m^2} = \frac{2(140)}{\pi} \frac{1}{1+0.1296} = \mathbf{78.90}\ \text{kN/m}$$

等效线荷载给出**78.90 kN/m**；三角形荷载的合力为**78.41 kN/m**（相差0.6%）。最大压力分别为6.43和6.63 kPa；z_R分别为9.22和8.82 m。就合力而言，差异很小；而压力分布图（最大压力及其深度、z_R）则与线荷载有所不同。

在GeoTerva中验算解答 ↗

小结

要点回顾

$\sigma_H = \psi\,(2q/\pi)\,\{[B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)]/c + [s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)]/b\}$；$A(s) = \tfrac{1}{2}[\tan^{-1}(s/z) - sz/R^2]$，$B(s) = (z/2)[\ln R^2 + z^2/R^2]$；$\psi = 2$时为刚性墙，$\psi = 1$时为半无限介质

算例($z = 5$ m)：R_1 5.831, R_2 8.602, R_3 17.720 m; α 23.499°, β 19.148°; σ_H = 3.247 kPa ($\psi = 1$), **6.494 kPa** ($\psi = 2$)

分布：地表处为0；最大压力**6.63 kPa**，位于$z = 4.14$ m处；之后减小

合力P_H = **78.41 kN/m**，z_R = **8.82 m**（自地面起算）；$\psi = 1$时，P_H = 39.21 kN/m，z_R相同

对比：荷载远离墙体时合力减小；三角形荷载给出的合力与作用于其形心的等效线荷载所给出的合力相近（78.41和78.90 kN/m）

参考文献

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; 本页面遵循该书。

注

全部数值算例均由模块自身的计算引擎生成；模块给出相同的数值。模块初始算例为H = 25 m、x = 3 m、c = 4 m、b = 10 m、q = 20 kPa的墙。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入自定义的三角形荷载、起始距离、各臂宽度和墙高；模块一并给出压力图、合力及其作用深度、三个视图、逐步解答和报告。

打开模块→

理论页面 →

用手机打开

试用模块无需注册。

如需在课堂教学中使用：info@geoterva.com