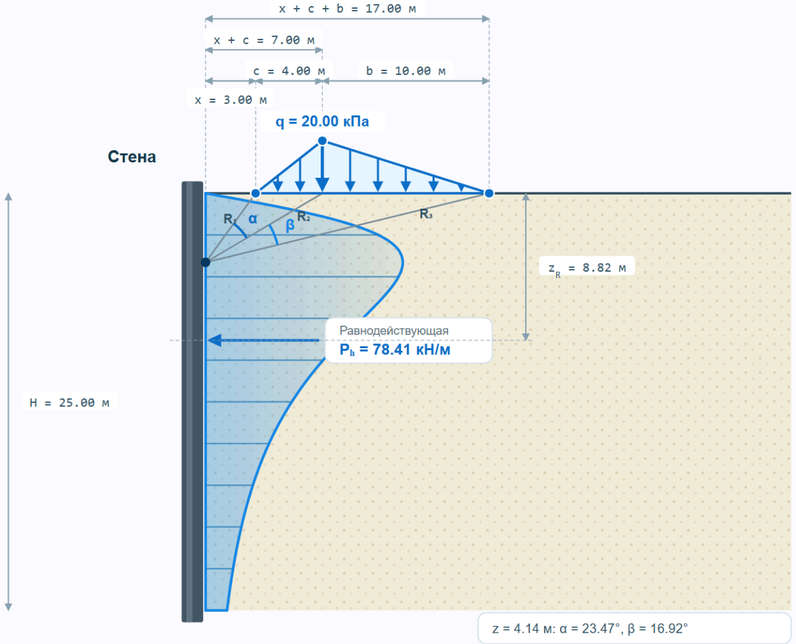
Презентация лекции по геотехнике · Внешние нагрузки

Треугольная пригрузка

Лекция: треугольная нагрузка, начинающаяся при x, нарастающая до пикового значения и убывающая до нуля; ордината на заданной глубине решается вручную, а профиль, равнодействующая и варианты приводятся в таблицах.

- Суперпозиция линейных нагрузок
- Функции A и B
- Жёсткая стена ψ = 2
- Равнодействующая и z_R
- Решается вручную



Что мы изучим на этой лекции?

Геометрия **треугольной нагрузки**: она начинается с нуля на расстоянии **x** от стены, на ширине **c** возрастает до значения q и на ширине **b** снова убывает до нуля

Определение радиусов R_1, R_2, R_3 и углов **α, β** (в радианах) на глубине z

Замкнутая форма горизонтального давления, получаемая суперпозицией линейных нагрузок: через функции **A(s)** и **B(s)**

Различие между **жёсткой стеной** (ψ = 2) и **полубесконечной средой** (ψ = 1)

Равнодействующая P_H и **глубина приложения z_R**: площадь и первый момент диаграммы; влияние формы нагрузки через x

ХОД ЛЕКЦИИ

Каждая тема излагается **в три шага**:

1 · **Теория**: формула и обоснование

2 · **Условие**: дано и требуется определить

3 · **Решение**: пошагово, с числами

Пример: H = 25 m, x = 3 m, c = 4 m, b = 10 m, q = 20 kPa; жёсткая стена. Одна ордината решается вручную при z = 5 m.

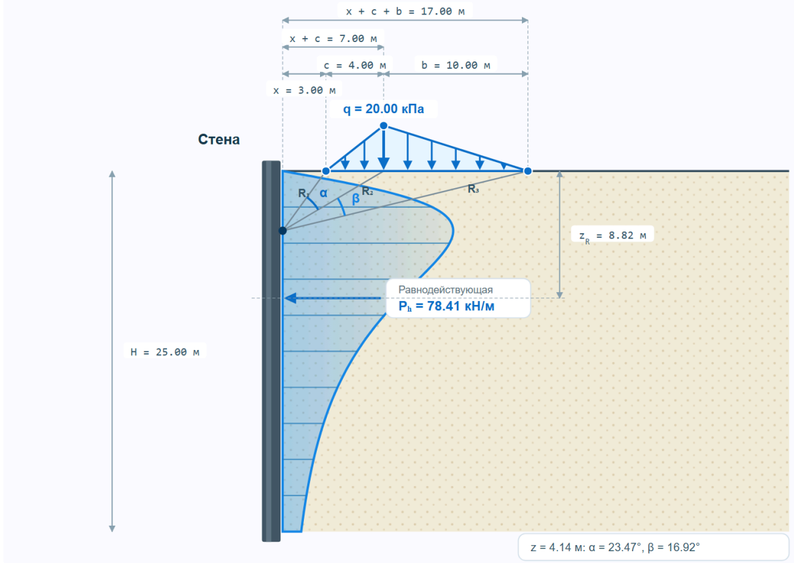
Треугольная пригрузка, действующая на стену

ТЕОРИЯ

Поверхностная пригрузка начинается на горизонтальном расстоянии **x** от стены

Её интенсивность линейно возрастает от нуля до наибольшего значения **q** на ширине **c**, затем линейно убывает до нуля на ширине **b**

На каждой глубине z стены геометрия определяется тремя радиусами R_1, R_2, R_3 и двумя углами **α, β**



H: полная высота стены; **x**: расстояние от стены до начала нагрузки

c: ширина возрастающего участка, **b**: ширина убывающего участка

q: наибольшая интенсивность пригрузки; **z**: глубина от уровня поверхности грунта

Геометрия на глубине z

ТЕОРИЯ

На глубине z длины трёх лучей, идущих от точки на стене к **началу**, **пику** и **концу** нагрузки, и два угла между ними приведены ниже

В уравнении давления углы принимаются в **радианах**; значения в градусах полезны только для оформления отчёта

$$R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \quad R_2 = \sqrt{(x+c)^2 + z^2} \quad R_3 = \sqrt{(x+c+b)^2 + z^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x+c}{z} - \tan^{-1}\frac{x}{z} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{x+c+b}{z} - \tan^{-1}\frac{x+c}{z}$$

Суперпозиция линейных нагрузок

ТЕОРИЯ

Треугольная нагрузка представляет собой непрерывный ряд линейных нагрузок интенсивностью **w(s)·ds** каждая; упругие горизонтальные напряжения (Flamant) суммируются вдоль нагрузки

При $s_1 = x$, $s_2 = x + c$, $s_3 = x + c + b$, $R^2 = s^2 + z^2$ и приведённых ниже функциях A, B интеграл берётся в замкнутом виде

$$\sigma_H = \psi \frac{2}{\pi} \int w(s) \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} ds$$

$$A(s) = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{s}{z} - \frac{sz}{R^2}\right] \qquad B(s) = \frac{z}{2}\left[\ln R^2 + \frac{z^2}{R^2}\right]$$

$$\sigma_H = \psi \frac{2q}{\pi}\left\{\frac{B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)}{c} + \frac{s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)}{b}\right\}$$

A, B, α, β и ψ

ТЕОРИЯ

Члены $\mathbf{A_2 - A_1}$ и $\mathbf{A_3 - A_2}$ содержат углы α и β, а члены $\mathbf{B_2 - B_1}$ и $\mathbf{B_3 - B_2}$ — логарифмы $\ln(R_2/R_1)$ и $\ln(R_3/R_2)$

Если ту же суперпозицию применить к равномерной полосе, получается в точности известное выражение $\mathbf{(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cdot\cos 2\alpha]}$; уравнение проверяется в таком виде

$\boldsymbol{\psi = 1}$ — полупространство (стены нет); $\boldsymbol{\psi = 2}$ — жёсткая неподатливая стена, удваивающая горизонтальное напряжение: значение модуля по умолчанию

Повторение расчёта по высоте стены даёт $\boldsymbol{\sigma_H(z)}$; давление на поверхности грунта равно нулю

Площадь эпюры и первый момент

ТЕОРИЯ

Равнодействующая сила от пригрузки на единицу длины стены и её глубина от поверхности грунта — это площадь и первый момент эпюры; модуль вычисляет оба интеграла численно с полной точностью

$$P_H = \int_0^H \sigma_H(z)\,dz$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z\,\sigma_H(z)\,dz}{P_H}$$

В примере P_H = **78.41 kN/m** (жёсткая стена) или **39.21 kN/m** (полубесконечная среда); в обоих случаях z_R = **8.82 m** ниже уровня грунта

Шесть шагов и одна ордината

ТЕОРИЯ

1 · задаются H, x, c, b, q и выбирается ψ; **2** · выбирается глубина z

3 · вычисляются R_1, R_2, R_3; **4** · вычисляются α и β (в радианах)

5 · вычисляется σ_H: функции A и B находятся в точках s_1, s_2, s_3 и подставляются

6 · Повторяется и интегрируется: эпюра давления, затем P_H и z_R

$$z = 5 \text{ m}: \quad R_1 = 5.831 \text{ m} \quad R_2 = 8.602 \text{ m} \quad R_3 = 17.720 \text{ m} \qquad \alpha = 23.499^\circ \quad \beta = 19.148^\circ$$

$$\sigma_H = 3.247 \text{ kPa} \ (\psi = 1) \ \rightarrow \ 2 \times 3.247 = 6.494 \text{ kPa} \ (\psi = 2) \qquad P_H = 78.41 \text{ kN/m} \quad z_R = 8.82 \text{ m}$$

Условие

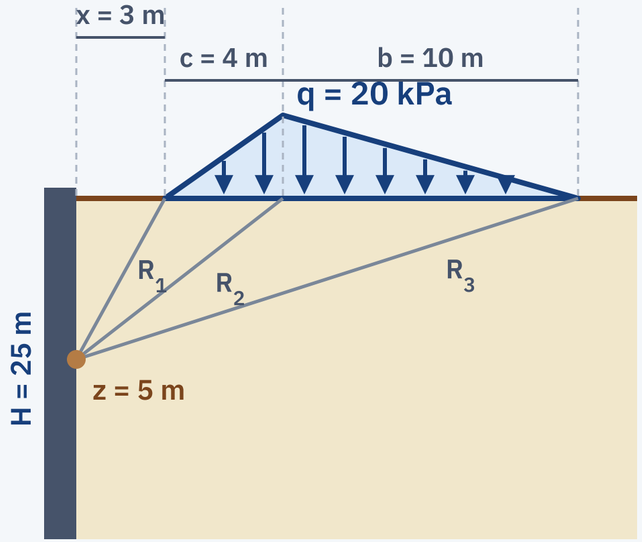
ПРИМЕР

Дано

Стена и нагрузка	$H = 25.0$ **m;** $x = 3.0$ **m;** $c = 4.0$ **m;** $b = 10.0$ **m;** $q = 20.0$ **kPa**
Стена	**полубесконечная среда ($\psi = 1$) и жёсткая стена ($\psi = 2$)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

На глубине **z = 5 m** значения **R_1, R_2, R_3, α, β**, A и B и горизонтальное давление **σ_H** (для двух значений ψ); сравнение с модулем.



Решение (1/3)

РЕШЕНИЕ

1 Точки s_1 = x, s_2 = x + c, s_3 = x + c + b и лучи

$$s_1 = 3 \text{ m} \quad s_2 = 3 + 4 = 7 \text{ m} \quad s_3 = 7 + 10 = 17 \text{ m}$$

$$R_1 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \mathbf{5.831} \quad R_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \mathbf{8.602} \quad R_3 = \sqrt{17^2 + 5^2} = \mathbf{17.720} \text{ m}$$

2 Углы (в радианах)

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \tan^{-1}\frac{3}{5} = 0.95055 - 0.54042 = \mathbf{0.41013} \text{ rad} \ \ (23.499^\circ)$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{17}{5} - \tan^{-1}\frac{7}{5} = 1.28474 - 0.95055 = \mathbf{0.33420} \text{ rad} \ \ (19.148^\circ)$$

Угол между началом нагрузки и её вершиной, измеренный из точки на стене, составляет **23.50°**; угол между вершиной и концом — **19.15°**.

Решение (2/3)

РЕШЕНИЕ

3 В трёх точках A(s) = ½[tan⁻¹(s/z) − sz/R²] и B(s) = (z/2)[ln R² + z²/R²]

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[0.54042 - \frac{3(5)}{34}\right] = 0.04962 \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left[0.95055 - \frac{7(5)}{74}\right] = 0.23879$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\left[1.28474 - \frac{17(5)}{314}\right] = 0.50702$$

s (m)	R² (m²)	tan⁻¹(s/z)	A(s)	ln R²	B(s)
3	34	0.54042	**0.04962**	3.52636	**10.6541**
7	74	0.95055	**0.23879**	4.30407	**11.6048**
17	314	1.28474	**0.50702**	5.74939	**14.5725**

Разности A содержат углы, разности B — логарифмы: **$A_2 - A_1$** = 0.18917, **$A_3 - A_2$** = 0.26824; **$B_2 - B_1$** = 0.9506, **$B_3 - B_2$** = 2.9678.

Решение (3/3)

РЕШЕНИЕ

4 Вклад возрастающих и убывающих ветвей

$$\text{возрастающий} = \frac{B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)}{c} = \frac{0.9506 - 3(0.18917)}{4} = 0.09578$$

$$\text{убывающий} = \frac{s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)}{b} = \frac{17(0.26824) - 2.9678}{10} = 0.15922$$

5 Полубесконечная среда (ψ = 1) и жёсткая стена (ψ = 2)

$$\sigma_H = \frac{2q}{\pi}\,(\text{возрастающий} + \text{убывающий}) = \frac{2(20)}{\pi}(0.09578 + 0.15922) = \mathbf{3.247}\ \text{kPa}\quad (\psi = 1)$$

$$\sigma_H = 2 \times 3.247 = \mathbf{6.494}\ \text{kPa}\quad (\psi = 2)$$

При z = 5 m **σ_H = 6.494 kPa** (жёсткая стена; 3.247 в полубесконечной среде). Модуль даёт то же значение.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

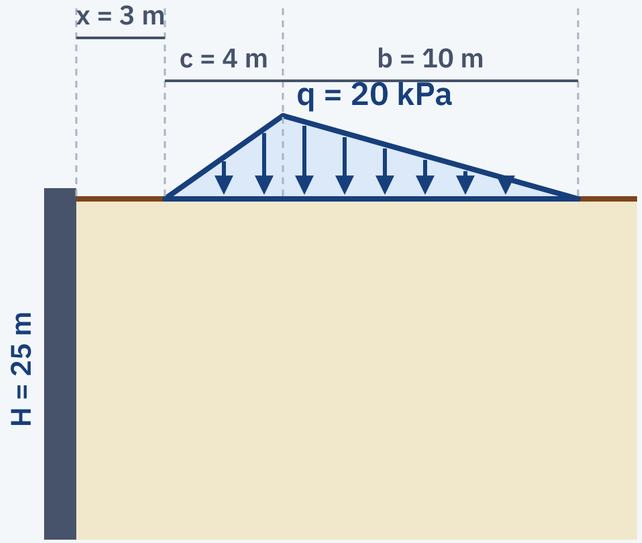
ПРИМЕР

Дано

Модель	**Треугольная нагрузка из примера 1; жёсткая стена; таблица через каждые $H/30 = 0.833$ m**
В каждой строке	**R_1, R_2, R_3, α, β и σ_H; значения для полубесконечной среды составляют половину значений для жёсткой стены**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Эпюра давления; максимальное давление и его глубина; углы на глубине максимума.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

z (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	R_3 (m)	α (°)	β (°)	σ_H (kPa)
0.00	3.000	7.000	17.000	0.00	0.00	0.000
0.83	3.114	7.049	17.020	8.74	3.98	2.513
1.67	3.432	7.196	17.082	15.66	7.79	4.520
2.50	3.905	7.433	17.183	20.15	11.29	5.815
3.33	4.485	7.753	17.324	22.55	14.37	6.463
4.17	5.134	8.146	17.503	23.48	16.99	6.635
5.00	**5.831**	**8.602**	**17.720**	**23.50**	**19.15**	**6.494**
5.83	6.560	9.112	17.973	22.98	20.87	6.168
6.67	7.311	9.667	18.260	22.17	22.19	5.746
7.50	8.078	10.259	18.581	21.22	23.17	5.286
8.33	8.857	10.883	18.933	20.23	23.86	4.821
9.17	9.645	11.534	19.314	19.24	24.30	4.374
10.00	10.440	12.207	19.723	18.29	24.54	3.955
10.83	11.241	12.898	20.158	17.39	24.62	3.569
11.67	12.046	13.606	20.618	16.54	24.58	3.218
12.50	12.855	14.327	21.101	15.75	24.42	2.901

z (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	R_3 (m)	α (°)	β (°)	σ_H (kPa)
13.33	13.667	15.059	21.605	15.02	24.19	2.617
14.17	14.481	15.802	22.129	14.34	23.90	2.363
15.00	15.297	16.553	22.672	13.71	23.56	2.136
15.83	16.115	17.312	23.231	13.12	23.18	1.933
16.67	16.935	18.077	23.807	12.58	22.78	1.752
17.50	17.755	18.848	24.398	12.07	22.37	1.591
18.33	18.577	19.624	25.002	11.60	21.94	1.447
19.17	19.400	20.405	25.620	11.17	21.51	1.319
20.00	20.224	21.190	26.249	10.76	21.07	1.204
20.83	21.048	21.978	26.889	10.38	20.64	1.101
21.67	21.873	22.769	27.540	10.02	20.21	1.009
22.50	22.699	23.564	28.200	9.69	19.79	0.926
23.33	23.525	24.361	28.869	9.37	19.38	0.851
24.17	24.352	25.160	29.547	9.08	18.97	0.784
25.00	25.179	25.962	30.232	8.80	18.57	0.723

Решение (2/2)

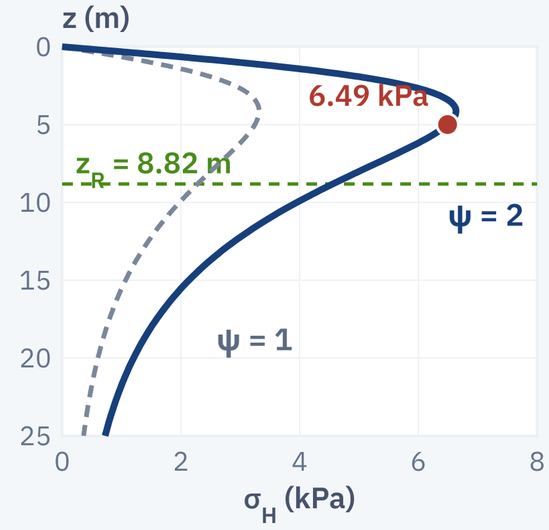
РЕШЕНИЕ

1 Давление на поверхности равно нулю, на глубине пика достигает максимума, затем уменьшается

$$z = 0: \quad \sigma_H = 0 \qquad z = 4.14 \text{ m}: \quad \sigma_H = \mathbf{6.635} \text{ kPa}$$

$$\alpha = 23.47^\circ \quad \beta = 16.92^\circ \qquad z = H: \quad \sigma_H = 0.723 \text{ kPa}$$

Наибольшее давление **6.63 kPa** — на глубине **z = 4.14 m** (на 4.14 m ниже верха нагрузки); у основания оно снижается до 0.72 kPa. Эти углы показаны на рисунке модуля. Ордината при z = 5 m равна 6.494 kPa (выделенная строка, Пример 1).



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

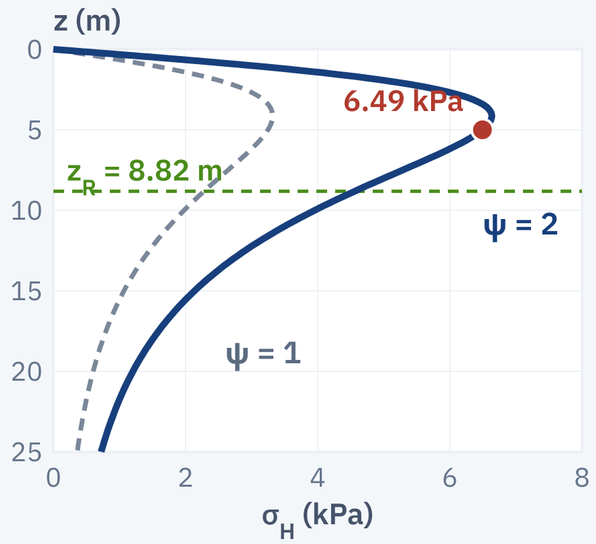
ПРИМЕР

Дано

Модель	**Треугольная нагрузка из Примера 1; жёсткая стена; таблица $H/30$ из Примера 2 ($n = 30$, $h = H/30 = 0.8333$ m)**
Метод	**Правило Simpson; $z_R = \int z\,\sigma\,dz \,/\, P_H$**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

P_H и **z_R** (вручную, по таблице); значения для полубесконечной среды; сравнение с результатом модуля.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

	σ_0	Σ нечётных (i = 1, 3, …, 29)	Σ чётных (i = 2, 4, …, 28)	σ_{30}
σ_H (kPa)	0.000	47.277	46.234	0.723

1 Сумма Симпсона и площадь

$$\Sigma = \sigma_0 + 4(47.277) + 2(46.234) + \sigma_{30} = 282.30$$

$$P_H \approx \frac{h}{3}\,\Sigma = \frac{0.8333}{3}(282.30) = \mathbf{78.42}\ \text{kN/m}$$

Вручную **78.42 kN/m**; точный интеграл модуля даёт **78.41 kN/m** (разница 0.004%). В полубесконечной среде — половина: **39.21 kN/m**.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

	$z_0\sigma_0$	Σ одинарный	Σ двойной	$z_{30}\sigma_{30}$
$z\sigma_H$ (kPa·m)	0.000	414.83	405.58	18.07

2 Первый момент и глубина

$$\int z\,\sigma\,dz \approx \frac{0.8333}{3}\left[0 + 4(414.83) + 2(405.58) + 18.07\right] = 691.3 \text{ kN}$$

$$z_R = \frac{691.3}{78.42} = \mathbf{8.82}\text{ m} \quad \text{(от поверхности грунта)} \qquad H - z_R = 16.18 \text{ m (от подошвы)}$$

Вручную **z_R = 8.82 m**; модуль даёт 8.82 m. Равнодействующая 78.41 kN/m действует **на 8.82 m ниже поверхности грунта** (на 16.18 m выше основания); при изменении ψ значение z_R не меняется.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

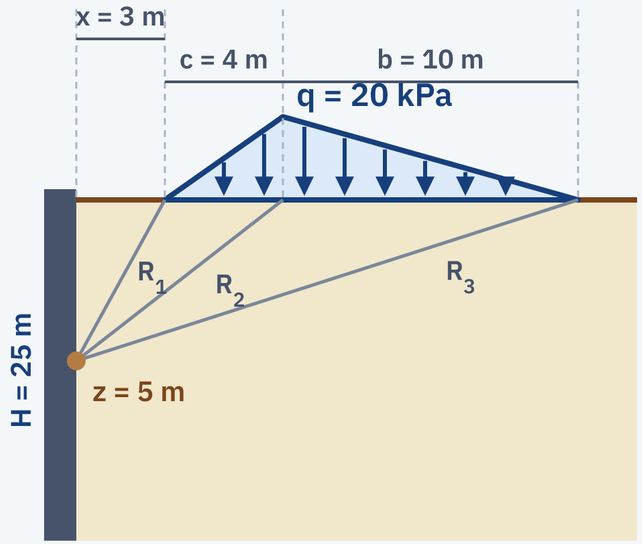
ПРИМЕР

Дано

Модель	**Пример 1:** $z = 5$ **m; полубесконечная среда** ($\psi = 1$)
Метод	$\sigma_H = \frac{2}{\pi} \int w(s) \, \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} \, ds$**;** w **треугольник: на** $s = 3$ **m —** 0**, на** 7 **m —** q**, на** 17 **m —** 0
Расчёт	**Simpson,** $n = 14$**,** $h = 1.0$ **m (**$s = 3, 4, \ldots, 17$**)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

σ_H как сумма от линейных нагрузок; сравнение с замкнутой формой Примера 1.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

i	s (m)	w(s) (kPa)	f(s) = s²z/(s²+z²)² (1/m)	c	c·w·f
0	3	0.00	0.03893	1	0.00000
1	4	5.00	0.04759	4	0.95181
2	5	10.00	0.05000	2	1.00000
3	6	15.00	0.04837	4	2.90245
4	7	20.00	0.04474	2	1.78963
5	8	18.00	0.04040	4	2.90872
6	9	16.00	0.03604	2	1.15344
7	10	14.00	0.03200	4	1.79200
8	11	12.00	0.02838	2	0.68118
9	12	10.00	0.02521	4	1.00837
10	13	8.00	0.02245	2	0.35923
11	14	6.00	0.02007	4	0.48156
12	15	4.00	0.01800	2	0.14400
13	16	2.00	0.01621	4	0.12968
14	17	0.00	0.01466	1	0.00000
			Σ c·w·f =		**15.30207**

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 Simpson и ψ

$$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\,\frac{h}{3}\sum c_i\, w_i\, f_i = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{3}(15.30207) = \mathbf{3.2472}\ \text{kPa}\quad (\psi = 1)$$

$$\psi = 2: \quad \sigma_H = \mathbf{6.494}\ \text{kPa}$$

	Сумма линейных нагрузок (Simpson)	Замкнутая форма (A, B; Пример 1)	Разность
σ_H, ψ = 1 (kPa)	3.2472	3.2468	%0.012
σ_H, ψ = 2 (kPa)	6.4944	6.4936	%0.012

Оба пути дают одинаковый результат: члены A и B в замкнутой форме — это сумма интегралов линейных нагрузок восходящей и нисходящей ветвей. По мере уменьшения шага Simpson разница стремится к нулю (0.0006% при h = 0.5 m).

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

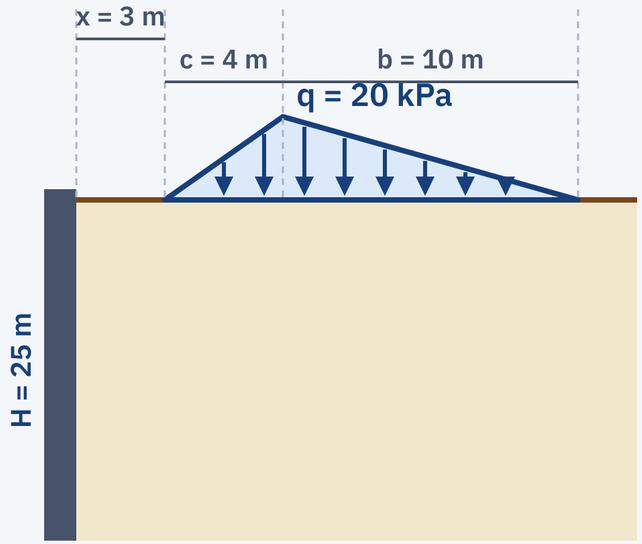
ПРИМЕР

Дано

Модель	$H = 25.0$ **m;** $q = 20$ **kPa; жёсткая стена; за один раз изменяется только один из них**
Переменные	**начальное расстояние** $x = 0; 3; 6; 10$ **m (** $c = 4$**,** $b = 10$ **m) и форма** $(c, b) = (2, 12); (4, 10); (7, 7); (10, 4); (12, 2)$ **m (**$x = 3$ **m)**
Сравнение	**вес треугольника** $Q = q(c + b)/2$**, линейная нагрузка в положении центра тяжести** $x + (2c + b)/3$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Для каждого случая — P_H, z_R, $\sigma_{H,max}$ и её глубина; сравнение с равнодействующей эквивалентной линейной нагрузки.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

x (m)	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
0	83.46	41.73	6.53	10.12	1.93
3	78.41	39.21	8.82	6.63	4.14
6	72.25	36.13	10.51	4.91	6.14
10	63.33	31.67	12.13	3.65	8.64

(c, b) (m)	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
(2; 12)	79.61	39.81	8.33	7.30	3.63
(4; 10)	78.41	39.21	8.82	6.63	4.14
(7; 7)	76.44	38.22	9.45	5.87	4.78
(10; 4)	74.32	37.16	9.97	5.29	5.31
(12; 2)	72.85	36.43	10.28	4.97	5.62

По мере удаления нагрузки от стены (x ↑) **равнодействующая уменьшается, а z_R и глубина максимума возрастают**. При постоянной полной ширине (c + b = 14 m) по мере удаления пика от стены (c ↑) равнодействующая также уменьшается, а z_R увеличивается. Значения при ψ = 1 составляют половину значений для жёсткой стены.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 Вес треугольника и центр тяжести

$$Q = \frac{q(c+b)}{2} = \frac{20(4+10)}{2} = \mathbf{140}\ \text{kN/m}$$

$$\bar{x} = x + \frac{2c+b}{3} = 3 + \frac{2(4)+10}{3} = \mathbf{9}\ \text{m} \qquad m = \frac{\bar{x}}{H} = 0.36$$

2 Равнодействующая линейной нагрузки (ψ = 2): интеграл подынтегральной функции линейной нагрузки по глубине

$$P_H = \psi \frac{Q}{\pi} \frac{H^2}{\bar{x}^2 + H^2} = \frac{2Q}{\pi} \frac{1}{1+m^2} = \frac{2(140)}{\pi} \frac{1}{1+0.1296} = \mathbf{78.90}\ \text{kN/m}$$

Эквивалентная линейная нагрузка даёт **78.90 kN/m**; равнодействующая треугольной нагрузки составляет **78.41 kN/m** (разница 0.6%). Наибольшее давление равно 6.43 и 6.63 kPa; z_R — 9.22 и 8.82 m. По равнодействующей разница невелика, однако эпюра давления (наибольшее давление и его глубина, z_R) отличается от эпюры для линейной нагрузки.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Резюме

Главное

$\sigma_H = \psi\,(2q/\pi)\,\{[B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)]/c + [s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)]/b\}$; $A(s) = \tfrac{1}{2}[\tan^{-1}(s/z) - sz/R^2]$, $B(s) = (z/2)[\ln R^2 + z^2/R^2]$; $\psi = 2$ — жёсткая стена, $\psi = 1$ — полубесконечная среда

Пример (z = 5 m): R_1 5.831, R_2 8.602, R_3 17.720 m; α 23.499°, β 19.148°; σ_H = 3.247 kPa ($\psi = 1$), **6.494 kPa** ($\psi = 2$)

Эпюра: на поверхности 0; максимальное давление **6.63 kPa** при z = 4.14 m; далее уменьшается

Равнодействующая P_H = **78.41 kN/m**, z_R = **8.82 m** (от поверхности грунта); при $\psi = 1$ P_H = 39.21 kN/m, z_R то же

Сопоставление: по мере удаления нагрузки от стены равнодействующая уменьшается; треугольная нагрузка даёт равнодействующую, близкую к равнодействующей эквивалентной линейной нагрузки в центре тяжести (78.41 и 78.90 kN/m)

Список литературы

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; эта страница основана на данном источнике.

ПРИМЕЧАНИЕ

Все числовые примеры получены с помощью собственного расчётного ядра модуля; модуль даёт те же значения. Начальный пример модуля — стена с H = 25 m, x = 3 m, c = 4 m, b = 10 m, q = 20 kPa.

GeoTerva

Геотехнические расчёты онлайн

От теории к практике

В GeoTerva вводятся собственная треугольная нагрузка, начальное расстояние, ширины плеч и высота стены; модуль выдаёт эпюру давления, равнодействующую и глубину её приложения, три вида, пошаговое решение и отчёт вместе.

Открыть модуль →

Страница теории →

Открыть на телефоне
Для пробных модулей регистрация не требуется.