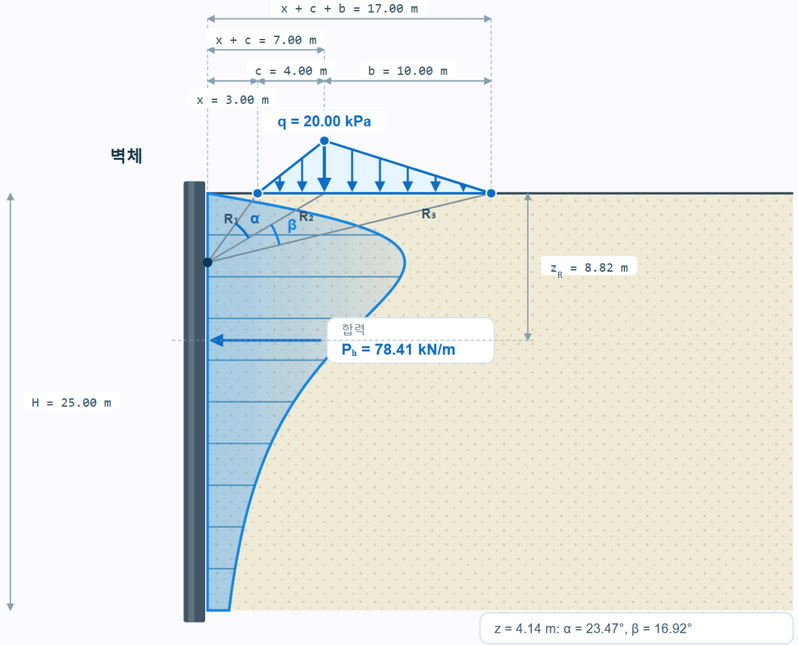
지반공학 강의 자료 · 상부하중

삼각 상재하중

강의: x에서 시작하여 정점 값까지 상승한 뒤 0으로 감소하는 삼각하중; 한 깊이에서의 종좌표를 손으로 풀고, 분포, 합력 및 변형 사례는 표로 제시한다.

선하중의 중첩 | A와 B 함수 | 강성 벽체 ψ = 2 | 합력 및 z_R | 수계산 가능



개요

이 강의에서 다루는 내용

삼각형 하중의 기하: 벽체에서 **x** 거리의 위치에서 0으로 시작하여 폭 **c** 구간에서 q까지 증가하고 폭 **b** 구간에서 다시 0으로 감소한다

깊이 z에서 반지름 $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$ 및 라디안 단위의 각도 **α, β**를 구하는 방법

선하중의 중첩으로 얻는 수평압력의 닫힌 형태 식: **A(s)**와 **B(s)** 함수로 표현

강성 벽체(ψ = 2)와 **반무한 매질**(ψ = 1)의 차이

합력 P_H와 **작용 깊이 z_R**: 분포도의 면적과 일차 모멘트; x에 따른 하중 형상의 영향

강의 흐름

각 주제는 **세 단계**로 다룬다:

1 · **이론**: 공식과 그 근거

2 · **문제**: 조건과 구하는 값

3 · **풀이**: 단계별 수치 계산

예제: H = 25 m, x = 3 m, c = 4 m, b = 10 m, q = 20 kPa; 강성 벽체. 한 종좌표를 z = 5 m에서 수계산한다.

벽체에 작용하는 삼각형 상재하중

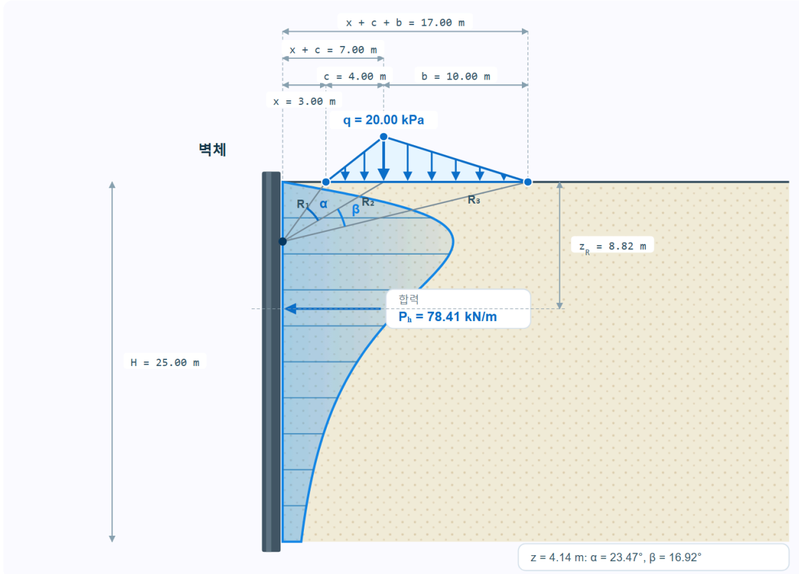
이론

지표 상재하중은 벽체로부터 수평거리 **x**에서 시작된다

강도는 폭 **c**에 걸쳐 0에서 최댓값 **q**까지 선형으로 증가하고, 이어서 폭 **b**에 걸쳐 다시 0까지 선형으로 감소한다

벽체의 각 깊이 z에서 형상은 세 반지름 R_1, R_2, R_3 및 두 각 **α**, **β**로 정의된다

H: 벽체 전체 높이; **x**: 벽체로부터 하중 시작점까지의 거리
c: 증가 구간의 폭, **b**: 감소 구간의 폭
q: 최대 상재하중 강도; **z**: 지표면으로부터의 깊이



깊이 z에서의 기하

이론

깊이 z에서 벽체의 점으로부터 하중의 **시작점**, **정점**, **끝점**으로 가는 세 선의 길이와 그 사이의 두 각은 아래와 같다

압력 방정식에서 각도는 **라디안**으로 취하며, 도(°) 값은 보고용으로만 유용하다

$$R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \quad R_2 = \sqrt{(x+c)^2 + z^2} \quad R_3 = \sqrt{(x+c+b)^2 + z^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x+c}{z} - \tan^{-1}\frac{x}{z} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{x+c+b}{z} - \tan^{-1}\frac{x+c}{z}$$

선하중의 중첩

이론

삼각하중은 각각 강도가 **w(s)·ds**인 연속적인 선하중의 집합이며, 탄성 수평응력(Flamant)을 하중 구간 전체에 걸쳐 합산한다

$s_1 = x$, $s_2 = x + c$, $s_3 = x + c + b$, $R^2 = s^2 + z^2$이고 아래의 함수 A, B를 이용하면 적분이 닫힌 형태로 구해진다

$$\sigma_H = \psi \frac{2}{\pi} \int w(s) \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} \, ds$$

$$A(s) = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{s}{z} - \frac{sz}{R^2}\right] \qquad B(s) = \frac{z}{2}\left[\ln R^2 + \frac{z^2}{R^2}\right]$$

$$\sigma_H = \psi \frac{2q}{\pi}\left\{\frac{B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)}{c} + \frac{s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)}{b}\right\}$$

A, B, α, β 및 ψ

이론

$A_2 - A_1$과 $A_3 - A_2$ 항은 α와 β 각을, $B_2 - B_1$과 $B_3 - B_2$ 항은 $\ln(R_2/R_1)$, $\ln(R_3/R_2)$ 로그를 포함한다

동일한 중첩을 등분포 띠하중에 적용하면 잘 알려진 $(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cdot\cos 2\alpha]$ 식이 정확히 얻어지며, 방정식은 이 형태로 검토된다

$\psi = 1$은 반무한 매질(벽체 없음)이고, $\psi = 2$는 수평응력을 두 배로 증가시키는 변위가 없는 강성 벽체이며, 모듈의 기본값이다

계산을 벽체 높이 전체에 걸쳐 반복하면 $\sigma_H(z)$ 값을 얻는다; 압력은 지표면에서 0이다

분포도의 면적과 1차 모멘트

이론

벽체 단위 길이당 **상재하중의 합력**과 지표면으로부터의 그 깊이는 선도의 면적과 1차 모멘트에 해당한다; 모듈은 두 적분을 모두 완전한 정밀도로 수치 계산한다

$$P_H = \int_0^H \sigma_H(z)\,dz$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z\,\sigma_H(z)\,dz}{P_H}$$

예제에서 **P_H = 78.41 kN/m** (강성 벽체) 또는 **39.21 kN/m** (반무한 매질)이며, 두 경우 모두 지표면 아래 **z_R = 8.82 m**이다

여섯 단계와 한 개의 종좌표

이론

1 · H, x, c, b, q를 정의하고 ψ를 선택한다; **2** · 깊이 z를 선택한다

3 · R_1, R_2, R_3를 계산한다; **4** · α와 β를 계산한다(라디안)

5 · σ_H 계산: 함수 A와 B를 s_1, s_2, s_3 지점에서 구하여 대입한다

6 · 반복 및 적분: 압력 분포, 이어서 P_H와 z_R

$$z = 5\ \text{m}: \quad R_1 = 5.831\ \text{m} \quad R_2 = 8.602\ \text{m} \quad R_3 = 17.720\ \text{m} \qquad \alpha = 23.499^\circ \quad \beta = 19.148^\circ$$

$$\sigma_H = 3.247\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1) \ \rightarrow\ \ 2 \times 3.247 = 6.494\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2) \qquad P_H = 78.41\ \text{kN/m} \quad z_R = 8.82\ \text{m}$$

문제

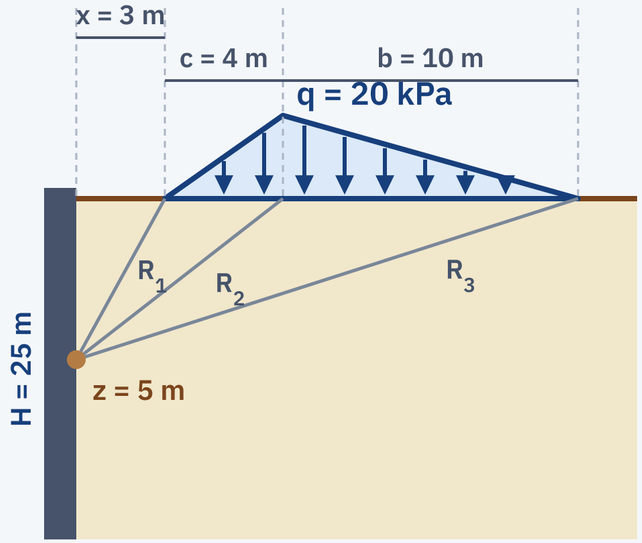
예제

구하는 값

깊이 **z = 5 m**에서의 $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$, **α**, **β**, A 및 B의 값과 수평 압력 $\boldsymbol{\sigma_H}$(두 가지 ψ에 대해); 모듈과의 비교.

조건

벽체와 하중	$H = 25.0$ **m;** $x = 3.0$ **m;** $c = 4.0$ **m;** $b = 10.0$ **m;** $q = 20.0$ **kPa**
벽체	**반무한 매질 ($\psi = 1$)과 강성 벽체 ($\psi = 2$)**



풀이 (1/3)

풀이

1 점 $s_1 = x$, $s_2 = x + c$, $s_3 = x + c + b$ 및 반직선

$$s_1 = 3\ \text{m} \quad s_2 = 3 + 4 = 7\ \text{m} \quad s_3 = 7 + 10 = 17\ \text{m}$$

$$R_1 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \mathbf{5.831} \quad R_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \mathbf{8.602} \quad R_3 = \sqrt{17^2 + 5^2} = \mathbf{17.720}\ \text{m}$$

2 각도 (라디안)

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \tan^{-1}\frac{3}{5} = 0.95055 - 0.54042 = \mathbf{0.41013}\ \text{rad}\ \ (23.499^\circ)$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{17}{5} - \tan^{-1}\frac{7}{5} = 1.28474 - 0.95055 = \mathbf{0.33420}\ \text{rad}\ \ (19.148^\circ)$$

벽체 위의 점에서 하중의 시점과 정점 사이의 각은 **23.50°**, 정점과 끝점 사이의 각은 **19.15°** 이다.

풀이 (2/3)

풀이

3 세 점에서 $A(s) = \tfrac{1}{2}[\tan^{-1}(s/z) - sz/R^2]$ 및 $B(s) = (z/2)[\ln R^2 + z^2/R^2]$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[0.54042 - \frac{3(5)}{34}\right] = 0.04962 \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left[0.95055 - \frac{7(5)}{74}\right] = 0.23879$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\left[1.28474 - \frac{17(5)}{314}\right] = 0.50702$$

s (m)	R^2 (m²)	$\tan^{-1}(s/z)$	A(s)	ln R^2	B(s)
3	34	0.54042	**0.04962**	3.52636	**10.6541**
7	74	0.95055	**0.23879**	4.30407	**11.6048**
17	314	1.28474	**0.50702**	5.74939	**14.5725**

A의 차이는 각도를, B의 차이는 로그를 나타낸다: $\mathbf{A_2 - A_1} = 0.18917$, $\mathbf{A_3 - A_2} = 0.26824$; $\mathbf{B_2 - B_1} = 0.9506$, $\mathbf{B_3 - B_2} = 2.9678$.

풀이 (3/3)

풀이

4 증가 구간과 감소 구간의 기여

$$\text{증가} = \frac{B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)}{c} = \frac{0.9506 - 3(0.18917)}{4} = 0.09578$$

$$\text{감소하는} = \frac{s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)}{b} = \frac{17(0.26824) - 2.9678}{10} = 0.15922$$

5 반무한 매질 (ψ = 1)과 강성 벽체 (ψ = 2)

$$\sigma_H = \frac{2q}{\pi}(\text{증가} + \text{감소하는}) = \frac{2(20)}{\pi}(0.09578 + 0.15922) = \mathbf{3.247}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1)$$

$$\sigma_H = 2 \times 3.247 = \mathbf{6.494}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2)$$

z = 5 m에서 **σ_H = 6.494 kPa**(강성 벽체; 반무한 매질에서는 3.247). 모듈은 같은 값을 산출한다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

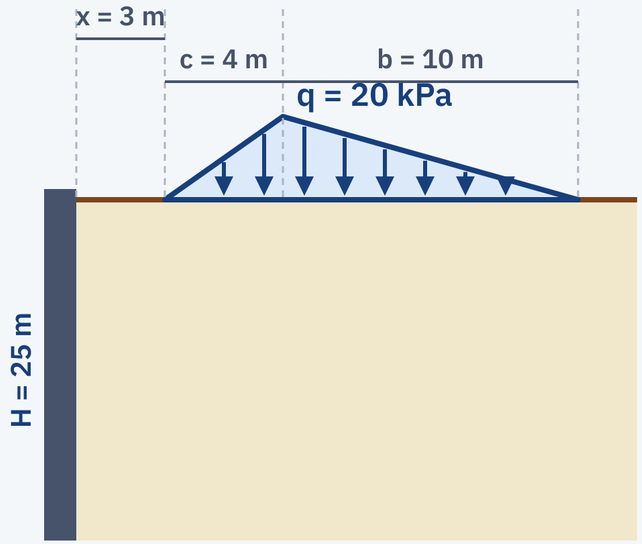
예제

구하는 값

압력 분포; 최대 압력과 그 깊이; 정점 깊이에서의 각도.

조건

모델	**예제 1의 삼각하중; 강성 벽체; 표는 $H/30 = 0.833$ m마다**
각 행마다	**$R_1, R_2, R_3, \alpha, \beta$ 및 σ_H; 반무한 매질의 값은 강성 벽체 값의 절반이다**



풀이 (1/2)

풀이

z (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	R_3 (m)	α (°)	β (°)	σ_H (kPa)
0.00	3.000	7.000	17.000	0.00	0.00	0.000
0.83	3.114	7.049	17.020	8.74	3.98	2.513
1.67	3.432	7.196	17.082	15.66	7.79	4.520
2.50	3.905	7.433	17.183	20.15	11.29	5.815
3.33	4.485	7.753	17.324	22.55	14.37	6.463
4.17	5.134	8.146	17.503	23.48	16.99	6.635
5.00	**5.831**	**8.602**	**17.720**	**23.50**	**19.15**	**6.494**
5.83	6.560	9.112	17.973	22.98	20.87	6.168
6.67	7.311	9.667	18.260	22.17	22.19	5.746
7.50	8.078	10.259	18.581	21.22	23.17	5.286
8.33	8.857	10.883	18.933	20.23	23.86	4.821
9.17	9.645	11.534	19.314	19.24	24.30	4.374
10.00	10.440	12.207	19.723	18.29	24.54	3.955
10.83	11.241	12.898	20.158	17.39	24.62	3.569
11.67	12.046	13.606	20.618	16.54	24.58	3.218
12.50	12.855	14.327	21.101	15.75	24.42	2.901
13.33	13.667	15.059	21.605	15.02	24.19	2.617
14.17	14.481	15.802	22.129	14.34	23.90	2.363
15.00	15.297	16.553	22.672	13.71	23.56	2.136
15.83	16.115	17.312	23.231	13.12	23.18	1.933
16.67	16.935	18.077	23.807	12.58	22.78	1.752
17.50	17.755	18.848	24.398	12.07	22.37	1.591
18.33	18.577	19.624	25.002	11.60	21.94	1.447
19.17	19.400	20.405	25.620	11.17	21.51	1.319
20.00	20.224	21.190	26.249	10.76	21.07	1.204
20.83	21.048	21.978	26.889	10.38	20.64	1.101
21.67	21.873	22.769	27.540	10.02	20.21	1.009
22.50	22.699	23.564	28.200	9.69	19.79	0.926
23.33	23.525	24.361	28.869	9.37	19.38	0.851
24.17	24.352	25.160	29.547	9.08	18.97	0.784
25.00	25.179	25.962	30.232	8.80	18.57	0.723

풀이 (2/2)

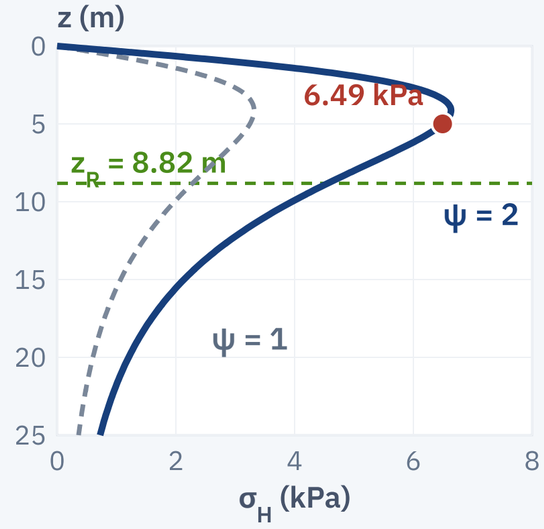
풀이

1 압력은 지표면에서 0이고, 정점 깊이에서 최댓값에 이르며, 이후 감소한다

$$z = 0: \quad \sigma_H = 0 \qquad z = 4.14\ \text{m}: \quad \sigma_H = \mathbf{6.635}\ \text{kPa}$$

$$\alpha = 23.47^\circ \quad \beta = 16.92^\circ \qquad z = H: \quad \sigma_H = 0.723\ \text{kPa}$$

최대 압력은 **6.63 kPa**이며 **z = 4.14 m**에서 나타난다(하중 상단으로부터 4.14 m 아래). 하단에서는 0.72 kPa로 감소한다. 이 각도는 모듈의 그림에 표시된다. z = 5 m에서의 세로좌표 값은 6.494 kPa이다(굵은 행, 예제 1).



GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

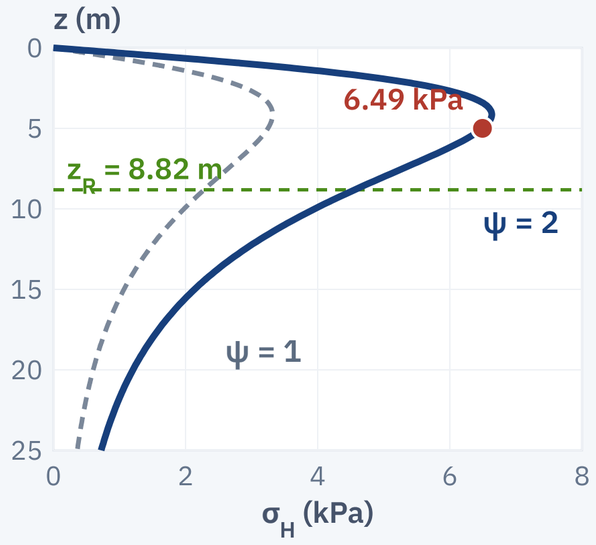
예제

구하는 값

P_H와 z_R (손계산, 표 이용); 반무한 매질 값; 모듈 결과와의 비교.

조건

모델	**예제 1의 삼각하중; 강성 벽체; 예제 2의 $H/30$ 표 ($n = 30$, $h = H/30 = 0.8333$ m)**
방법	**Simpson 공식;** $z_R = \int z\,\sigma\,dz \,/\, P_H$



풀이 (1/2)

풀이

	σ_0	Σ 홀수항 (i = 1, 3, …, 29)	Σ 짝수항 (i = 2, 4, …, 28)	σ_{30}
σ_H (kPa)	0.000	47.277	46.234	0.723

1 Simpson 합과 면적

$$\Sigma = \sigma_0 + 4(47.277) + 2(46.234) + \sigma_{30} = 282.30$$

$$P_H \approx \frac{h}{3}\,\Sigma = \frac{0.8333}{3}(282.30) = \mathbf{78.42}\ \text{kN/m}$$

손계산 **78.42 kN/m**; 모듈의 정밀 적분은 **78.41 kN/m** (차이 0.004%). 반무한 매질에서는 그 절반: **39.21 kN/m**.

풀이 (2/2)

풀이

	$z_0\sigma_0$	Σ 단일	Σ 이중	$z_{30}\sigma_{30}$
$z\sigma_H$ (kPa·m)	0.000	414.83	405.58	18.07

2 1차 모멘트와 깊이

$$\int z\,\sigma\,dz \approx \frac{0.8333}{3}\left[0 + 4(414.83) + 2(405.58) + 18.07\right] = 691.3 \text{ kN}$$

$$z_R = \frac{691.3}{78.42} = \mathbf{8.82}\ \text{m}\ \text{(지표에서)} \qquad H - z_R = 16.18\ \text{m (저면에서)}$$

손계산으로 **z_R = 8.82 m**이고, 모듈은 8.82 m이다. 합력 78.41 kN/m는 **지표면 아래 8.82 m**(저면에서 16.18 m 위)에 작용하며, ψ가 바뀌어도 z_R은 변하지 않는다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

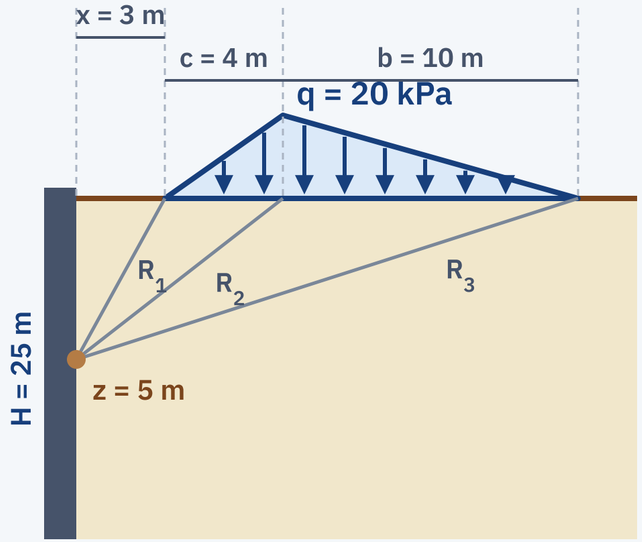
예제

조건

모델	**예제 1:** $z = 5$ **m; 반무한체** ($\psi = 1$)
방법	$\sigma_H = \dfrac{2}{\pi}\int w(s)\,\dfrac{s^2 z}{(s^2+z^2)^2}\,ds$**;** w **삼각형:** $s = 3$ **m에서** 0**,** 7 **m에서** q**,** 17 **m에서** 0
계산	**Simpson,** $n = 14$**,** $h = 1.0$ **m (**$s = 3, 4, \ldots, 17$**)**

구하는 값

선하중의 합으로 구한 σ_H; 예제 1의 닫힌 형태 해와의 비교.



풀이 (1/2)

풀이

i	s (m)	w(s) (kPa)	f(s) = s²z/(s²+z²)² (1/m)	c	c·w·f
0	3	0.00	0.03893	1	0.00000
1	4	5.00	0.04759	4	0.95181
2	5	10.00	0.05000	2	1.00000
3	6	15.00	0.04837	4	2.90245
4	7	20.00	0.04474	2	1.78963
5	8	18.00	0.04040	4	2.90872
6	9	16.00	0.03604	2	1.15344
7	10	14.00	0.03200	4	1.79200
8	11	12.00	0.02838	2	0.68118
9	12	10.00	0.02521	4	1.00837
10	13	8.00	0.02245	2	0.35923
11	14	6.00	0.02007	4	0.48156
12	15	4.00	0.01800	2	0.14400
13	16	2.00	0.01621	4	0.12968
14	17	0.00	0.01466	1	0.00000
			Σ c·w·f =		**15.30207**

풀이 (2/2)

풀이

1 Simpson과 ψ

$$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\,\frac{h}{3}\sum c_i\, w_i\, f_i = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{3}(15.30207) = \mathbf{3.2472}\ \text{kPa}\quad (\psi = 1)$$

$$\psi = 2: \quad \sigma_H = \mathbf{6.494}\ \text{kPa}$$

	선하중의 합 (Simpson)	닫힌 형태 (A, B; 예제 1)	차이
σ_H, ψ = 1 (kPa)	3.2472	3.2468	%0.012
σ_H, ψ = 2 (kPa)	6.4944	6.4936	%0.012

두 방법은 같은 결과를 준다. 닫힌 형태의 A, B 항은 증가 구간과 감소 구간의 선하중 적분의 합이다. Simpson 구간이 작아질수록 차이는 0으로 수렴한다(h = 0.5 m에서 0.0006%).

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

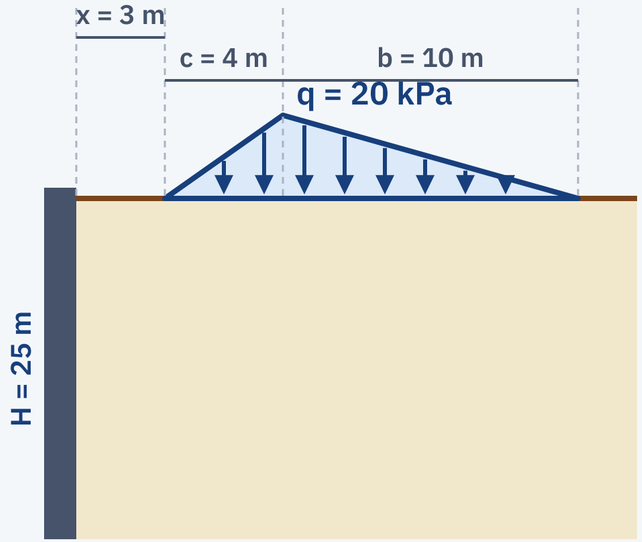
예제

조건

모델	$H = 25.0$ m; $q = 20$ kPa; 강성 벽체; 한 번에 하나만 변경
변수	시작 거리 $x = 0; 3; 6; 10$ m($c = 4$, $b = 10$ m) 및 형상 $(c, b) = (2, 12); (4, 10); (7, 7); (10, 4)$; $(12, 2)$ m($x = 3$ m)
비교	삼각형의 무게 $Q = q(c + b)/2$, 무게중심이 $x + (2c + b)/3$ 위치에 있는 선하중

구하는 값

각 경우의 P_H, z_R, $\sigma_{H,max}$ 및 그 깊이; 등가 선하중의 합력과의 비교.



풀이 (1/2)

풀이

x (m)	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
0	83.46	41.73	6.53	10.12	1.93
3	78.41	39.21	8.82	6.63	4.14
6	72.25	36.13	10.51	4.91	6.14
10	63.33	31.67	12.13	3.65	8.64

(c, b) (m)	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
(2; 12)	79.61	39.81	8.33	7.30	3.63
(4; 10)	78.41	39.21	8.82	6.63	4.14
(7; 7)	76.44	38.22	9.45	5.87	4.78
(10; 4)	74.32	37.16	9.97	5.29	5.31
(12; 2)	72.85	36.43	10.28	4.97	5.62

하중이 벽체에서 멀어질수록(x ↑) **합력은 감소하고, z_R과 압력 정점의 깊이는 증가한다.** 전체 폭이 일정할 때(c + b = 14 m) 정점이 벽체에서 멀어져도(c ↑) 합력은 감소하고 z_R은 깊어진다. ψ = 1일 때의 값은 강성 벽체 값의 절반이다.

풀이 (2/2)

풀이

1 삼각형의 중량과 무게중심

$$Q = \frac{q(c+b)}{2} = \frac{20(4+10)}{2} = \mathbf{140}\ \text{kN/m}$$

$$\bar{x} = x + \frac{2c+b}{3} = 3 + \frac{2(4)+10}{3} = \mathbf{9}\ \text{m} \qquad m = \frac{\bar{x}}{H} = 0.36$$

2 선하중의 합력 (ψ = 2): 선하중 피적분함수의 깊이 방향 적분

$$P_H = \psi \frac{Q}{\pi} \frac{H^2}{\bar{x}^2 + H^2} = \frac{2Q}{\pi} \frac{1}{1+m^2} = \frac{2(140)}{\pi} \frac{1}{1+0.1296} = \mathbf{78.90}\ \text{kN/m}$$

등가 선하중은 **78.90 kN/m**를 주며, 삼각하중의 합력은 **78.41 kN/m**이다(차이 0.6%). 최대 압력은 6.43 및 6.63 kPa이고, z_R은 9.22 및 8.82 m이다. 합력 측면에서는 차이가 작으나, 압력 분포도(최대 압력과 그 깊이, z_R)는 선하중의 경우와 달라진다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

요약

핵심 정리

$\sigma_H = \psi\,(2q/\pi)\,\{[B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)]/c + [s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)]/b\}$; $A(s) = \tfrac{1}{2}[\tan^{-1}(s/z) - sz/R^2]$, $B(s) = (z/2)[\ln R^2 + z^2/R^2]$; $\psi = 2$ (강성 벽체), $\psi = 1$ (반무한 매질)

예제 ($z = 5$ m): R_1 5.831, R_2 8.602, R_3 17.720 m; α 23.499°, β 19.148°; σ_H = 3.247 kPa ($\psi = 1$), **6.494 kPa** ($\psi = 2$)

분포: 지표에서 0; 최대 압력 **6.63 kPa**, z = 4.14 m에서; 이후 감소

합력 P_H = **78.41 kN/m**, z_R = **8.82 m**(지표면으로부터); $\psi = 1$일 때 P_H = 39.21 kN/m, z_R은 같다

비교: 하중이 벽체에서 멀어질수록 합력은 감소한다; 삼각하중은 도심에 놓인 등가 선하중과 비슷한 합력을 준다(78.41과 78.90 kN/m)

참고문헌

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; 본 페이지는 이 문헌을 준용합니다.

참고

수치 예제는 모두 모듈 자체의 계산 엔진으로 산출하였으며, 모듈도 같은 값을 제시한다. 모듈의 초기 예제는 H = 25 m, x = 3 m, c = 4 m, b = 10 m, q = 20 kPa인 벽체이다.

GeoTerva

온라인 지반공학 계산

이론에서 실무로

삼각하중, 시작 거리, 양쪽 변의 폭, 벽체 높이를 GeoTerva에 직접 입력한다. 모듈은 압력 분포도, 합력과 작용 깊이, 세 가지 보기, 단계별 풀이와 보고서를 함께 제공한다.

모듈 열기 →

이론 페이지 →

스마트폰으로 열기

체험 모듈은 가입 없이 이용할 수 있습니다.

강의에서 사용하려면: info@geoterva.com