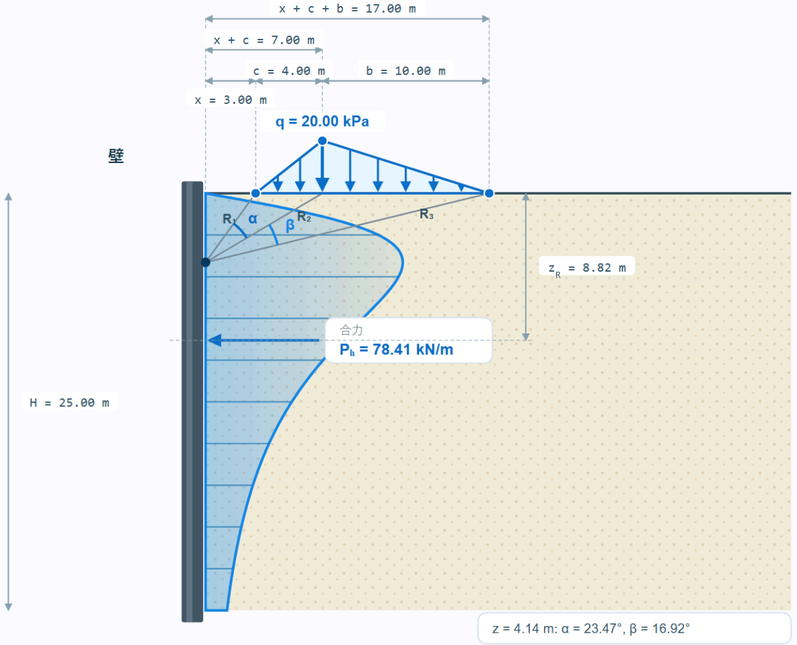
GeoTerva

地盤工学の講義スライド ・ 上載荷重

三角形分布の上載荷重

講義：xから始まりピーク値まで上昇してゼロに至る三角形分布荷重；ある深さにおける縦距を手計算で求め、分布、合力および変種を表で示す。

線状荷重の重ね合わせ
A関数とB関数
剛体壁 $\psi = 2$
合力とz_R
手計算で解ける



この講義で学ぶこと

三角形分布荷重の形状：壁から**x**の距離で0から始まり、幅**c**でqの値まで増加し、幅**b**で再び0まで減少する

深さzにおいて半径$\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$および角度$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$を求めること（ラジアン）

線荷重の重ね合わせから得られる水平土圧の閉形式：**A(s)**および**B(s)**関数を用いて

剛体壁（$\psi = 2$）と**半無限体**（$\psi = 1$）の違い

合力 P_H と**作用深さ z_R**：分布図の面積と一次モーメント。x による荷重形状の影響

講義の流れ

各項目は**3つの手順**で扱う：

1 · **理論**：式とその根拠

2 · **問題**：与条件と求めるもの

3 · **解答**：数値を用いて手順ごとに

例題：H = 25 m、x = 3 m、c = 4 m、b = 10 m、q = 20 kPa、剛体壁。1つの縦距をz = 5 mで手計算する。

壁面に作用する三角形上載荷重

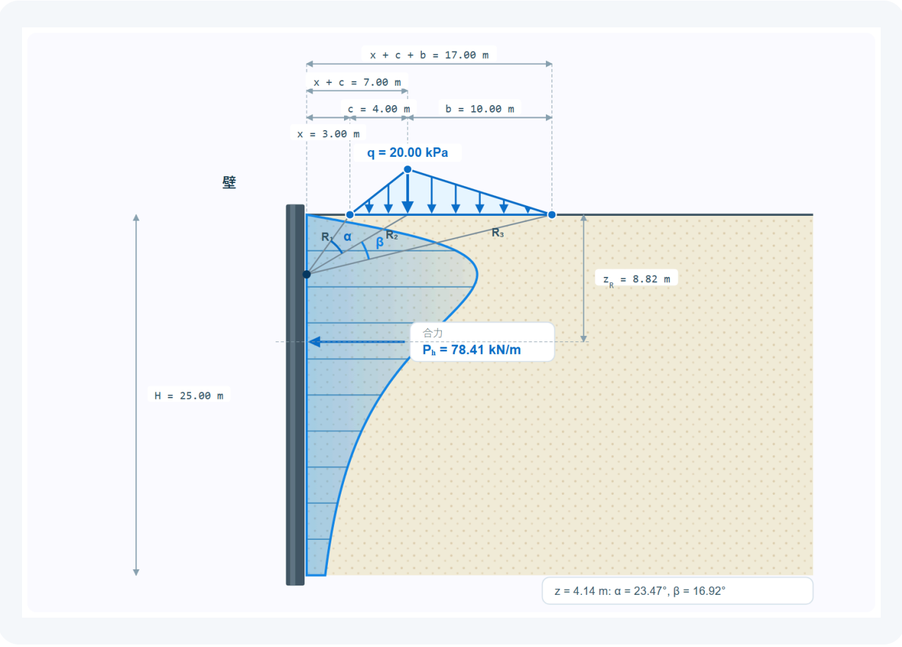
理論

地表面の上載荷重は壁面から水平距離**x**の位置から始まる。

その強度は幅**c**にわたりゼロから最大値**q**まで直線的に増加し、続いて幅**b**にわたり再びゼロまで直線的に減少する。

壁の各深さzにおいて、形状は3つの半径R_1, R_2, R_3と2つの角度α, βで定義される。

H：擁壁の全高；**x**：壁面から荷重の始点までの距離
c：増加側の腕の幅、**b**：減少側の腕の幅
q：最大上載荷重強度；**z**：地表面からの深さ



深さzにおける幾何形状

理論

深さzにおいて、擁壁上の点から荷重の**始点**、**ピーク点**、**終点**へ向かう3本の線分の長さと、それらの間の2つの角度を以下に示す

圧力の式では角度を**ラジアン**でとる；度の値は報告にのみ有用である

$$R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \quad R_2 = \sqrt{(x+c)^2 + z^2} \quad R_3 = \sqrt{(x+c+b)^2 + z^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x+c}{z} - \tan^{-1}\frac{x}{z} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{x+c+b}{z} - \tan^{-1}\frac{x+c}{z}$$

線荷重の重ね合わせ

理論

三角形分布荷重は、それぞれ強度が**w(s)·ds**の連続した線状荷重の列であり、弾性水平応力（Flamant）を荷重に沿って足し合わせる。

$s_1 = x$, $s_2 = x + c$, $s_3 = x + c + b$, $R^2 = s^2 + z^2$および以下の関数A, Bにより積分は閉形式で求まる。

$$\sigma_H = \psi \frac{2}{\pi} \int w(s) \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} \, ds$$

$$A(s) = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{s}{z} - \frac{sz}{R^2}\right] \qquad B(s) = \frac{z}{2}\left[\ln R^2 + \frac{z^2}{R^2}\right]$$

$$\sigma_H = \psi \frac{2q}{\pi}\left\{\frac{B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)}{c} + \frac{s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)}{b}\right\}$$

A、B、α、βおよびψ

理論

$A_2 - A_1$および$A_3 - A_2$の項は角度αとβを含み、$B_2 - B_1$および$B_3 - B_2$の項は対数$\ln(R_2/R_1)$と$\ln(R_3/R_2)$を含む

同じ重ね合わせを等分布の帯状荷重に適用すると、既知の$(q/\pi)[\beta - \sin\beta \cdot \cos 2\alpha]$の式が正確に得られる；式はこの形で検証される

$\psi = 1$は半無限体（壁なし）である。$\psi = 2$は水平応力を2倍にし、変位しない剛な壁である：モジュールの既定値

計算を壁高さにわたって繰り返すと$\sigma_H(z)$が得られる。土圧は地表面でゼロである。

図の面積と一次モーメント

理論

壁の単位長さ当たりの**上載荷重の合力**と地表面からの深さは、図の面積および一次モーメントである；モジュールは両方の積分を完全な精度で数値計算する

$$P_H = \int_0^H \sigma_H(z)\,dz$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z\,\sigma_H(z)\,dz}{P_H}$$

例題ではP_H **= 78.41 kN/m**（剛体壁）または**39.21 kN/m**（半無限地盤）であり、いずれもz_R **= 8.82 m**で地表面より下方である

6つの手順と1つの縦距

理論

1・H、x、c、b、qを定義し、ψを選定する；**2**・深さzを選定する

3・R_1, R_2, R_3を計算する；**4**・αとβを計算する（ラジアン）

5・σ_Hを計算する：関数AとBを点s_1, s_2, s_3で求め、代入する。

6・反復計算と積分：圧力分布、次にP_Hとz_R

$$z = 5\ \text{m}: \quad R_1 = 5.831\ \text{m} \quad R_2 = 8.602\ \text{m} \quad R_3 = 17.720\ \text{m} \qquad \alpha = 23.499^\circ \quad \beta = 19.148^\circ$$

$$\sigma_H = 3.247\ \text{kPa}\ (\psi = 1) \ \rightarrow \ 2 \times 3.247 = 6.494\ \text{kPa}\ (\psi = 2) \qquad P_H = 78.41\ \text{kN/m} \quad z_R = 8.82\ \text{m}$$

問題

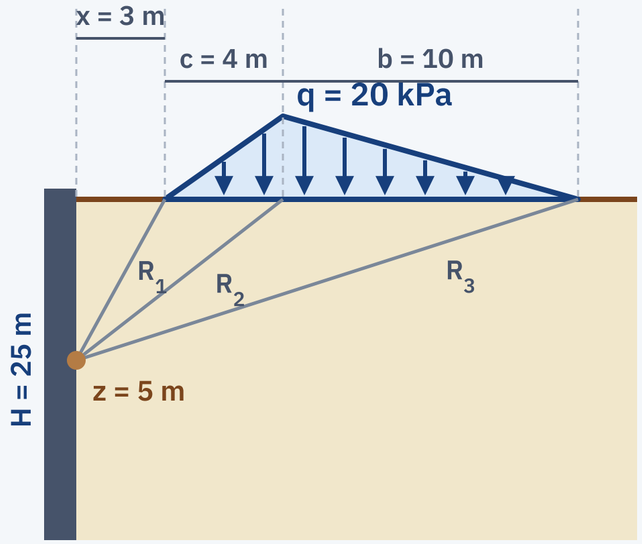
例題

与条件

壁と荷重	$H = 25.0$ m; $x = 3.0$ m; $c = 4.0$ m; $b = 10.0$ m; $q = 20.0$ kPa
壁	**半無限媒体（$\psi = 1$）と剛体壁（$\psi = 2$）**

求めるもの

深さ**z = 5 m**における**R_1**、**R_2**、**R_3**、**α**、**β**、AおよびBの値と水平土圧**σ_H**（2つのψについて）、モジュールとの比較。



解答 (1/3)

解答

1 点s_1 = x、s_2 = x + c、s_3 = x + c + bおよび放射線

$$s_1 = 3\ \text{m} \quad s_2 = 3 + 4 = 7\ \text{m} \quad s_3 = 7 + 10 = 17\ \text{m}$$

$$R_1 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \mathbf{5.831} \quad R_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \mathbf{8.602} \quad R_3 = \sqrt{17^2 + 5^2} = \mathbf{17.720}\ \text{m}$$

2 角度（ラジアン）

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \tan^{-1}\frac{3}{5} = 0.95055 - 0.54042 = \mathbf{0.41013}\ \text{rad}\ \ (23.499^\circ)$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{17}{5} - \tan^{-1}\frac{7}{5} = 1.28474 - 0.95055 = \mathbf{0.33420}\ \text{rad}\ \ (19.148^\circ)$$

壁面上の点から測った、載荷の始点とピークの間の角度は**23.50°**、ピークと終点の間の角度は**19.15°**である。

解答 (2/3)

解答

3 3点においてA(s) = ½[tan⁻¹(s/z) − sz/R²]、B(s) = (z/2)[ln R² + z²/R²]

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[0.54042 - \frac{3(5)}{34}\right] = 0.04962 \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left[0.95055 - \frac{7(5)}{74}\right] = 0.23879$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\left[1.28474 - \frac{17(5)}{314}\right] = 0.50702$$

s (m)	R² (m²)	tan⁻¹(s/z)	A(s)	ln R²	B(s)
3	34	0.54042	**0.04962**	3.52636	**10.6541**
7	74	0.95055	**0.23879**	4.30407	**11.6048**
17	314	1.28474	**0.50702**	5.74939	**14.5725**

Aの差は角度を、Bの差は対数を担う：**$A_2 - A_1$** = 0.18917、**$A_3 - A_2$** = 0.26824；**$B_2 - B_1$** = 0.9506、**$B_3 - B_2$** = 2.9678。

解答 (3/3)

解答

4 増加側と減少側の寄与

$$\text{増加する} = \frac{B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)}{c} = \frac{0.9506 - 3(0.18917)}{4} = 0.09578$$

$$\text{減少する} = \frac{s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)}{b} = \frac{17(0.26824) - 2.9678}{10} = 0.15922$$

5 半無限体（ψ = 1）と剛な壁（ψ = 2）

$$\sigma_H = \frac{2q}{\pi}(\text{増加する} + \text{減少する}) = \frac{2(20)}{\pi}(0.09578 + 0.15922) = \mathbf{3.247}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1)$$

$$\sigma_H = 2 \times 3.247 = \mathbf{6.494}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2)$$

z = 5 mで **σ_H = 6.494 kPa**（剛体壁；半無限地盤では3.247）。モジュールも同じ値を与える。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

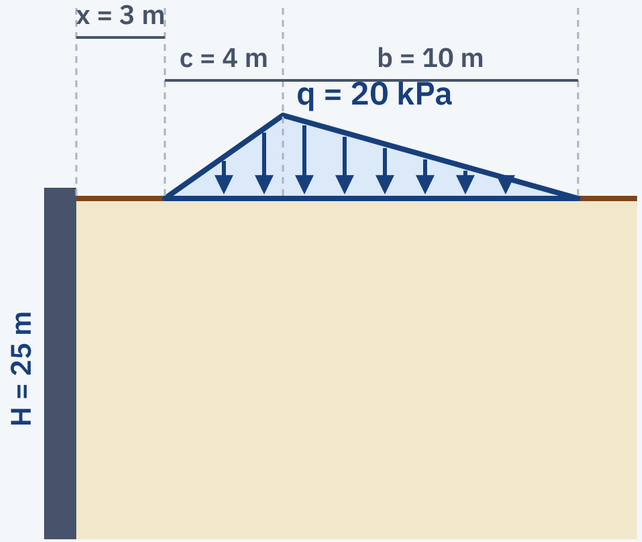
例題

与条件

モデル	**例題1の三角形分布荷重；剛体壁；表は $H/30 = 0.833$ mごと**
各行で	**R_1、R_2、R_3、α、βおよびσ_H；半無限媒体の値は剛壁の半分である**

求めるもの

土圧分布；最大土圧とその深さ；ピーク深さにおける角度。



解答 (1/2)

解答

z (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	R_3 (m)	α (°)	β (°)	σ_H (kPa)
0.00	3.000	7.000	17.000	0.00	0.00	0.000
0.83	3.114	7.049	17.020	8.74	3.98	2.513
1.67	3.432	7.196	17.082	15.66	7.79	4.520
2.50	3.905	7.433	17.183	20.15	11.29	5.815
3.33	4.485	7.753	17.324	22.55	14.37	6.463
4.17	5.134	8.146	17.503	23.48	16.99	6.635
5.00	**5.831**	**8.602**	**17.720**	**23.50**	**19.15**	**6.494**
5.83	6.560	9.112	17.973	22.98	20.87	6.168
6.67	7.311	9.667	18.260	22.17	22.19	5.746
7.50	8.078	10.259	18.581	21.22	23.17	5.286
8.33	8.857	10.883	18.933	20.23	23.86	4.821
9.17	9.645	11.534	19.314	19.24	24.30	4.374
10.00	10.440	12.207	19.723	18.29	24.54	3.955
10.83	11.241	12.898	20.158	17.39	24.62	3.569
11.67	12.046	13.606	20.618	16.54	24.58	3.218
12.50	12.855	14.327	21.101	15.75	24.42	2.901
13.33	13.667	15.059	21.605	15.02	24.19	2.617
14.17	14.481	15.802	22.129	14.34	23.90	2.363
15.00	15.297	16.553	22.672	13.71	23.56	2.136
15.83	16.115	17.312	23.231	13.12	23.18	1.933
16.67	16.935	18.077	23.807	12.58	22.78	1.752
17.50	17.755	18.848	24.398	12.07	22.37	1.591
18.33	18.577	19.624	25.002	11.60	21.94	1.447
19.17	19.400	20.405	25.620	11.17	21.51	1.319
20.00	20.224	21.190	26.249	10.76	21.07	1.204
20.83	21.048	21.978	26.889	10.38	20.64	1.101
21.67	21.873	22.769	27.540	10.02	20.21	1.009
22.50	22.699	23.564	28.200	9.69	19.79	0.926
23.33	23.525	24.361	28.869	9.37	19.38	0.851
24.17	24.352	25.160	29.547	9.08	18.97	0.784
25.00	25.179	25.962	30.232	8.80	18.57	0.723

解答 (2/2)

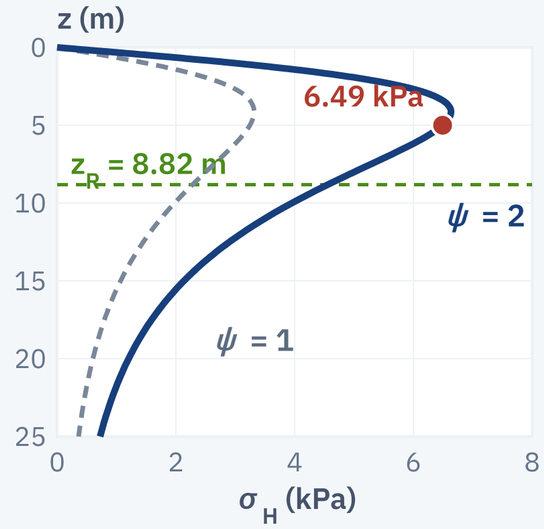
解答

1 圧力は地表面で零であり、ピーク深さで最大となり、その後減少する

$$z = 0: \quad \sigma_H = 0 \qquad z = 4.14\ \text{m}: \quad \sigma_H = \mathbf{6.635}\ \text{kPa}$$

$$\alpha = 23.47^\circ \quad \beta = 16.92^\circ \qquad z = H: \quad \sigma_H = 0.723\ \text{kPa}$$

最大圧力は**6.63 kPa**で**z = 4.14 m**（荷重頂部の4.14 m下方）に生じ、底面では0.72 kPaまで低下する。これらの角度はモジュールの図に示される。z = 5 mにおける縦距は6.494 kPaである（太線、例題1）。



GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

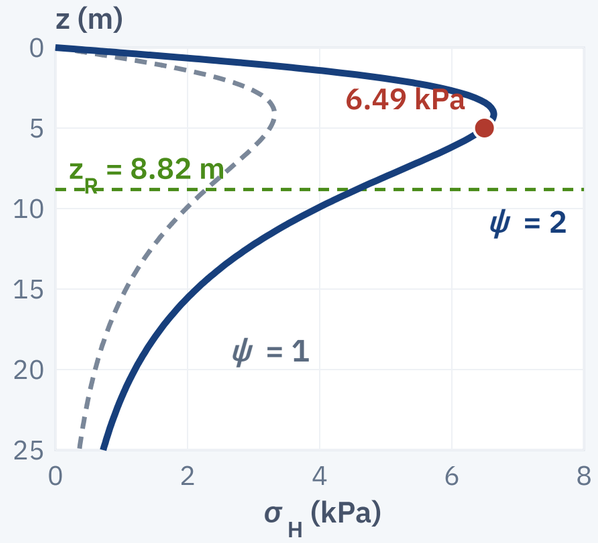
例題

与条件

モデル	**例題1の三角形分布荷重。剛な壁。例題2の$H/30$表（$n = 30$、$h = H/30 = 0.8333$ m）**
手法	**Simpson則；$z_R = \int z\,\sigma\,dz \,/\, P_H$**

求めるもの

P_Hおよびz_R（手計算、表から）；半無限体の値；モジュールの結果との比較。



解答 (1/2)

解答

	σ_0	Σ 奇数 (i = 1, 3, …, 29)	Σ 偶数 (i = 2, 4, …, 28)	σ_{30}
σ_H (kPa)	0.000	47.277	46.234	0.723

1 Simpsonの和と面積

$$\Sigma = \sigma_0 + 4(47.277) + 2(46.234) + \sigma_{30} = 282.30$$

$$P_H \approx \frac{h}{3}\Sigma = \frac{0.8333}{3}(282.30) = \mathbf{78.42}\ \text{kN/m}$$

手計算では**78.42 kN/m**；モジュールの精密な積分では**78.41 kN/m**（差0.004%）。半無限地盤ではその半分：**39.21 kN/m**。

解答 (2/2)

解答

	$z_0\ \sigma_0$	Σ 単一	Σ ダブル	$z_{30}\ \sigma_{30}$
$z\ \sigma_H$ (kPa·m)	0.000	414.83	405.58	18.07

2 一次モーメントと深さ

$$\int z\,\sigma\,dz \approx \frac{0.8333}{3}\left[0 + 4(414.83) + 2(405.58) + 18.07\right] = 691.3 \text{ kN}$$

$$z_R = \frac{691.3}{78.42} = \mathbf{8.82}\ \text{m} \quad \text{（地盤から）} \qquad H - z_R = 16.18\ \text{m} \quad \text{（底面から）}$$

手計算では**z_R = 8.82 m**、モジュールでも8.82 mとなる。合力78.41 kN/mは**地表面の8.82 m下**（底面から16.18 m上方）に作用し、ψ が変化してもz_Rは変化しない。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

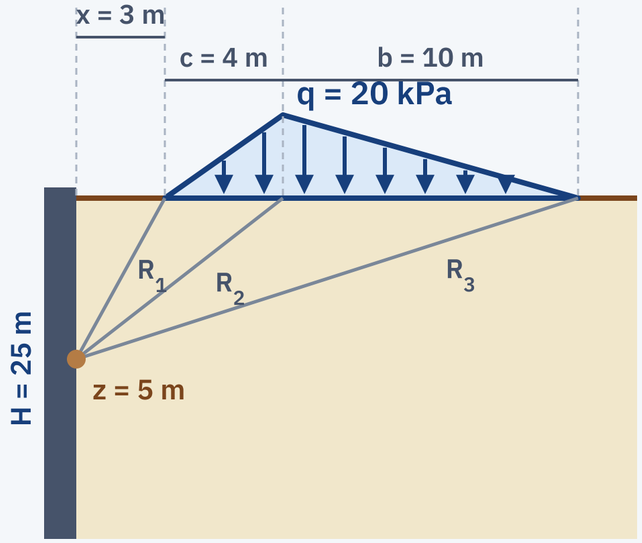
例題

与条件

モデル	**例題1：$z = 5$ m、半無限媒体（$\psi = 1$）**
手法	$\sigma_H = \dfrac{2}{\pi}\int w(s)\,\dfrac{s^2 z}{(s^2+z^2)^2}\,ds$；**$w$三角形：$s = 3$ mで0、7 mでq、17 mで0**
計算	**Simpson、$n = 14$、$h = 1.0$ m（$s = 3, 4, \ldots, 17$）**

求めるもの

線荷重の総和による σ_H；例題1の閉形式解との比較。



解答 (1/2)

解答

i	s (m)	w(s) (kPa)	f(s) = s²z/(s²+z²)² (1/m)	c	c·w·f
0	3	0.00	0.03893	1	0.00000
1	4	5.00	0.04759	4	0.95181
2	5	10.00	0.05000	2	1.00000
3	6	15.00	0.04837	4	2.90245
4	7	20.00	0.04474	2	1.78963
5	8	18.00	0.04040	4	2.90872
6	9	16.00	0.03604	2	1.15344
7	10	14.00	0.03200	4	1.79200
8	11	12.00	0.02838	2	0.68118
9	12	10.00	0.02521	4	1.00837
10	13	8.00	0.02245	2	0.35923
11	14	6.00	0.02007	4	0.48156
12	15	4.00	0.01800	2	0.14400
13	16	2.00	0.01621	4	0.12968
14	17	0.00	0.01466	1	0.00000
			Σ c·w·f =		**15.30207**

解答 (2/2)

解答

1 Simpsonと ψ

$$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\,\frac{h}{3}\sum c_i\, w_i f_i = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{3}(15.30207) = \mathbf{3.2472}\ \text{kPa}\quad (\psi = 1)$$

$$\psi = 2: \quad \sigma_H = \mathbf{6.494}\ \text{kPa}$$

	線状荷重の合計（Simpson）	閉形式（A、B；例題1）	差
σ_H, ψ = 1 (kPa)	3.2472	3.2468	%0.012
σ_H, ψ = 2 (kPa)	6.4944	6.4936	%0.012

両手法は同じ結果を与える：閉形式のAおよびBの項は、増加する腕と減少する腕の線荷重積分の和である。Simpsonの区間を小さくするほど差はゼロに近づく（h = 0.5 mで0.0006%）。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

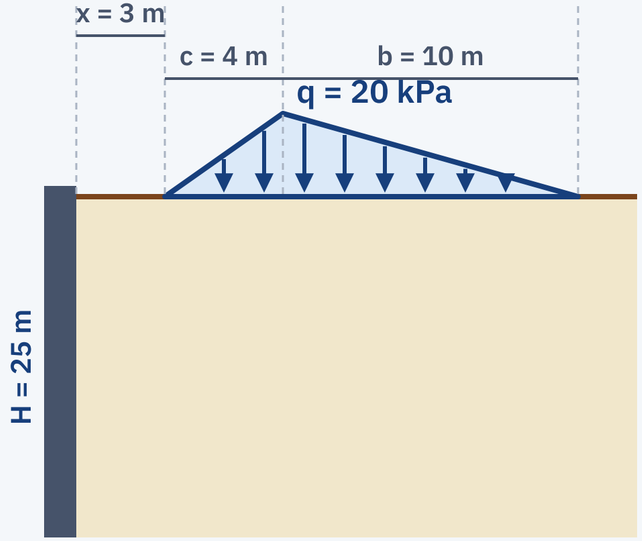
例題

与条件

モデル	$H = 25.0$ m、$q = 20$ kPa、剛体壁、一度に1つだけ変化させる
変化させる量	初期距離$x = 0$；3；6；10 m（$c = 4, b = 10$ m）および図$(c, b) = (2, 12)$；$(4, 10)$；$(7, 7)$；$(10, 4)$；$(12, 2)$ m（$x = 3$ m）
比較	三角形の重量$Q = q(c + b)/2$、重心位置$x + (2c + b)/3$における線荷重

求めるもの

各ケースについてP_H、z_R、$\sigma_{H,max}$およびその深さを、等価線荷重の合力と比較する。



解答 (1/2)

解答

x (m)	P_H (kN/m), $\psi = 2$	P_H (kN/m), $\psi = 1$	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
0	83.46	41.73	6.53	10.12	1.93
3	78.41	39.21	8.82	6.63	4.14
6	72.25	36.13	10.51	4.91	6.14
10	63.33	31.67	12.13	3.65	8.64

(c, b) (m)	P_H (kN/m), $\psi = 2$	P_H (kN/m), $\psi = 1$	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
(2; 12)	79.61	39.81	8.33	7.30	3.63
(4; 10)	78.41	39.21	8.82	6.63	4.14
(7; 7)	76.44	38.22	9.45	5.87	4.78
(10; 4)	74.32	37.16	9.97	5.29	5.31
(12; 2)	72.85	36.43	10.28	4.97	5.62

荷重が壁から遠ざかるにつれて（x ↑）**合力は減少し、z_Rとピーク深さは増大する**。全幅が一定の場合（c + b = 14 m）、ピークが壁から遠ざかるにつれて（c ↑）も合力は減少し、z_Rは深くなる。$\psi = 1$の値は剛性壁の場合の半分である。

解答 (2/2)

解答

1 三角形の重量と図心

$$Q = \frac{q(c+b)}{2} = \frac{20(4+10)}{2} = \mathbf{140}\ \text{kN/m}$$

$$\bar{x} = x + \frac{2c+b}{3} = 3 + \frac{2(4)+10}{3} = \mathbf{9}\ \text{m} \qquad m = \frac{\bar{x}}{H} = 0.36$$

2 線荷重の合力（ψ = 2）：線荷重の積分関数の深さ方向の積分

$$P_H = \psi \frac{Q}{\pi} \frac{H^2}{\bar{x}^2 + H^2} = \frac{2Q}{\pi} \frac{1}{1+m^2} = \frac{2(140)}{\pi} \frac{1}{1+0.1296} = \mathbf{78.90}\ \text{kN/m}$$

等価な線荷重では**78.90 kN/m**が得られる。三角形分布荷重の合力は**78.41 kN/m**である（差は0.6%）。最大圧力は6.43と6.63 kPa、z_Rは9.22と8.82 mである。合力の観点では差は小さいが、圧力図（最大圧力とその深さ、z_R）は線荷重の場合と異なる。

GeoTervaで解答を確認する ↗

まとめ

ポイントのまとめ

$\sigma_H = \psi\,(2q/\pi)\,\{[B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)]/c + [s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)]/b\}$；A(s) = ½[tan⁻¹(s/z) − sz/R²]、B(s) = (z/2)[ln R² + z²/R²]；ψ = 2 剛体壁、ψ = 1 半無限媒質

例（z = 5 m）：R_1 5.831、R_2 8.602、R_3 17.720 m；α 23.499°、β 19.148°；σ_H = 3.247 kPa（ψ = 1）、**6.494 kPa**（ψ = 2）

分布：地表面で0、最大圧力**6.63 kPa**はz = 4.14 mの位置、その後は減少する

合力 P_H = **78.41 kN/m**、z_R = **8.82 m**（地表面から）；ψ = 1のときP_H = 39.21 kN/m、z_Rは同じ

比較：荷重が擁壁から離れるほど合力は減少する。三角形分布荷重は、図心位置の等価な線荷重に近い合力を与える（78.41 と 78.90 kN/m）

参考文献

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning。本ページはこの文献に従っています。

注記

数値例はすべてモジュール自身の計算エンジンで作成した；モジュールは同じ値を与える。モジュールの起動例はH = 25 m、x = 3 m、c = 4 m、b = 10 m、q = 20 kPaの擁壁である。

GeoTerva

オンライン地盤工学計算

理論から実務へ

独自の三角形分布荷重、起始距離、腕の幅および壁高をGeoTervaに入力する；モジュールは圧力図、合力とその作用深さ、三つの表示、手順ごとの解答およびレポートをまとめて与える。

モジュールを開く →

理論ページ →

スマートフォンで開く

お試しモジュールは登録不要です。

講義で使用したい場合：info@geoterva.com