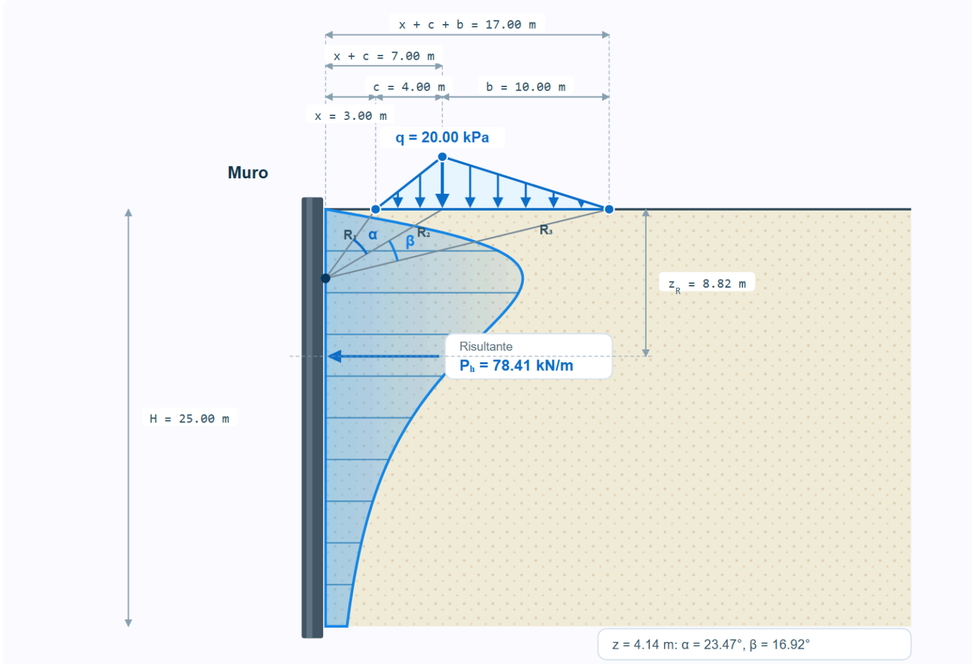
Lezione di geotecnica · Sovraccarichi

Carico di sovraccarico triangolare

Lezione: carico triangolare che inizia in x, sale al valore di picco e scende a zero; l'ordinata a una data profondità si risolve a mano, mentre profilo, risultante e varianti sono presentati in tabelle.

- Sovrapposizione dei carichi lineari
- Funzioni A e B
- Muro rigido ψ = 2
- Risultante e z_R
- Risolvibile a mano



Introduzione

Che cosa si impara in questa lezione?

La geometria del **carico triangolare**: inizia da zero a distanza **x** dal muro, cresce fino al valore q sulla larghezza **c** e diminuisce di nuovo fino a zero sulla larghezza **b**

A una profondità z, determinare i raggi $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$ e gli angoli **α, β** (in radianti)

La forma chiusa della pressione laterale ottenuta dalla sovrapposizione di carichi lineari: con le funzioni **A(s)** e **B(s)**

La differenza tra **muro rigido** (ψ = 2) e **mezzo semi-infinito** (ψ = 1)

Risultante P_H e **profondità di applicazione z_R**: area e momento primo del diagramma; l'effetto della forma del carico tramite x

SVOLGIMENTO DELLA LEZIONE

Ogni argomento è trattato in **tre passaggi**:

1 · **Teoria**: formula e relativa motivazione

2 · **Traccia**: dati e richiesto

3 · **Soluzione**: passo per passo, con i numeri

Esempio: H = 25 m, x = 3 m, c = 4 m, b = 10 m, q = 20 kPa; muro rigido. Un'ordinata viene calcolata manualmente a z = 5 m.

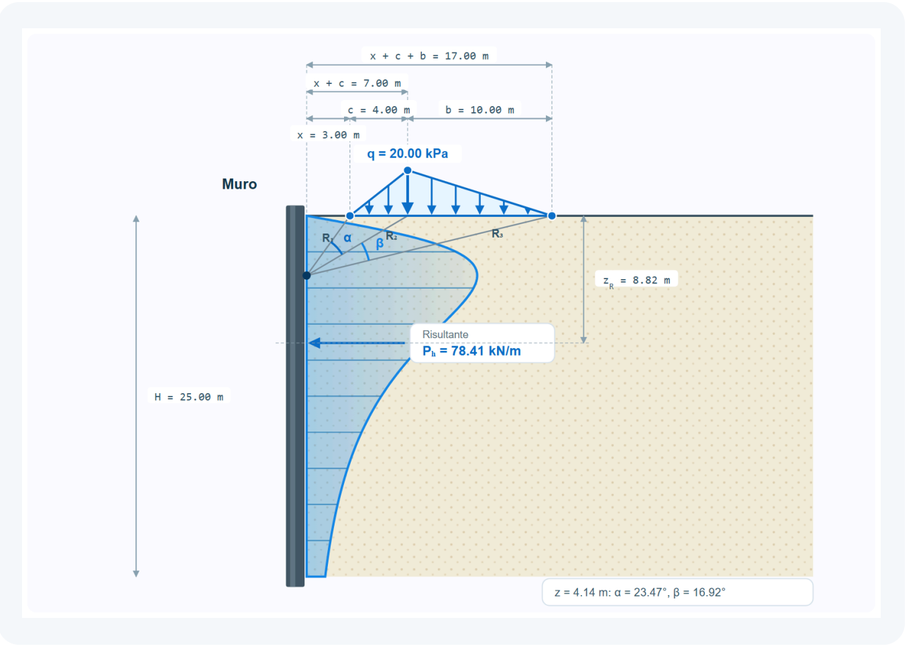
Sovraccarico triangolare agente sul muro

TEORIA

Il sovraccarico in superficie inizia a distanza orizzontale **x** dal muro

La sua intensità aumenta linearmente da zero al valore massimo **q** lungo la larghezza **c**, quindi diminuisce linearmente di nuovo fino a zero lungo la larghezza **b**

A ogni profondità z della parete la geometria è definita dai tre raggi $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$ e dai due angoli **α, β**



H: altezza totale del muro; **x**: distanza dal muro all'inizio del carico
c: larghezza del braccio crescente, **b**: larghezza del braccio decrescente
q: intensità massima del sovraccarico; **z**: profondità dal piano di campagna

Geometria alla profondità z

TEORIA

Alla profondità z, sono riportate le lunghezze dei tre raggi dal punto sul muro all'**inizio**, al **picco** e alla **fine** del carico, e i due angoli tra essi

Nell'equazione della pressione gli angoli si assumono in **radianti**; i valori in gradi sono utili solo per la reportistica

$$R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \quad R_2 = \sqrt{(x+c)^2 + z^2} \quad R_3 = \sqrt{(x+c+b)^2 + z^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x+c}{z} - \tan^{-1}\frac{x}{z} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{x+c+b}{z} - \tan^{-1}\frac{x+c}{z}$$

Sovrapposizione di carichi lineari

TEORIA

Il carico triangolare è una successione di carichi lineari continui, ciascuno di intensità **w(s)·ds**; le tensioni orizzontali elastiche (Flamant) si sommano lungo il carico

Con $s_1 = x$, $s_2 = x + c$, $s_3 = x + c + b$, $R^2 = s^2 + z^2$ e le funzioni A, B riportate di seguito, l'integrale si risolve in forma chiusa

$$\sigma_H = \psi \frac{2}{\pi} \int w(s) \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} ds$$

$$A(s) = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{s}{z} - \frac{sz}{R^2}\right] \qquad B(s) = \frac{z}{2}\left[\ln R^2 + \frac{z^2}{R^2}\right]$$

$$\sigma_H = \psi \frac{2q}{\pi}\left\{\frac{B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)}{c} + \frac{s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)}{b}\right\}$$

A, B, α, β e ψ

TEORIA

I termini $\mathbf{A_2 - A_1}$ e $\mathbf{A_3 - A_2}$ contengono gli angoli α e β, mentre i termini $\mathbf{B_2 - B_1}$ e $\mathbf{B_3 - B_2}$ contengono i logaritmi $\ln(R_2/R_1)$ e $\ln(R_3/R_2)$

Applicando la stessa sovrapposizione a una striscia uniforme si ottiene esattamente la nota espressione **(q/π)[β – sin β·cos 2α]**; l'equazione è verificata in questa forma

ψ = 1 è il mezzo seminfinito (assenza di muro); **ψ = 2** è il muro rigido che non si deforma e raddoppia la tensione orizzontale: valore predefinito del modulo

Ripetendo il calcolo lungo l'altezza del muro si ottiene $\boldsymbol{\sigma_H(z)}$; la pressione è nulla in corrispondenza del piano di campagna

Area e momento statico del diagramma

TEORIA

La **forza risultante del sovraccarico** per unità di lunghezza del muro e la sua profondità dalla superficie del terreno sono l'area e il momento del primo ordine del diagramma; il modulo calcola entrambi gli integrali numericamente con piena precisione

$$P_H = \int_0^H \sigma_H(z)\,dz$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z\,\sigma_H(z)\,dz}{P_H}$$

Nell'esempio $\mathbf{P_H = 78.41\ kN/m}$ (muro rigido) oppure **39.21 kN/m** (mezzo seminfinito); in entrambi i casi $\mathbf{z_R = 8.82\ m}$, al di sotto del piano di campagna

Sei passaggi e un'ordinata

TEORIA

1 · si definiscono H, x, c, b, q e si sceglie ψ; **2** · si sceglie una profondità z

3 · Si calcolano R_1, R_2, R_3; **4** · Si calcolano α e β (radianti)

5 · si calcola σ_H: si determinano le funzioni A e B nei punti s_1, s_2, s_3 e si sostituiscono

6 · Iterare e integrare: profilo di pressione, poi P_H e z_R

$$z = 5\ \text{m}: \quad R_1 = 5.831\ \text{m} \quad R_2 = 8.602\ \text{m} \quad R_3 = 17.720\ \text{m} \qquad \alpha = 23.499^\circ \quad \beta = 19.148^\circ$$

$$\sigma_H = 3.247\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1) \ \rightarrow\ 2 \times 3.247 = 6.494\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2) \qquad P_H = 78.41\ \text{kN/m} \quad z_R = 8.82\ \text{m}$$

Traccia

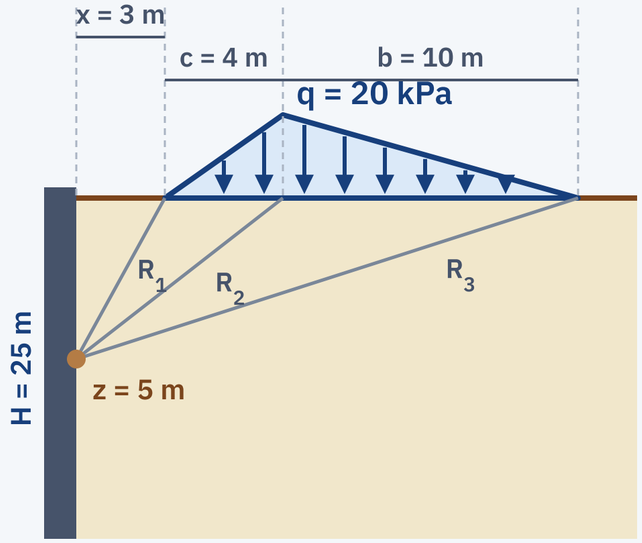
ESEMPIO

RICHIESTO

Alla profondità **z = 5 m**, i valori di **R_1, R_2, R_3, α, β**, A e B e la pressione orizzontale **σ_H** (per due valori di ψ); confronto con il modulo.

Dati

Muro e carico	$H = 25.0$ **m;** $x = 3.0$ **m;** $c = 4.0$ **m;** $b = 10.0$ **m;** $q = 20.0$ **kPa**
Muro	**mezzo seminfinito ($\psi = 1$) e parete rigida ($\psi = 2$)**



Soluzione (1/3)

SOLUZIONE

1 I punti $s_1 = x$, $s_2 = x + c$, $s_3 = x + c + b$ e i raggi

$$s_1 = 3\ \text{m} \quad s_2 = 3 + 4 = 7\ \text{m} \quad s_3 = 7 + 10 = 17\ \text{m}$$

$$R_1 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \mathbf{5.831} \quad R_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \mathbf{8.602} \quad R_3 = \sqrt{17^2 + 5^2} = \mathbf{17.720}\ \text{m}$$

2 Angoli (radianti)

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \tan^{-1}\frac{3}{5} = 0.95055 - 0.54042 = \mathbf{0.41013}\ \text{rad}\ \ (23.499^\circ)$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{17}{5} - \tan^{-1}\frac{7}{5} = 1.28474 - 0.95055 = \mathbf{0.33420}\ \text{rad}\ \ (19.148^\circ)$$

L'angolo tra l'inizio del carico e il suo picco, misurato dal punto sul muro, è **23.50°**; l'angolo tra il picco e la fine è **19.15°**.

Soluzione (2/3)

SOLUZIONE

3 In tre punti A(s) = ½[tan⁻¹(s/z) − sz/R²] e B(s) = (z/2)[ln R² + z²/R²]

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[0.54042 - \frac{3(5)}{34}\right] = 0.04962 \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left[0.95055 - \frac{7(5)}{74}\right] = 0.23879$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\left[1.28474 - \frac{17(5)}{314}\right] = 0.50702$$

s (m)	R² (m²)	tan⁻¹(s/z)	A(s)	ln R²	B(s)
3	34	0.54042	**0.04962**	3.52636	**10.6541**
7	74	0.95055	**0.23879**	4.30407	**11.6048**
17	314	1.28474	**0.50702**	5.74939	**14.5725**

Le differenze A portano gli angoli, le differenze B i logaritmi: **$A_2 - A_1$** = 0.18917, **$A_3 - A_2$** = 0.26824; **$B_2 - B_1$** = 0.9506, **$B_3 - B_2$** = 2.9678.

Soluzione (3/3)

SOLUZIONE

4 Contributo dei rami crescente e decrescente

$$\text{crescente} = \frac{B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)}{c} = \frac{0.9506 - 3(0.18917)}{4} = 0.09578$$

$$\text{decrescente} = \frac{s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)}{b} = \frac{17(0.26824) - 2.9678}{10} = 0.15922$$

5 Mezzo seminfinito (ψ = 1) e muro rigido (ψ = 2)

$$\sigma_H = \frac{2q}{\pi}(\text{crescente} + \text{decrescente}) = \frac{2(20)}{\pi}(0.09578 + 0.15922) = \mathbf{3.247}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1)$$

$$\sigma_H = 2 \times 3.247 = \mathbf{6.494}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2)$$

A z = 5 m, **σ_H = 6.494 kPa** (muro rigido; 3.247 nel mezzo semi-infinito). Il modulo restituisce lo stesso valore.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

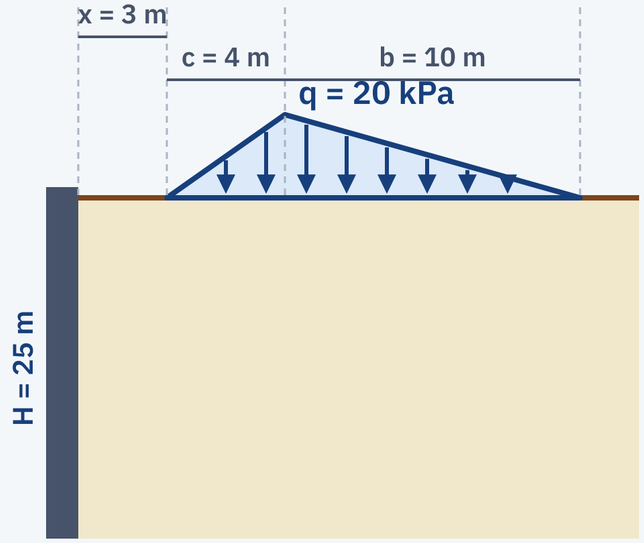
ESEMPIO

Dati

Modello	**Carico triangolare dell'Esempio 1; muro rigido; tabella ogni $H/30 = 0.833$ m**
Su ogni riga	**R_1, R_2, R_3, α, β e σ_H; i valori del semispazio sono la metà di quelli del muro rigido**

RICHIESTO

Profilo delle pressioni; la pressione massima e la sua profondità; gli angoli alla profondità di picco.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

z (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	R_3 (m)	α (°)	β (°)	σ_H (kPa)
0.00	3.000	7.000	17.000	0.00	0.00	0.000
0.83	3.114	7.049	17.020	8.74	3.98	2.513
1.67	3.432	7.196	17.082	15.66	7.79	4.520
2.50	3.905	7.433	17.183	20.15	11.29	5.815
3.33	4.485	7.753	17.324	22.55	14.37	6.463
4.17	5.134	8.146	17.503	23.48	16.99	6.635
5.00	**5.831**	**8.602**	**17.720**	**23.50**	**19.15**	**6.494**
5.83	6.560	9.112	17.973	22.98	20.87	6.168
6.67	7.311	9.667	18.260	22.17	22.19	5.746
7.50	8.078	10.259	18.581	21.22	23.17	5.286
8.33	8.857	10.883	18.933	20.23	23.86	4.821
9.17	9.645	11.534	19.314	19.24	24.30	4.374
10.00	10.440	12.207	19.723	18.29	24.54	3.955
10.83	11.241	12.898	20.158	17.39	24.62	3.569
11.67	12.046	13.606	20.618	16.54	24.58	3.218
12.50	12.855	14.327	21.101	15.75	24.42	2.901
13.33	13.667	15.059	21.605	15.02	24.19	2.617
14.17	14.481	15.802	22.129	14.34	23.90	2.363
15.00	15.297	16.553	22.672	13.71	23.56	2.136
15.83	16.115	17.312	23.231	13.12	23.18	1.933
16.67	16.935	18.077	23.807	12.58	22.78	1.752
17.50	17.755	18.848	24.398	12.07	22.37	1.591
18.33	18.577	19.624	25.002	11.60	21.94	1.447
19.17	19.400	20.405	25.620	11.17	21.51	1.319
20.00	20.224	21.190	26.249	10.76	21.07	1.204
20.83	21.048	21.978	26.889	10.38	20.64	1.101
21.67	21.873	22.769	27.540	10.02	20.21	1.009
22.50	22.699	23.564	28.200	9.69	19.79	0.926
23.33	23.525	24.361	28.869	9.37	19.38	0.851
24.17	24.352	25.160	29.547	9.08	18.97	0.784
25.00	25.179	25.962	30.232	8.80	18.57	0.723

Soluzione (2/2)

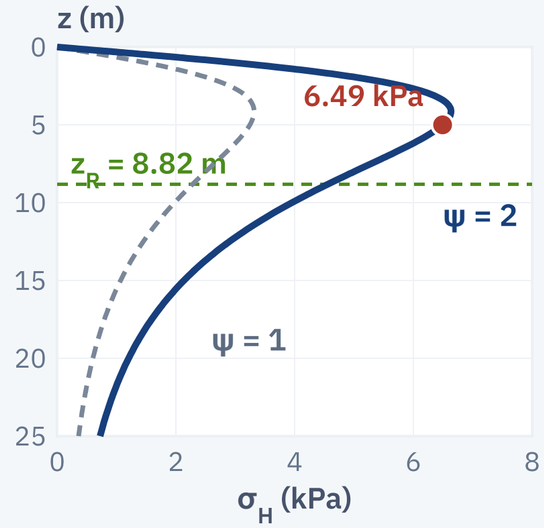
SOLUZIONE

1 La pressione è nulla in superficie, raggiunge il massimo alla profondità di picco e poi diminuisce

$$z = 0: \quad \sigma_H = 0 \qquad z = 4.14\ \text{m}: \quad \sigma_H = \mathbf{6.635}\ \text{kPa}$$

$$\alpha = 23.47^\circ \quad \beta = 16.92^\circ \qquad z = H: \quad \sigma_H = 0.723\ \text{kPa}$$

La pressione massima è **6.63 kPa** a **z = 4.14 m** (4.14 m sotto la sommità del carico); alla base si riduce a 0.72 kPa. Tali angoli sono rappresentati nella figura del modulo. L'ordinata a z = 5 m vale 6.494 kPa (linea spessa, Esempio 1).



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

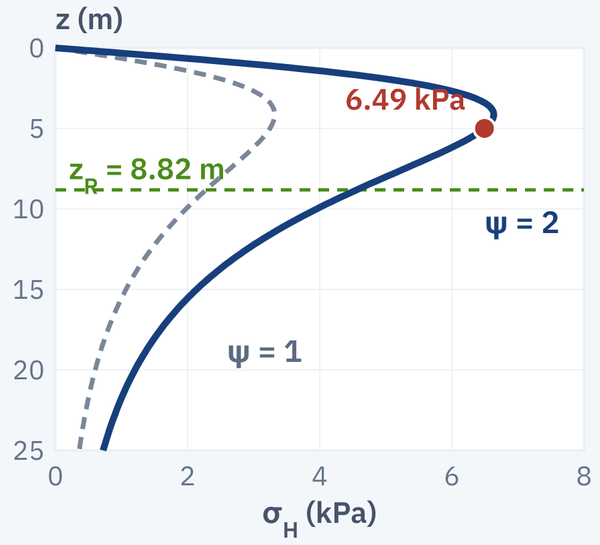
ESEMPIO

Dati

Modello	**Il carico triangolare dell'Esempio 1; muro rigido; la tabella $H/30$ dell'Esempio 2 ($n = 30$, $h = H/30 = 0.8333$ m)**
Metodo	**Regola di Simpson; $z_R = \int z\,\sigma\,dz \,/\, P_H$**

RICHIESTO

P_H e **z_R** (a mano, dalla tabella); valori per mezzo seminfinito; confronto con il risultato del modulo.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

	σ_0	Σ dispari (i = 1, 3, …, 29)	Σ pari (i = 2, 4, …, 28)	σ_{30}
σ_H (kPa)	0.000	47.277	46.234	0.723

1 Somma di Simpson e area

$$\Sigma = \sigma_0 + 4(47.277) + 2(46.234) + \sigma_{30} = 282.30$$

$$P_H \approx \frac{h}{3}\,\Sigma = \frac{0.8333}{3}(282.30) = \mathbf{78.42}\ \mathrm{kN/m}$$

Con il calcolo manuale **78.42 kN/m**; l'integrale accurato del modulo fornisce **78.41 kN/m** (differenza 0.004%). In un mezzo semi-infinito, la metà: **39.21 kN/m**.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

	$z_0\sigma_0$	Σ singolo	Σ doppio	$z_{30}\sigma_{30}$
$z\sigma_H$ (kPa·m)	0.000	414.83	405.58	18.07

2 Momento del primo ordine e profondità

$$\int z\,\sigma\,dz \approx \frac{0.8333}{3}\left[0 + 4(414.83) + 2(405.58) + 18.07\right] = 691.3\ \text{kN}$$

$$z_R = \frac{691.3}{78.42} = \mathbf{8.82}\ \text{m}\ \ (\text{dal terreno}) \qquad H - z_R = 16.18\ \text{m}\ (\text{dalla base})$$

A mano **z_R = 8.82 m**; il modulo restituisce 8.82 m. La risultante 78.41 kN/m agisce **8.82 m sotto il piano di campagna** (16.18 m sopra la base); al variare di ψ, z_R non cambia.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

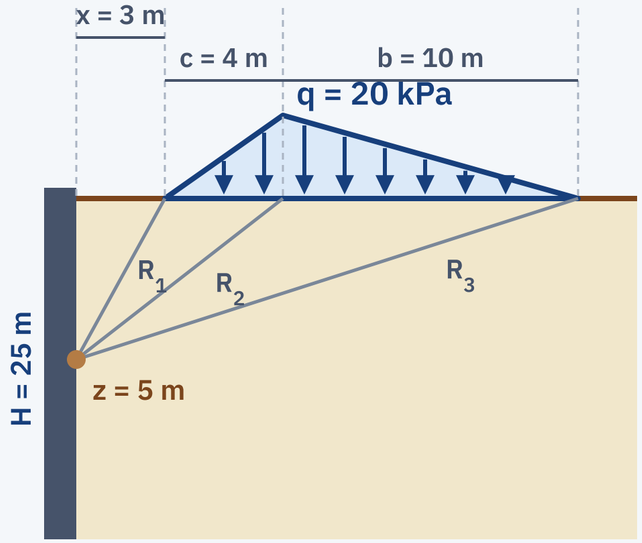
ESEMPIO

Dati

Modello	**Esempio 1:** $z = 5$ **m; mezzo seminfinito (** $\psi = 1$**)**
Metodo	$\sigma_H = \dfrac{2}{\pi}\int w(s)\,\dfrac{s^2 z}{(s^2+z^2)^2}\,ds$**; triangolo** w**:** 0 **a** $s = 3$ **m,** q **a** 7 **m,** 0 **a** 17 **m**
Calcolo	**Simpson,** $n = 14$**,** $h = 1.0$ **m (**$s = 3, 4, \ldots, 17$**)**

RICHIESTO

σ_H dalla somma dei carichi lineari; confronto con la forma chiusa dell'Esempio 1.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

i	s (m)	w(s) (kPa)	f(s) = s²z/(s²+z²)² (1/m)	c	c·w·f
0	3	0.00	0.03893	1	0.00000
1	4	5.00	0.04759	4	0.95181
2	5	10.00	0.05000	2	1.00000
3	6	15.00	0.04837	4	2.90245
4	7	20.00	0.04474	2	1.78963
5	8	18.00	0.04040	4	2.90872
6	9	16.00	0.03604	2	1.15344
7	10	14.00	0.03200	4	1.79200
8	11	12.00	0.02838	2	0.68118
9	12	10.00	0.02521	4	1.00837
10	13	8.00	0.02245	2	0.35923
11	14	6.00	0.02007	4	0.48156
12	15	4.00	0.01800	2	0.14400
13	16	2.00	0.01621	4	0.12968
14	17	0.00	0.01466	1	0.00000
			Σ c·w·f =		**15.30207**

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

1 Simpson e ψ

$$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\,\frac{h}{3}\sum c_i\, w_i f_i = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{3}(15.30207) = \mathbf{3.2472}\ \mathrm{kPa}\ \ (\psi = 1)$$

$$\psi = 2: \quad \sigma_H = \mathbf{6.494}\ \mathrm{kPa}$$

	Somma dei carichi lineari (Simpson)	Forma chiusa (A, B; Esempio 1)	Differenza
σ_H, ψ = 1 (kPa)	3.2472	3.2468	%0.012
σ_H, ψ = 2 (kPa)	6.4944	6.4936	%0.012

Entrambi i procedimenti conducono allo stesso risultato: i termini in forma chiusa A e B sono la somma degli integrali dei carichi lineari dei bracci crescente e decrescente. Al diminuire dell'intervallo di Simpson la differenza tende a zero (0.0006% per h = 0.5 m).

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

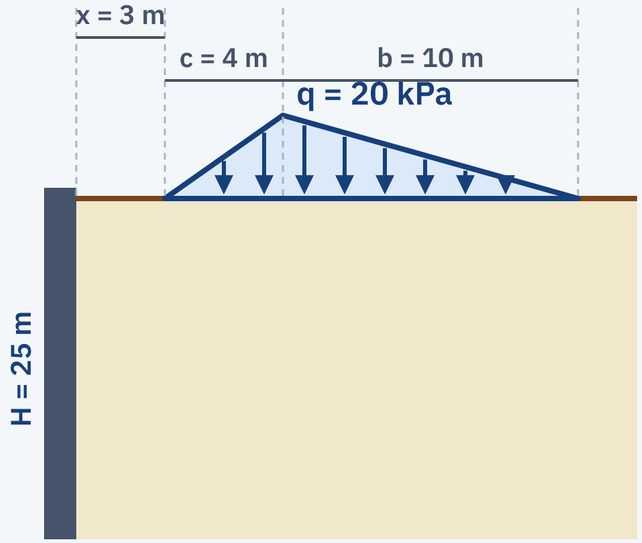
ESEMPIO

Dati

Modello	$H = 25.0$ **m;** $q = 20$ **kPa; muro rigido; si varia un solo parametro alla volta**
Variabili	**distanza iniziale** $x = 0$**;** 3**;** 6**;** 10 **m (**$c = 4$**,** $b = 10$ **m) e figura** $(c, b) = (2, 12)$**;** $(4, 10)$**;** $(7, 7)$**;** $(10, 4)$**;** $(12, 2)$ **m (**$x = 3$ **m)**
Confronto	**il peso del triangolo** $Q = q(c + b)/2$**, carico lineare con il baricentro nella posizione** $x + (2c + b)/3$

RICHIESTO

Per ogni caso P_H, z_R, $\sigma_{H,max}$ e la relativa profondità; confronto con la risultante del carico lineare equivalente.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

x (m)	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
0	83.46	41.73	6.53	10.12	1.93
3	78.41	39.21	8.82	6.63	4.14
6	72.25	36.13	10.51	4.91	6.14
10	63.33	31.67	12.13	3.65	8.64

(c, b) (m)	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
(2; 12)	79.61	39.81	8.33	7.30	3.63
(4; 10)	78.41	39.21	8.82	6.63	4.14
(7; 7)	76.44	38.22	9.45	5.87	4.78
(10; 4)	74.32	37.16	9.97	5.29	5.31
(12; 2)	72.85	36.43	10.28	4.97	5.62

Allontanando il carico dal muro (x ↑) **la risultante diminuisce, mentre z_R e la profondità del picco aumentano**. A larghezza totale costante (c + b = 14 m), allontanando il picco dal muro (c ↑) anche la risultante diminuisce e z_R si approfondisce. I valori per ψ = 1 sono la metà di quelli del muro rigido.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

1 Peso e baricentro del triangolo

$$Q = \frac{q(c+b)}{2} = \frac{20(4+10)}{2} = \mathbf{140}\ \mathrm{kN/m}$$

$$\bar{x} = x + \frac{2c+b}{3} = 3 + \frac{2(4)+10}{3} = \mathbf{9}\ \mathrm{m} \qquad m = \frac{\bar{x}}{H} = 0.36$$

2 Risultante del carico lineare (ψ = 2): integrale dell'integrando del carico lineare lungo la profondità

$$P_H = \psi \frac{Q}{\pi} \frac{H^2}{\bar{x}^2 + H^2} = \frac{2Q}{\pi} \frac{1}{1+m^2} = \frac{2(140)}{\pi} \frac{1}{1+0.1296} = \mathbf{78.90}\ \mathrm{kN/m}$$

Il carico lineare equivalente fornisce **78.90 kN/m**; la risultante del carico triangolare è **78.41 kN/m** (differenza 0.6%). Le pressioni massime sono 6.43 e 6.63 kPa; z_R è 9.22 e 8.82 m. In termini di risultante la differenza è piccola; il diagramma delle pressioni, invece (pressione massima e sua profondità, z_R), si discosta da quello del carico lineare.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Sintesi

Punti chiave

$\sigma_H = \psi\,(2q/\pi)\,\{[B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)]/c + [s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)]/b\}$; $A(s) = \tfrac{1}{2}[\tan^{-1}(s/z) - sz/R^2]$, $B(s) = (z/2)[\ln R^2 + z^2/R^2]$; $\psi = 2$ muro rigido, $\psi = 1$ mezzo seminfinito

Esempio ($z = 5$ m): R_1 5.831, R_2 8.602, R_3 17.720 m; α 23.499°, β 19.148°; σ_H = 3.247 kPa ($\psi = 1$), **6.494 kPa** ($\psi = 2$)

Profilo: 0 in superficie; pressione massima **6.63 kPa** a $z = 4.14$ m; poi diminuisce

Risultante P_H = **78.41 kN/m**, z_R = **8.82 m** (dal piano di campagna); per $\psi = 1$, P_H = 39.21 kN/m, z_R invariato

Confronto: la risultante diminuisce man mano che il carico si allontana dal muro; il carico triangolare fornisce una risultante prossima al carico lineare equivalente applicato nel suo baricentro (78.41 e 78.90 kN/m)

Bibliografia

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; questa pagina fa riferimento a tale testo.

NOTA

Tutti gli esempi numerici sono stati prodotti con il motore di calcolo del modulo stesso; il modulo restituisce gli stessi valori. L'esempio iniziale del modulo è il muro con H = 25 m, x = 3 m, c = 4 m, b = 10 m, q = 20 kPa.

GeoTerva

Calcoli geotecnici online

Dalla teoria alla pratica

Inserire in GeoTerva il proprio carico triangolare, la distanza iniziale, le larghezze dei bracci e l'altezza del muro; il modulo fornisce insieme il diagramma delle pressioni, la risultante e la sua profondità d'azione, le tre viste, la soluzione passo per passo e la relazione.

Aprire il modulo →

Pagina di teoria →

Aprire dallo smartphone

I moduli di prova non richiedono registrazione.

Se si desidera utilizzarli nelle proprie lezioni: info@geoterva.com