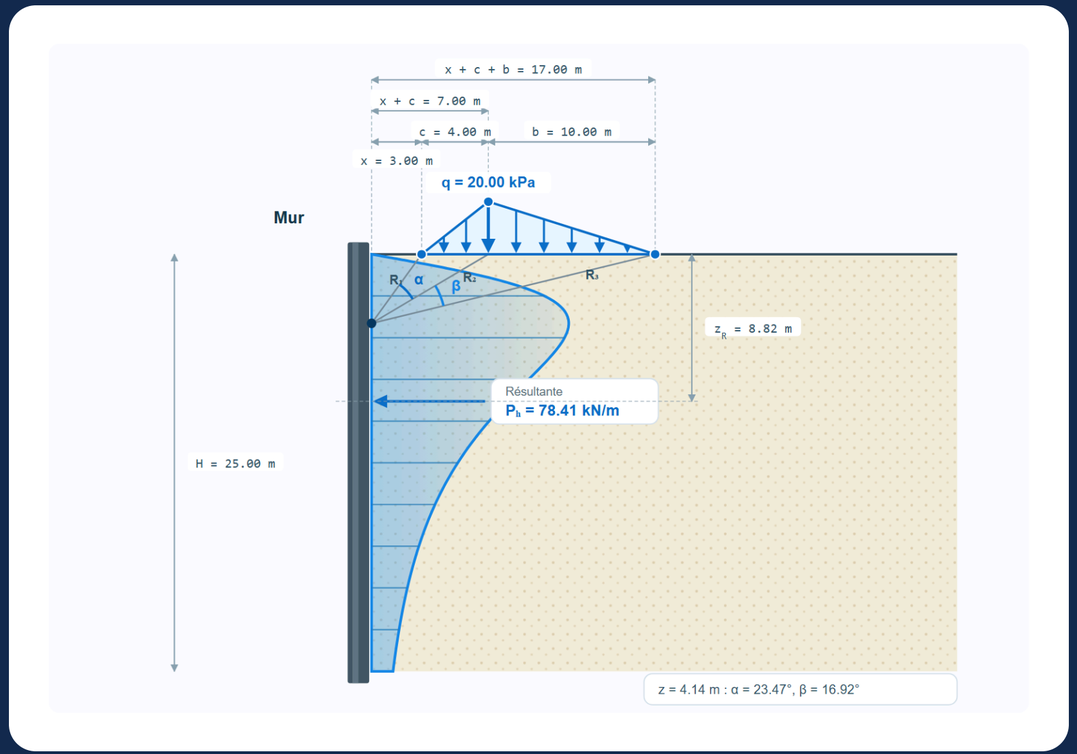
Présentation de cours de géotechnique · Surcharges

Surcharge triangulaire

Cours : charge triangulaire commençant en x, montant jusqu'à une valeur de crête puis redescendant à zéro ; l'ordonnée à une profondeur donnée est résolue à la main, et le profil, la résultante et les variantes sont présentés dans des tableaux.

- Superposition de charges linéiques
- Fonctions A et B
- Mur rigide ψ = 2
- Résultante et z_R
- Résolution à la main possible



Que verrons-nous dans ce cours ?

- La géométrie de la **charge triangulaire** : elle commence à zéro à la distance **x** du mur, monte à la valeur q sur la largeur **c** et redescend à zéro sur la largeur **b**
- La détermination, à une profondeur z, des rayons $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$ et des angles **α, β** (en radians)
- La forme analytique de la pression horizontale obtenue par superposition de charges linéiques : avec les fonctions **A(s)** et **B(s)**
- La différence entre un **mur rigide** (ψ = 2) et un **milieu semi-infini** (ψ = 1)
- La **résultante** $\mathbf{P_H}$ et la **profondeur d'application** $\mathbf{z_R}$: aire et moment statique du diagramme ; l'effet de x et de la forme de la charge

DÉROULÉ DU COURS

Chaque thème est traité en **trois étapes** :

1 · **Théorie** : formule et justification

2 · **Énoncé** : données et à déterminer

3 · **Solution** : étape par étape, avec les valeurs numériques

Exemple : H = 25 m, x = 3 m, c = 4 m, b = 10 m, q = 20 kPa ; mur rigide. Une ordonnée est calculée à la main en z = 5 m.

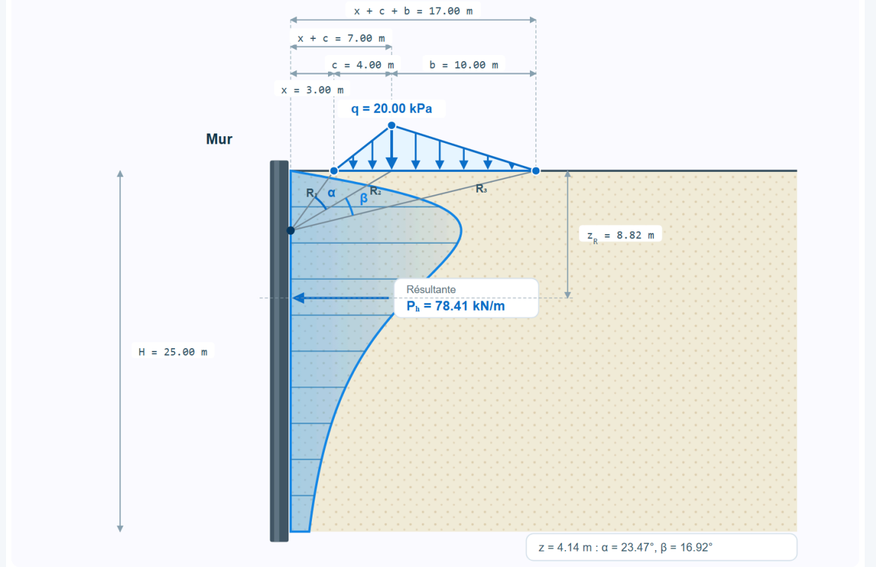
Surcharge triangulaire agissant sur le mur

THÉORIE

La surcharge en surface commence à une distance horizontale **x** du mur

Son intensité croît linéairement de zéro à la valeur maximale **q** sur la largeur **c**, puis décroît linéairement jusqu'à zéro sur la largeur **b**

À chaque profondeur z du mur, la géométrie est définie par les trois rayons R_1, R_2, R_3 et les deux angles **α, β**



H : hauteur totale du mur ; **x** : distance du mur au début de la charge
c : largeur du bras croissant, **b** : largeur du bras décroissant
q : intensité maximale de la surcharge ; **z** : profondeur depuis le niveau du sol

Géométrie à la profondeur z

THÉORIE

À la profondeur z, les longueurs des trois rayons allant du point situé sur le mur au **début**, au **sommet** et à la **fin** de la charge, ainsi que les deux angles qu'ils forment, figurent ci-dessous

Dans l'équation de la pression, les angles sont pris en **radians** ; les valeurs en degrés ne sont utiles que pour la présentation des résultats

$$R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \quad R_2 = \sqrt{(x+c)^2 + z^2} \quad R_3 = \sqrt{(x+c+b)^2 + z^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x+c}{z} - \tan^{-1}\frac{x}{z} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{x+c+b}{z} - \tan^{-1}\frac{x+c}{z}$$

Superposition de charges linéiques

THÉORIE

Une charge triangulaire est une série de charges linéiques continues, chacune d'intensité **w(s)·ds** ; les contraintes horizontales élastiques (Flamant) sont sommées le long de la charge

Avec s_1 = x, s_2 = x + c, s_3 = x + c + b, $R^2 = s^2 + z^2$ et les fonctions A, B ci-dessous, l'intégrale s'obtient sous forme fermée

$$\sigma_H = \psi \frac{2}{\pi} \int w(s) \frac{s^2 z}{(s^2+z^2)^2} ds$$

$$A(s) = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{s}{z} - \frac{sz}{R^2}\right] \qquad B(s) = \frac{z}{2}\left[\ln R^2 + \frac{z^2}{R^2}\right]$$

$$\sigma_H = \psi \frac{2q}{\pi}\left\{\frac{B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)}{c} + \frac{s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)}{b}\right\}$$

A, B, α, β et ψ

THÉORIE

Les termes $\mathbf{A_2 - A_1}$ et $\mathbf{A_3 - A_2}$ contiennent les angles α et β, et les termes $\mathbf{B_2 - B_1}$ et $\mathbf{B_3 - B_2}$ contiennent les logarithmes $\ln(R_2/R_1)$ et $\ln(R_3/R_2)$

Lorsque la même superposition est appliquée à une bande uniforme, l'expression connue **(q/π) [β – sin β·cos 2α]** est retrouvée exactement ; l'équation est vérifiée sous cette forme

ψ = 1 correspond au massif semi-infini (sans mur) ; **ψ = 2** correspond au mur rigide, sans déplacement, qui double la contrainte horizontale : valeur par défaut du module

La répétition du calcul sur la hauteur du mur donne $\boldsymbol{\sigma_H(z)}$; la pression est nulle à la surface du terrain

Aire et moment statique du diagramme

THÉORIE

La **force de surcharge résultante** par unité de longueur du mur et sa profondeur depuis la surface du sol correspondent à l'aire et au moment statique du diagramme ; le module calcule numériquement les deux intégrales à pleine précision

$$P_H = \int_0^H \sigma_H(z)\, dz$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z\, \sigma_H(z)\, dz}{P_H}$$

Dans l'exemple, **P_H = 78.41 kN/m** (mur rigide) ou **39.21 kN/m** (milieu semi-infini) ; dans les deux cas, **z_R = 8.82 m**, sous le niveau du sol

Six étapes et une ordonnée

THÉORIE

1 · On définit H, x, c, b, q et on choisit ψ ; **2** · on choisit une profondeur z

3 · R_1, R_2, R_3 sont calculés ; **4** · α et β sont calculés (en radians)

5 · σ_H est calculée : les fonctions A et B sont évaluées aux points s_1, s_2, s_3 puis substituées

6 · itération et intégration : profil de pression, puis P_H et z_R

$$z = 5\ \text{m}: \quad R_1 = 5.831\ \text{m} \quad R_2 = 8.602\ \text{m} \quad R_3 = 17.720\ \text{m} \qquad \alpha = 23.499^\circ \quad \beta = 19.148^\circ$$

$$\sigma_H = 3.247\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1) \quad \rightarrow \quad 2 \times 3.247 = 6.494\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2) \qquad P_H = 78.41\ \text{kN/m} \quad z_R = 8.82\ \text{m}$$

Énoncé

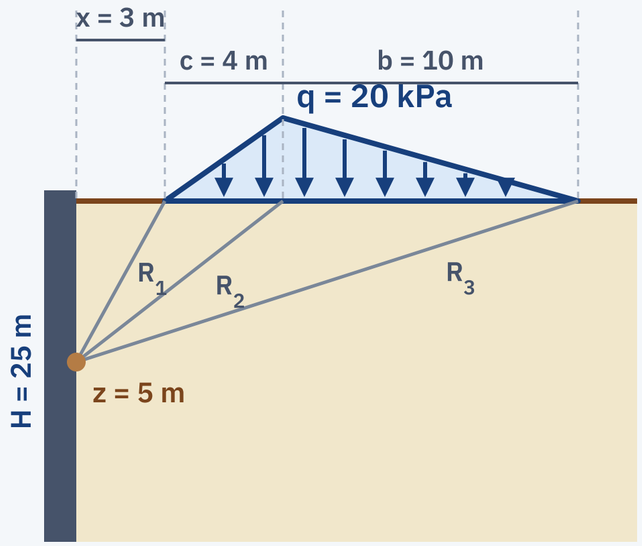
EXEMPLE

Données

Mur et charge	$H = 25.0$ **m;** $x = 3.0$ **m;** $c = 4.0$ **m;** $b = 10.0$ **m;** $q = 20.0$ **kPa**
Mur	**milieu semi-infini (**$\psi = 1$**) et mur rigide (**$\psi = 2$**)**

À DÉTERMINER

À la profondeur **z = 5 m** : valeurs de **R_1, R_2, R_3, α, β**, A et B, et pression horizontale **σ_H** (pour deux valeurs de ψ) ; comparaison avec le module.



Solution (1/3)

SOLUTION

1 Les points s_1 = x, s_2 = x + c, s_3 = x + c + b et les rayons

$$s_1 = 3\ \text{m} \quad s_2 = 3 + 4 = 7\ \text{m} \quad s_3 = 7 + 10 = 17\ \text{m}$$

$$R_1 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \mathbf{5.831} \quad R_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \mathbf{8.602} \quad R_3 = \sqrt{17^2 + 5^2} = \mathbf{17.720}\ \text{m}$$

2 Angles (radians)

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \tan^{-1}\frac{3}{5} = 0.95055 - 0.54042 = \mathbf{0.41013}\ \text{rad}\ \ (23.499^\circ)$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{17}{5} - \tan^{-1}\frac{7}{5} = 1.28474 - 0.95055 = \mathbf{0.33420}\ \text{rad}\ \ (19.148^\circ)$$

L'angle entre le début de la charge et son sommet, mesuré depuis le point situé sur le mur, est de **23.50°** ; l'angle entre le sommet et la fin est de **19.15°**.

Solution (2/3)

SOLUTION

3 En trois points A(s) = ½[tan⁻¹(s/z) − sz/R²] et B(s) = (z/2)[ln R² + z²/R²]

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[0.54042 - \frac{3(5)}{34}\right] = 0.04962 \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left[0.95055 - \frac{7(5)}{74}\right] = 0.23879$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\left[1.28474 - \frac{17(5)}{314}\right] = 0.50702$$

s (m)	R² (m²)	tan⁻¹(s/z)	A(s)	ln R²	B(s)
3	34	0.54042	**0.04962**	3.52636	**10.6541**
7	74	0.95055	**0.23879**	4.30407	**11.6048**
17	314	1.28474	**0.50702**	5.74939	**14.5725**

Les différences A portent les angles, les différences B portent les logarithmes : **$A_2 - A_1$** = 0.18917, **$A_3 - A_2$** = 0.26824 ; **$B_2 - B_1$** = 0.9506, **$B_3 - B_2$** = 2.9678.

Solution (3/3)

SOLUTION

4 Contribution des branches croissante et décroissante

$$\text{croissant} = \frac{B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)}{c} = \frac{0.9506 - 3(0.18917)}{4} = 0.09578$$

$$\text{décroissant} = \frac{s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)}{b} = \frac{17(0.26824) - 2.9678}{10} = 0.15922$$

5 Milieu semi-infini (ψ = 1) et mur rigide (ψ = 2)

$$\sigma_H = \frac{2q}{\pi}(\text{croissant} + \text{décroissant}) = \frac{2(20)}{\pi}(0.09578 + 0.15922) = \mathbf{3.247}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1)$$

$$\sigma_H = 2 \times 3.247 = \mathbf{6.494}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2)$$

En z = 5 m, **σ_H = 6.494 kPa** (mur rigide ; 3.247 dans le milieu semi-infini). Le module donne la même valeur.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

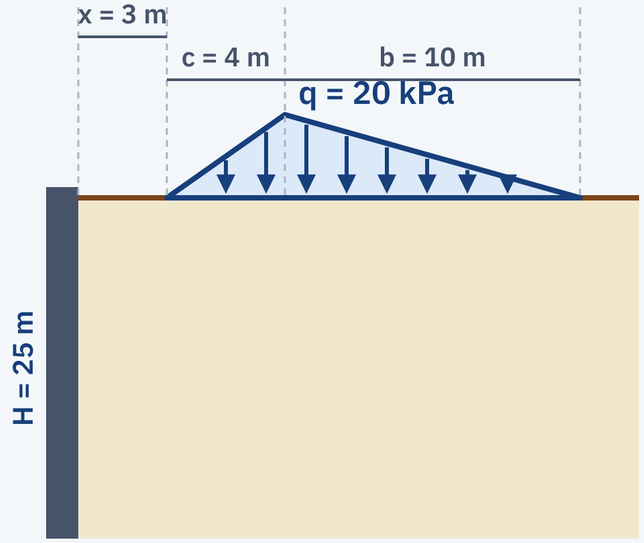
EXEMPLE

Données

Modèle	**Charge triangulaire de l'exemple 1 ; mur rigide ; tableau tous les $H/30 = 0.833$ m**
Sur chaque ligne	**R_1, R_2, R_3, α, β et σ_H ; les valeurs du milieu semi-infini valent la moitié de celles du mur rigide**

À DÉTERMINER

Profil de pression ; pression maximale et sa profondeur ; angles à la profondeur du pic.



Solution (1/2)

SOLUTION

z (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	R_3 (m)	α (°)	β (°)	σ_H (kPa)
0.00	3.000	7.000	17.000	0.00	0.00	0.000
0.83	3.114	7.049	17.020	8.74	3.98	2.513
1.67	3.432	7.196	17.082	15.66	7.79	4.520
2.50	3.905	7.433	17.183	20.15	11.29	5.815
3.33	4.485	7.753	17.324	22.55	14.37	6.463
4.17	5.134	8.146	17.503	23.48	16.99	6.635
5.00	**5.831**	**8.602**	**17.720**	**23.50**	**19.15**	**6.494**
5.83	6.560	9.112	17.973	22.98	20.87	6.168
6.67	7.311	9.667	18.260	22.17	22.19	5.746
7.50	8.078	10.259	18.581	21.22	23.17	5.286
8.33	8.857	10.883	18.933	20.23	23.86	4.821
9.17	9.645	11.534	19.314	19.24	24.30	4.374
10.00	10.440	12.207	19.723	18.29	24.54	3.955
10.83	11.241	12.898	20.158	17.39	24.62	3.569
11.67	12.046	13.606	20.618	16.54	24.58	3.218
12.50	12.855	14.327	21.101	15.75	24.42	2.901
13.33	13.667	15.059	21.605	15.02	24.19	2.617
14.17	14.481	15.802	22.129	14.34	23.90	2.363
15.00	15.297	16.553	22.672	13.71	23.56	2.136
15.83	16.115	17.312	23.231	13.12	23.18	1.933
16.67	16.935	18.077	23.807	12.58	22.78	1.752
17.50	17.755	18.848	24.398	12.07	22.37	1.591
18.33	18.577	19.624	25.002	11.60	21.94	1.447
19.17	19.400	20.405	25.620	11.17	21.51	1.319
20.00	20.224	21.190	26.249	10.76	21.07	1.204
20.83	21.048	21.978	26.889	10.38	20.64	1.101
21.67	21.873	22.769	27.540	10.02	20.21	1.009
22.50	22.699	23.564	28.200	9.69	19.79	0.926
23.33	23.525	24.361	28.869	9.37	19.38	0.851
24.17	24.352	25.160	29.547	9.08	18.97	0.784
25.00	25.179	25.962	30.232	8.80	18.57	0.723

Solution (2/2)

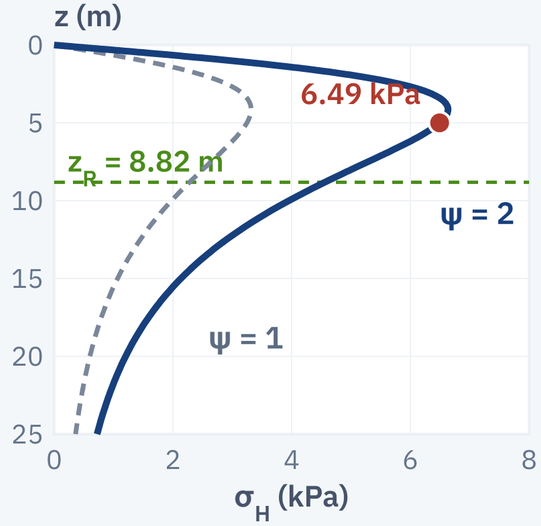
SOLUTION

1 La pression est nulle en surface, atteint son maximum à la profondeur du pic, puis diminue

$$z = 0 : \quad \sigma_H = 0 \qquad z = 4.14\ \text{m} : \quad \sigma_H = \mathbf{6.635}\ \text{kPa}$$

$$\alpha = 23.47^\circ \quad \beta = 16.92^\circ \qquad z = H : \quad \sigma_H = 0.723\ \text{kPa}$$

La pression maximale est de **6.63 kPa**, à **z = 4.14 m** (4.14 m sous le sommet de la charge) ; elle tombe à 0.72 kPa à la base. Ces angles sont représentés sur la figure du module. L'ordonnée à z = 5 m est de 6.494 kPa (ligne en gras, Exemple 1).



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

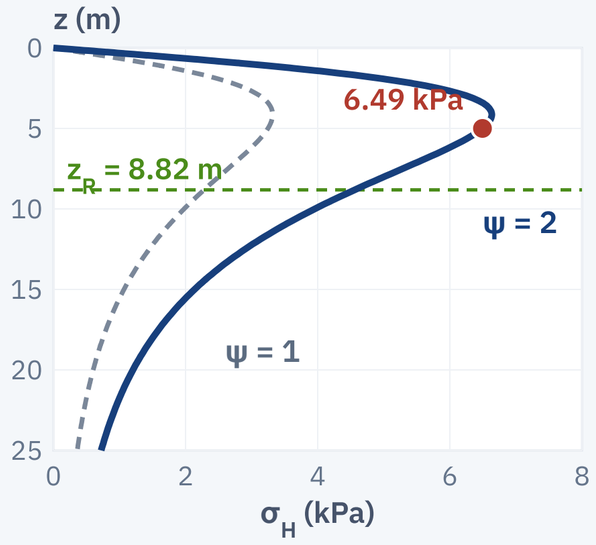
EXEMPLE

Données

Modèle	**Charge triangulaire de l'Exemple 1 ; mur rigide ; tableau $H/30$ de l'Exemple 2 ($n = 30$, $h = H/30 = 0.8333$ m)**
Méthode	**Règle de Simpson ;** $z_R = \int z\,\sigma\,dz \,/\, P_H$

À DÉTERMINER

P_H et **z_R** (à la main, d'après le tableau) ; valeurs en milieu semi-infini ; comparaison avec le résultat du module.



Solution (1/2)

SOLUTION

	σ_0	Σ impair (i = 1, 3, …, 29)	Σ pairs (i = 2, 4, …, 28)	σ_{30}
σ_H (kPa)	0.000	47.277	46.234	0.723

1 Somme de Simpson et aire

$$\Sigma = \sigma_0 + 4(47.277) + 2(46.234) + \sigma_{30} = 282.30$$

$$P_H \approx \frac{h}{3}\,\Sigma = \frac{0.8333}{3}(282.30) = \mathbf{78.42}\ \mathrm{kN/m}$$

À la main **78.42 kN/m** ; l'intégrale précise du module donne **78.41 kN/m** (écart de 0.004 %). En milieu semi-infini, la moitié : **39.21 kN/m**.

Solution (2/2)

SOLUTION

	$z_0\sigma_0$	Σ simple	Σ double	$z_{30}\sigma_{30}$
$z\sigma_H$ (kPa·m)	0.000	414.83	405.58	18.07

2 Moment statique et profondeur

$$\int z\,\sigma\,dz \approx \frac{0.8333}{3}\left[0 + 4(414.83) + 2(405.58) + 18.07\right] = 691.3\ \text{kN}$$

$$z_R = \frac{691.3}{78.42} = \mathbf{8.82}\ \text{m}\ \ (\text{à partir du terrain}) \qquad H - z_R = 16.18\ \text{m}\ (\text{à partir de la base})$$

Par calcul manuel, **z_R = 8.82 m** ; le module donne 8.82 m. La résultante de 78.41 kN/m agit **à 8.82 m sous la surface du sol** (à 16.18 m au-dessus de la base) ; z_R ne change pas lorsque ψ varie.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

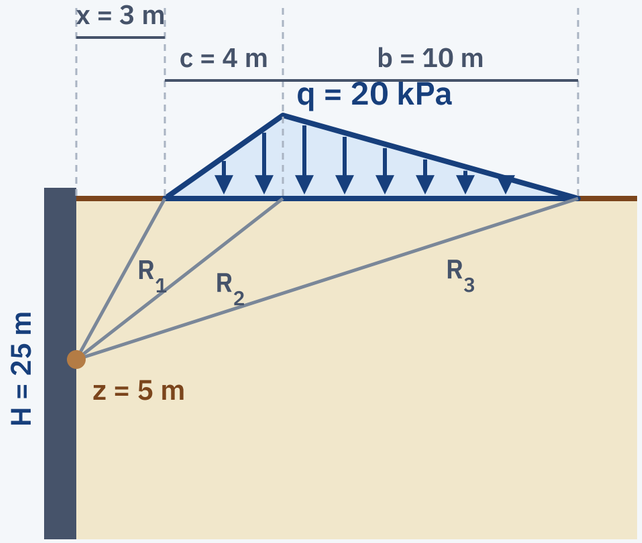
EXEMPLE

Données

Modèle	**Exemple 1 :** $z = 5$ **m ; milieu semi-infini (** $\psi = 1$**)**
Méthode	$\sigma_H = \dfrac{2}{\pi} \int w(s) \, \dfrac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} \, ds$ **; triangle** w **:** 0 **à** $s = 3$ **m,** q **à** 7 **m,** 0 **à** 17 **m**
Calcul	**Simpson,** $n = 14$**,** $h = 1.0$ **m (**$s = 3, 4, \ldots, 17$**)**

À DÉTERMINER

σ_H par la somme des charges linéiques ; comparaison avec la forme analytique de l'Exemple 1.



Solution (1/2)

SOLUTION

i	s (m)	w(s) (kPa)	f(s) = s²z/(s²+z²)² (1/m)	c	c·w·f
0	3	0.00	0.03893	1	0.00000
1	4	5.00	0.04759	4	0.95181
2	5	10.00	0.05000	2	1.00000
3	6	15.00	0.04837	4	2.90245
4	7	20.00	0.04474	2	1.78963
5	8	18.00	0.04040	4	2.90872
6	9	16.00	0.03604	2	1.15344
7	10	14.00	0.03200	4	1.79200
8	11	12.00	0.02838	2	0.68118
9	12	10.00	0.02521	4	1.00837
10	13	8.00	0.02245	2	0.35923
11	14	6.00	0.02007	4	0.48156
12	15	4.00	0.01800	2	0.14400
13	16	2.00	0.01621	4	0.12968
14	17	0.00	0.01466	1	0.00000
			Σ c·w·f =		**15.30207**

Solution (2/2)

SOLUTION

1 Simpson et ψ

$$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\,\frac{h}{3}\sum c_i\, w_i f_i = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{3}(15.30207) = \mathbf{3.2472}\ \mathrm{kPa}\ \ (\psi = 1)$$

$$\psi = 2 :\quad \sigma_H = \mathbf{6.494}\ \mathrm{kPa}$$

	Somme des charges linéiques (Simpson)	Forme fermée (A, B ; exemple 1)	Écart
σ_H, ψ = 1 (kPa)	3.2472	3.2468	%0.012
σ_H, ψ = 2 (kPa)	6.4944	6.4936	%0.012

Les deux voies donnent le même résultat : les termes A et B sous forme fermée sont la somme des intégrales de charge linéique des branches croissante et décroissante. À mesure que l'intervalle de Simpson diminue, l'écart tend vers zéro (0.0006 % pour h = 0.5 m).

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

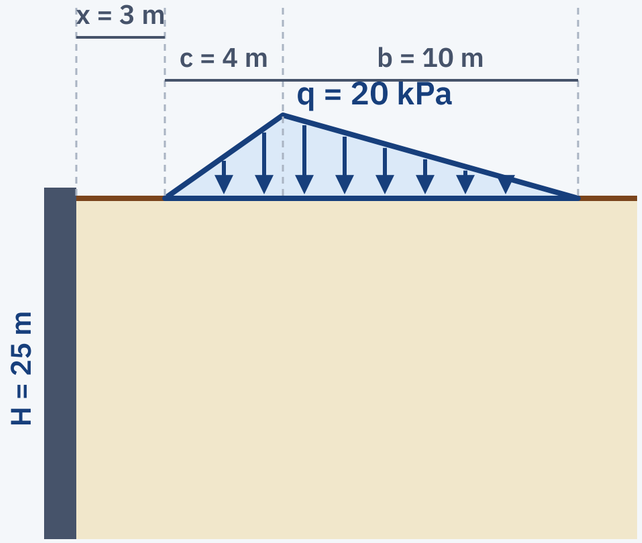
EXEMPLE

Données

Modèle	$H = 25.0$ **m ; $q = 20$ kPa ; mur rigide ; une seule valeur varie à la fois**
Variables	**distance initiale $x = 0$; 3 ; 6 ; 10 m ($c = 4$, $b = 10$ m) et figure $(c, b) = (2, 12)$; $(4, 10)$; $(7, 7)$; $(10, 4)$; $(12, 2)$ m ($x = 3$ m)**
Comparaison	**le poids du triangle $Q = q(c + b)/2$, la charge linéique dont le centre de gravité se situe en $x + (2c + b)/3$**

À DÉTERMINER

Pour chaque cas : P_H, z_R, $\sigma_{H,max}$ et sa profondeur ; comparaison avec la résultante de la charge linéique équivalente.



Solution (1/2)

SOLUTION

x (m)	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
0	83.46	41.73	6.53	10.12	1.93
3	78.41	39.21	8.82	6.63	4.14
6	72.25	36.13	10.51	4.91	6.14
10	63.33	31.67	12.13	3.65	8.64

(c, b) (m)	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
(2; 12)	79.61	39.81	8.33	7.30	3.63
(4; 10)	78.41	39.21	8.82	6.63	4.14
(7; 7)	76.44	38.22	9.45	5.87	4.78
(10; 4)	74.32	37.16	9.97	5.29	5.31
(12; 2)	72.85	36.43	10.28	4.97	5.62

À mesure que la charge s'éloigne du mur (x ↑), **la résultante diminue, tandis que z_R et la profondeur du pic augmentent**. À largeur totale constante (c + b = 14 m), lorsque le pic s'éloigne du mur (c ↑), la résultante diminue également et z_R augmente en profondeur. Les valeurs pour ψ = 1 sont la moitié de celles du mur rigide.

Solution (2/2)

SOLUTION

1 Poids et centre de gravité du triangle

$$Q = \frac{q(c+b)}{2} = \frac{20(4+10)}{2} = \mathbf{140}\ \mathrm{kN/m}$$

$$\bar{x} = x + \frac{2c+b}{3} = 3 + \frac{2(4)+10}{3} = \mathbf{9}\ \mathrm{m} \qquad m = \frac{\bar{x}}{H} = 0.36$$

2 Résultante de la charge linéique (ψ = 2) : intégrale, sur la profondeur, de l'intégrande de la charge linéique

$$P_H = \psi \frac{Q}{\pi} \frac{H^2}{\bar{x}^2 + H^2} = \frac{2Q}{\pi} \frac{1}{1+m^2} = \frac{2(140)}{\pi} \frac{1}{1+0.1296} = \mathbf{78.90}\ \mathrm{kN/m}$$

La charge linéique équivalente donne **78.90 kN/m** ; la résultante de la charge triangulaire est de **78.41 kN/m** (écart de 0.6 %). Les pressions maximales sont de 6.43 et 6.63 kPa ; z_R vaut 9.22 et 8.82 m. Du point de vue de la résultante, l'écart est faible ; le diagramme de pression (pression maximale et sa profondeur, z_R) s'écarte en revanche de celui de la charge linéique.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Synthèse

Points à retenir

$\sigma_H = \psi\,(2q/\pi)\,\{[B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)]/c + [s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)]/b\}$; $A(s) = \frac{1}{2}[\tan^{-1}(s/z) - sz/R^2]$, $B(s) = (z/2)[\ln R^2 + z^2/R^2]$; $\psi = 2$ pour un mur rigide, $\psi = 1$ pour un massif semi-infini

Exemple (z = 5 m) : R_1 5.831, R_2 8.602, R_3 17.720 m ; α 23.499°, β 19.148° ; σ_H = 3.247 kPa ($\psi = 1$), **6.494 kPa** ($\psi = 2$)

Profil : 0 en surface ; pression maximale **6.63 kPa** à z = 4.14 m ; elle diminue ensuite

Résultante P_H = **78.41 kN/m**, z_R = **8.82 m** (depuis la surface du sol) ; pour $\psi = 1$, P_H = 39.21 kN/m, z_R identique

Comparaison : la résultante diminue lorsque la charge s'éloigne du mur ; la charge triangulaire donne une résultante proche de celle de la charge linéique équivalente située au centre de gravité (78.41 et 78.90 kN/m)

Références bibliographiques

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning ; la présente page s’y conforme.

REMARQUE

Tous les exemples numériques ont été produits avec le moteur de calcul propre du module ; le module donne les mêmes valeurs. L'exemple d'ouverture du module est le mur avec H = 25 m, x = 3 m, c = 4 m, b = 10 m, q = 20 kPa.

GeoTerva

Calculs géotechniques en ligne

De la théorie à la pratique

Saisir dans GeoTerva la charge triangulaire, la distance de départ, les largeurs des bras et la hauteur du mur ; le module fournit ensemble le diagramme de pression, la résultante et sa profondeur d'application, les trois vues, la solution pas à pas et le rapport.

Ouvrir le module → | **Page de théorie →**

Ouvrir sur smartphone
Les modules d'essai ne nécessitent pas d'inscription.

Si vous souhaitez les utiliser dans vos cours : info@geoterva.com