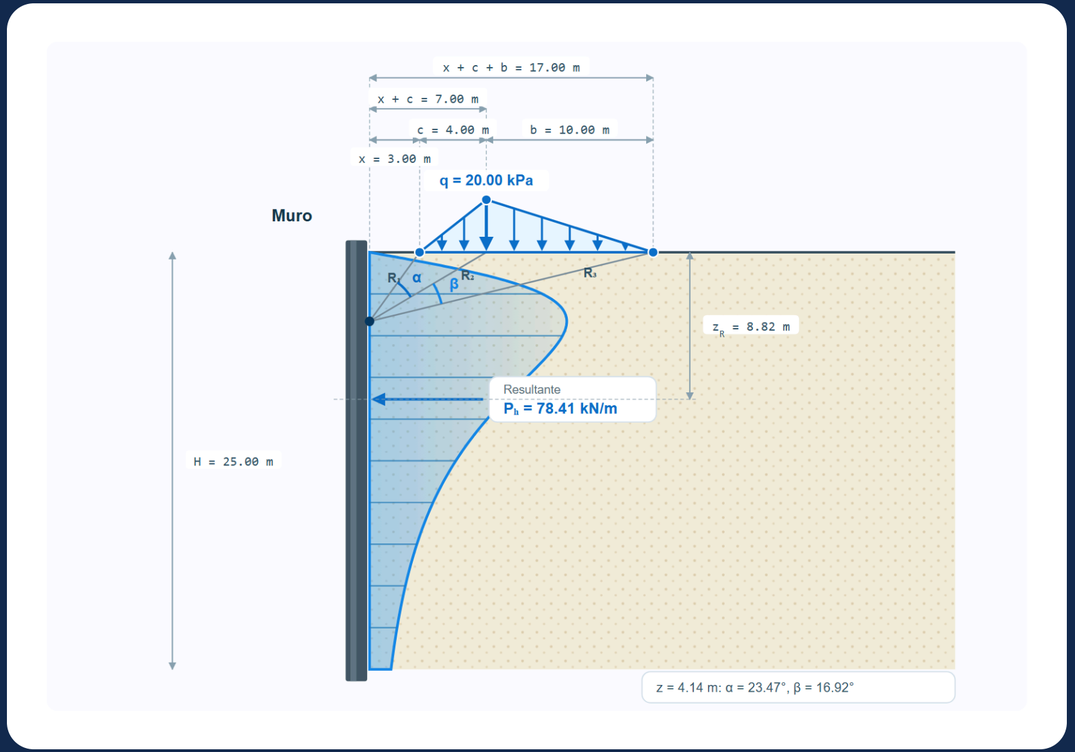
Presentación de clase de geotecnia · Sobrecargas

Sobrecarga triangular

Clase: carga triangular que comienza en x, crece hasta un valor máximo y desciende hasta cero; la ordenada a una profundidad dada se resuelve a mano, y el perfil, la resultante y las variantes se presentan en tablas.

- Superposición de cargas lineales
- Funciones A y B
- Muro rígido ψ = 2
- Resultante y z_R
- Resoluble a mano



Se basa en la página de teoría de GeoTerva · geoterva.com

Introducción

¿Qué aprenderemos en esta clase?

- La geometría de la **carga triangular**: parte de cero a una distancia **x** del muro, crece hasta el valor q en un ancho **c** y vuelve a anularse en un ancho **b**
- La determinación, a una profundidad z, de los radios $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$ y de los ángulos **α, β** (en radianes)
- La forma cerrada de la presión lateral obtenida por superposición de cargas lineales: con las funciones **A(s)** y **B(s)**
- La diferencia entre el **muro rígido** (ψ = 2) y el **medio semiinfinito** (ψ = 1)
- **Resultante P_H** y **profundidad de aplicación z_R**: área y primer momento del diagrama; el efecto de x y de la forma de la carga

DESARROLLO DE LA CLASE

Cada tema se desarrolla en **tres pasos**:

1 · **Teoría**: fórmula y su justificación

2 · **Enunciado**: datos y se pide

3 · **Solución**: paso a paso, con números

Ejemplo: H = 25 m, x = 3 m, c = 4 m, b = 10 m, q = 20 kPa; muro rígido. Una ordenada se resuelve a mano en z = 5 m.

Sobrecarga triangular sobre el muro

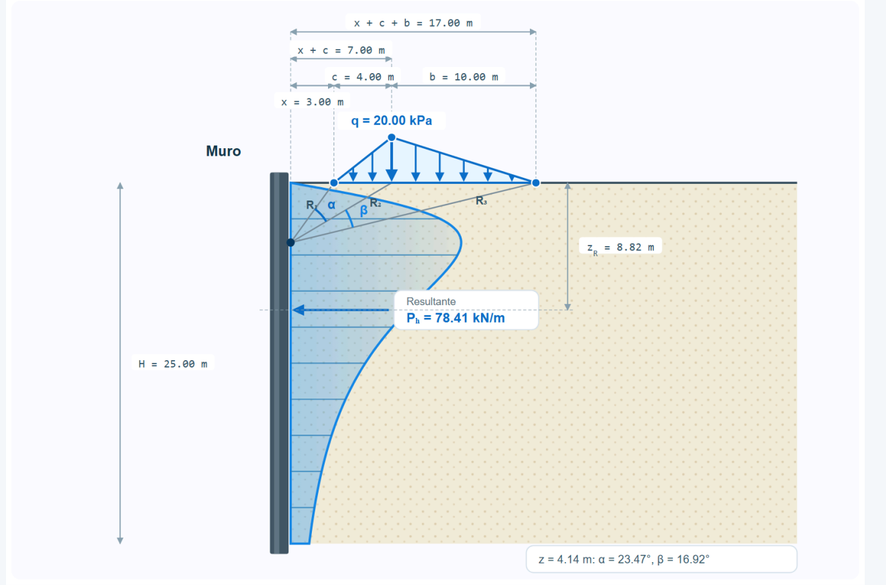
TEORÍA

La sobrecarga superficial comienza a una distancia horizontal **x** del muro

Su intensidad aumenta linealmente desde cero hasta el valor máximo **q** en el ancho **c** y, a continuación, disminuye linealmente de nuevo hasta cero en el ancho **b**

A cada profundidad z del muro, la geometría se define mediante los tres radios $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$ y los dos ángulos **α, β**

H: altura total del muro; **x**: distancia del muro al inicio de la carga
c: ancho del brazo creciente, **b**: ancho del brazo decreciente
q: intensidad máxima de la sobrecarga; **z**: profundidad desde el nivel del terreno



Geometría a la profundidad z

TEORÍA

A la profundidad z se indican a continuación las longitudes de los tres rayos que van desde el punto del muro hasta el **inicio**, el **vértice** y el **final** de la carga, y los dos ángulos entre ellos

En la ecuación de la presión los ángulos se toman en **radianes**; los valores en grados solo son útiles para el informe

$$R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \quad R_2 = \sqrt{(x+c)^2 + z^2} \quad R_3 = \sqrt{(x+c+b)^2 + z^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x+c}{z} - \tan^{-1}\frac{x}{z} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{x+c+b}{z} - \tan^{-1}\frac{x+c}{z}$$

Superposición de cargas lineales

TEORÍA

Una carga triangular es una serie de cargas lineales continuas, cada una de intensidad **w(s)·ds**; las tensiones horizontales elásticas (Flamant) se suman a lo largo de la carga

Con $s_1 = x$, $s_2 = x + c$, $s_3 = x + c + b$, $R^2 = s^2 + z^2$ y las funciones A y B siguientes, la integral resulta en forma cerrada

$$\sigma_H = \psi \frac{2}{\pi} \int w(s) \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} ds$$

$$A(s) = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{s}{z} - \frac{sz}{R^2}\right] \qquad B(s) = \frac{z}{2}\left[\ln R^2 + \frac{z^2}{R^2}\right]$$

$$\sigma_H = \psi \frac{2q}{\pi}\left\{\frac{B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)}{c} + \frac{s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)}{b}\right\}$$

A, B, α, β y ψ

TEORÍA

Los términos $\mathbf{A_2 - A_1}$ y $\mathbf{A_3 - A_2}$ contienen los ángulos α y β, y los términos $\mathbf{B_2 - B_1}$ y $\mathbf{B_3 - B_2}$ los logaritmos $\ln(R_2/R_1)$ y $\ln(R_3/R_2)$

Cuando esta misma superposición se aplica a una franja uniforme, se obtiene exactamente la conocida expresión **(q/π)[β – sin β·cos 2α]**; así se comprueba la ecuación

ψ = 1 es el medio semiinfinito (sin muro); **ψ = 2** es el muro rígido sin desplazamiento que duplica la tensión horizontal: valor predeterminado del módulo

La repetición del cálculo a lo largo de la altura del muro da $\boldsymbol{\sigma_H(z)}$; la presión es nula en la superficie del terreno

Área del diagrama y su primer momento

TEORÍA

La **fuerza resultante de la sobrecarga** por unidad de longitud del muro y su profundidad desde la superficie del terreno son el área y el momento estático del diagrama; el módulo calcula numéricamente ambas integrales con plena precisión

$$P_H = \int_0^H \sigma_H(z)\, dz$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z\, \sigma_H(z)\, dz}{P_H}$$

En el ejemplo, **P_H = 78.41 kN/m** (muro rígido) o **39.21 kN/m** (medio semiinfinito); en ambos casos **z_R = 8.82 m**, por debajo del nivel del terreno

Seis pasos y una ordenada

TEORÍA

1 · Se definen H, x, c, b, q y se elige ψ; **2** · se elige una profundidad z

3 · Se calculan R_1, R_2, R_3; **4** · se calculan α y β (radianes)

5 · se calcula σ_H: las funciones A y B se evalúan en los puntos s_1, s_2, s_3 y se sustituyen

6 · Se itera e integra: perfil de presiones, después P_H y z_R

$$z = 5\ \text{m}: \quad R_1 = 5.831\ \text{m} \quad R_2 = 8.602\ \text{m} \quad R_3 = 17.720\ \text{m} \qquad \alpha = 23.499^\circ \quad \beta = 19.148^\circ$$

$$\sigma_H = 3.247\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1) \ \rightarrow\ 2 \times 3.247 = 6.494\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2) \qquad P_H = 78.41\ \text{kN/m} \quad z_R = 8.82\ \text{m}$$

Enunciado

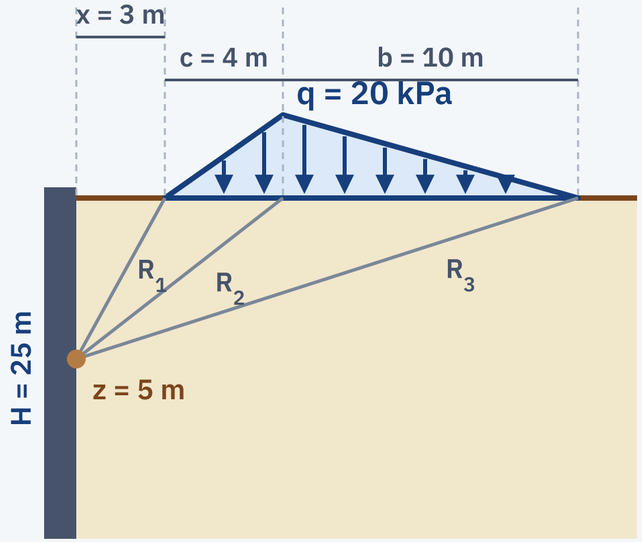
EJEMPLO

SE PIDE

A la profundidad **z = 5 m**, los valores de **R_1, R_2, R_3, α, β**, A y B, y la presión horizontal **σ_H** (para dos valores de ψ); comparación con el módulo.

Datos

Muro y carga	$H = 25.0$ **m;** $x = 3.0$ **m;** $c = 4.0$ **m;** $b = 10.0$ **m;** $q = 20.0$ **kPa**
Muro	**medio semiinfinito ($\psi = 1$) y muro rígido ($\psi = 2$)**



Solución (1/3)

SOLUCIÓN

1 Los puntos s_1 = x, s_2 = x + c, s_3 = x + c + b y los rayos

$$s_1 = 3\ \text{m} \quad s_2 = 3 + 4 = 7\ \text{m} \quad s_3 = 7 + 10 = 17\ \text{m}$$

$$R_1 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \mathbf{5.831} \quad R_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \mathbf{8.602} \quad R_3 = \sqrt{17^2 + 5^2} = \mathbf{17.720}\ \text{m}$$

2 Ángulos (radianes)

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \tan^{-1}\frac{3}{5} = 0.95055 - 0.54042 = \mathbf{0.41013}\ \text{rad}\ \ (23.499^\circ)$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{17}{5} - \tan^{-1}\frac{7}{5} = 1.28474 - 0.95055 = \mathbf{0.33420}\ \text{rad}\ \ (19.148^\circ)$$

Medido desde el punto del muro, el ángulo entre el inicio de la carga y su máximo es de **23.50°**, y el ángulo entre el máximo y el final es de **19.15°**.

Solución (2/3)

SOLUCIÓN

3 En tres puntos A(s) = ½[tan⁻¹(s/z) − sz/R²] y B(s) = (z/2)[ln R² + z²/R²]

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[0.54042 - \frac{3(5)}{34}\right] = 0.04962 \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left[0.95055 - \frac{7(5)}{74}\right] = 0.23879$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\left[1.28474 - \frac{17(5)}{314}\right] = 0.50702$$

s (m)	R² (m²)	tan⁻¹(s/z)	A(s)	ln R²	B(s)
3	34	0.54042	**0.04962**	3.52636	**10.6541**
7	74	0.95055	**0.23879**	4.30407	**11.6048**
17	314	1.28474	**0.50702**	5.74939	**14.5725**

Las diferencias de A contienen los ángulos y las diferencias de B, los logaritmos: **$A_2 - A_1$** = 0.18917, **$A_3 - A_2$** = 0.26824; **$B_2 - B_1$** = 0.9506, **$B_3 - B_2$** = 2.9678.

Solución (3/3)

SOLUCIÓN

4 Contribución de las ramas creciente y decreciente

$$\text{creciente} = \frac{B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)}{c} = \frac{0.9506 - 3(0.18917)}{4} = 0.09578$$

$$\text{decreciente} = \frac{s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)}{b} = \frac{17(0.26824) - 2.9678}{10} = 0.15922$$

5 Medio semiinfinito (ψ = 1) y muro rígido (ψ = 2)

$$\sigma_H = \frac{2q}{\pi}(\text{creciente} + \text{decreciente}) = \frac{2(20)}{\pi}(0.09578 + 0.15922) = \mathbf{3.247}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1)$$

$$\sigma_H = 2 \times 3.247 = \mathbf{6.494}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2)$$

En z = 5 m, **σ_H = 6.494 kPa** (muro rígido; 3.247 en el medio semiinfinito). El módulo da el mismo valor.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

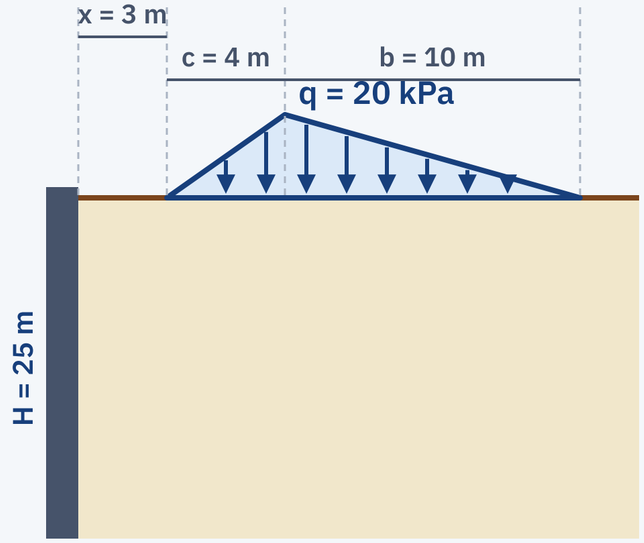
EJEMPLO

Datos

Modelo	**Carga triangular del ejemplo 1; muro rígido; tabla cada $H/30 = 0.833$ m**
En cada fila	**R_1, R_2, R_3, α, β y σ_H; los valores del medio semiinfinito son la mitad de los del muro rígido**

SE PIDE

Perfil de presiones; presión máxima y su profundidad; ángulos a la profundidad del pico.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

z (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	R_3 (m)	α (°)	β (°)	σ_H (kPa)
0.00	3.000	7.000	17.000	0.00	0.00	0.000
0.83	3.114	7.049	17.020	8.74	3.98	2.513
1.67	3.432	7.196	17.082	15.66	7.79	4.520
2.50	3.905	7.433	17.183	20.15	11.29	5.815
3.33	4.485	7.753	17.324	22.55	14.37	6.463
4.17	5.134	8.146	17.503	23.48	16.99	6.635
5.00	**5.831**	**8.602**	**17.720**	**23.50**	**19.15**	**6.494**
5.83	6.560	9.112	17.973	22.98	20.87	6.168
6.67	7.311	9.667	18.260	22.17	22.19	5.746
7.50	8.078	10.259	18.581	21.22	23.17	5.286
8.33	8.857	10.883	18.933	20.23	23.86	4.821
9.17	9.645	11.534	19.314	19.24	24.30	4.374
10.00	10.440	12.207	19.723	18.29	24.54	3.955
10.83	11.241	12.898	20.158	17.39	24.62	3.569
11.67	12.046	13.606	20.618	16.54	24.58	3.218
12.50	12.855	14.327	21.101	15.75	24.42	2.901
13.33	13.667	15.059	21.605	15.02	24.19	2.617
14.17	14.481	15.802	22.129	14.34	23.90	2.363
15.00	15.297	16.553	22.672	13.71	23.56	2.136
15.83	16.115	17.312	23.231	13.12	23.18	1.933
16.67	16.935	18.077	23.807	12.58	22.78	1.752
17.50	17.755	18.848	24.398	12.07	22.37	1.591
18.33	18.577	19.624	25.002	11.60	21.94	1.447
19.17	19.400	20.405	25.620	11.17	21.51	1.319
20.00	20.224	21.190	26.249	10.76	21.07	1.204
20.83	21.048	21.978	26.889	10.38	20.64	1.101
21.67	21.873	22.769	27.540	10.02	20.21	1.009
22.50	22.699	23.564	28.200	9.69	19.79	0.926
23.33	23.525	24.361	28.869	9.37	19.38	0.851
24.17	24.352	25.160	29.547	9.08	18.97	0.784
25.00	25.179	25.962	30.232	8.80	18.57	0.723

Solución (2/2)

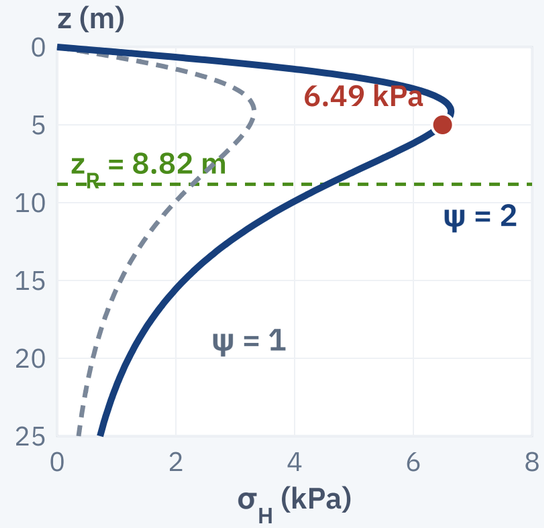
SOLUCIÓN

1 La presión es cero en la superficie, alcanza su máximo a la profundidad del pico y después disminuye

$$z = 0: \quad \sigma_H = 0 \qquad z = 4.14\ \text{m}: \quad \sigma_H = \mathbf{6.635}\ \text{kPa}$$

$$\alpha = 23.47^\circ \quad \beta = 16.92^\circ \qquad z = H: \quad \sigma_H = 0.723\ \text{kPa}$$

La presión máxima es de **6.63 kPa**, a **z = 4.14 m** (4.14 m por debajo del extremo superior de la carga); disminuye hasta 0.72 kPa en la base. Estos ángulos se muestran en la figura del módulo. La ordenada a z = 5 m es 6.494 kPa (fila en negrita, Ejemplo 1).



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

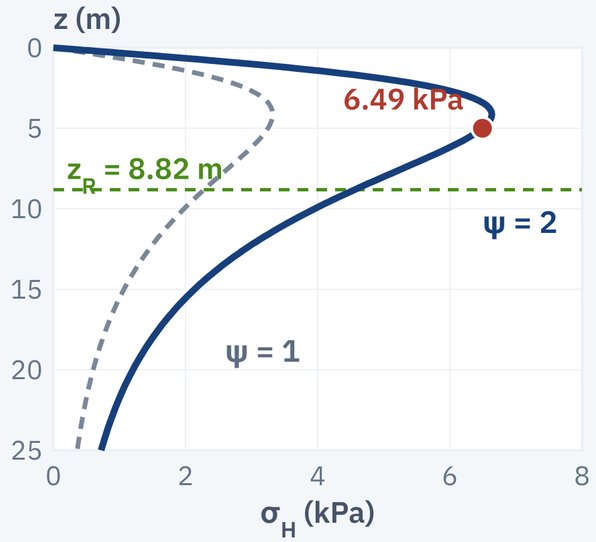
EJEMPLO

Datos

Modelo	**La carga triangular del Ejemplo 1; muro rígido; la tabla $H/30$ del Ejemplo 2 ($n = 30$, $h = H/30 = 0.8333$ m)**
Método	**Regla de Simpson; $z_R = \int z\,\sigma\,dz \,/\, P_H$**

SE PIDE

P_H y **z_R** (a mano, a partir de la tabla); valores para medio semiinfinito; comparación con el resultado del módulo.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

	σ_0	Σ impares (i = 1, 3, …, 29)	Σ pares (i = 2, 4, …, 28)	σ_{30}
σ_H (kPa)	0.000	47.277	46.234	0.723

1 Suma de Simpson y área

$$\Sigma = \sigma_0 + 4(47.277) + 2(46.234) + \sigma_{30} = 282.30$$

$$P_H \approx \frac{h}{3}\,\Sigma = \frac{0.8333}{3}(282.30) = \mathbf{78.42}\ \mathrm{kN/m}$$

A mano **78.42 kN/m**; la integral precisa del módulo da **78.41 kN/m** (diferencia 0.004 %). En un medio semiinfinito, la mitad: **39.21 kN/m**.

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

	$z_0\sigma_0$	Σ individual	Σ doble	$z_{30}\sigma_{30}$
$z\sigma_H$ (kPa·m)	0.000	414.83	405.58	18.07

2 Primer momento y profundidad

$$\int z\,\sigma\,dz \approx \frac{0.8333}{3}\left[0 + 4(414.83) + 2(405.58) + 18.07\right] = 691.3\ \text{kN}$$

$$z_R = \frac{691.3}{78.42} = \mathbf{8.82}\ \text{m}\ \ (\text{desde el terreno}) \qquad H - z_R = 16.18\ \text{m}\ (\text{desde la base})$$

A mano, **z_R = 8.82 m**; el módulo da 8.82 m. La resultante de 78.41 kN/m actúa a **8.82 m por debajo de la superficie del terreno** (16.18 m por encima de la base); z_R no varía al cambiar ψ.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

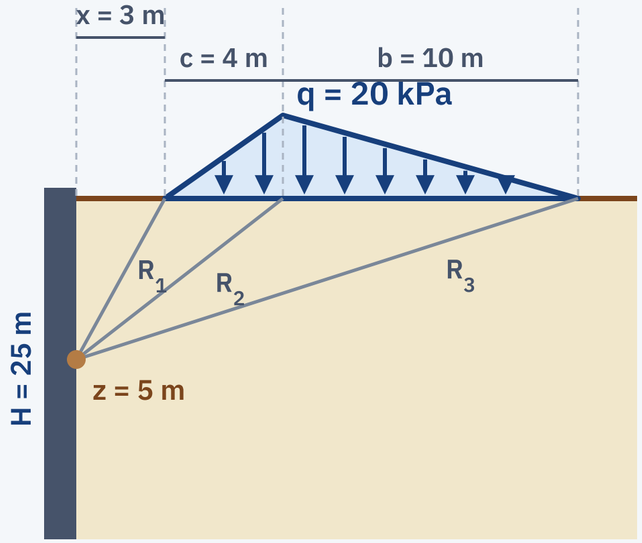
EJEMPLO

Datos

Modelo	**Ejemplo 1: $z = 5$ m; medio semiinfinito ($\psi = 1$)**
Método	$\sigma_H = \frac{2}{\pi} \int w(s) \, \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} \, ds$**; triángulo w: a $s = 3$ m, 0; a 7 m, q; a 17 m, 0**
Cálculo	**Simpson, $n = 14$, $h = 1.0$ m ($s = 3, 4, \ldots, 17$)**

SE PIDE

σ_H como suma de las cargas lineales; comparación con la forma cerrada del Ejemplo 1.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

i	s (m)	w(s) (kPa)	f(s) = s²z/(s²+z²)² (1/m)	c	c·w·f
0	3	0.00	0.03893	1	0.00000
1	4	5.00	0.04759	4	0.95181
2	5	10.00	0.05000	2	1.00000
3	6	15.00	0.04837	4	2.90245
4	7	20.00	0.04474	2	1.78963
5	8	18.00	0.04040	4	2.90872
6	9	16.00	0.03604	2	1.15344
7	10	14.00	0.03200	4	1.79200
8	11	12.00	0.02838	2	0.68118
9	12	10.00	0.02521	4	1.00837
10	13	8.00	0.02245	2	0.35923
11	14	6.00	0.02007	4	0.48156
12	15	4.00	0.01800	2	0.14400
13	16	2.00	0.01621	4	0.12968
14	17	0.00	0.01466	1	0.00000
			Σ c·w·f =		**15.30207**

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

1 Simpson y ψ

$$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\,\frac{h}{3}\sum c_i\, w_i f_i = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{3}(15.30207) = \mathbf{3.2472}\ \mathrm{kPa}\ \ (\psi = 1)$$

$$\psi = 2: \quad \sigma_H = \mathbf{6.494}\ \mathrm{kPa}$$

	Suma de las cargas lineales (Simpson)	Forma cerrada (A, B; Ejemplo 1)	Diferencia
σ_H, ψ = 1 (kPa)	3.2472	3.2468	%0.012
σ_H, ψ = 2 (kPa)	6.4944	6.4936	%0.012

Los dos caminos dan el mismo resultado: los términos A y B de la forma cerrada son la suma de las integrales de carga lineal de las ramas creciente y decreciente. Al reducirse el intervalo de Simpson, la diferencia tiende a cero (0.0006 % para h = 0.5 m).

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

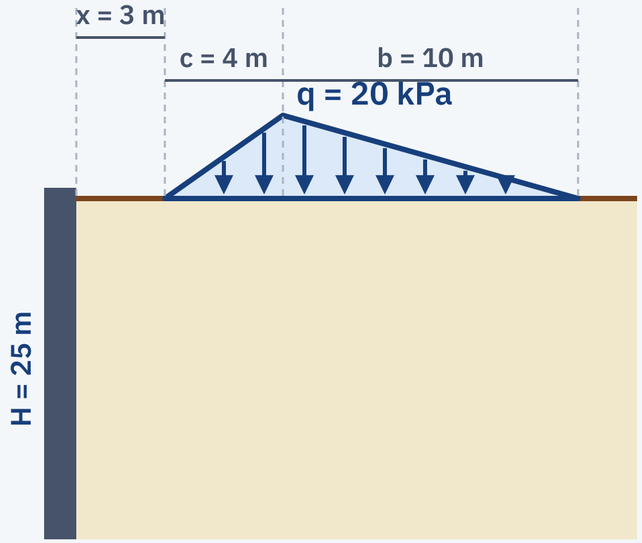
EJEMPLO

Datos

Modelo	$H = 25.0$ **m;** $q = 20$ **kPa; muro rígido; solo varía uno cada vez**
Variables	**distancia inicial** $x = 0; 3; 6; 10$ **m (**$c = 4$**,** $b = 10$ **m) y forma** $(c, b) = (2, 12); (4, 10); (7, 7); (10, 4); (12, 2)$ **m (**$x = 3$ **m)**
Comparación	**el peso del triángulo** $Q = q(c + b)/2$**, carga lineal en la posición** $x + (2c + b)/3$ **de su centro de gravedad**

SE PIDE

Para cada caso, P_H, z_R, $\sigma_{H,max}$ y su profundidad; comparación con la resultante de la carga lineal equivalente.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

x (m)	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
0	83.46	41.73	6.53	10.12	1.93
3	78.41	39.21	8.82	6.63	4.14
6	72.25	36.13	10.51	4.91	6.14
10	63.33	31.67	12.13	3.65	8.64

(c, b) (m)	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
(2; 12)	79.61	39.81	8.33	7.30	3.63
(4; 10)	78.41	39.21	8.82	6.63	4.14
(7; 7)	76.44	38.22	9.45	5.87	4.78
(10; 4)	74.32	37.16	9.97	5.29	5.31
(12; 2)	72.85	36.43	10.28	4.97	5.62

Al alejarse la carga del muro (x ↑) **la resultante disminuye, y z_R y la profundidad del máximo aumentan**. Con ancho total constante (c + b = 14 m), al alejarse el máximo del muro (c ↑) la resultante también disminuye y z_R se hace más profundo. Los valores para ψ = 1 son la mitad de los del muro rígido.

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

1 Peso del triángulo y su centro de gravedad

$$Q = \frac{q(c+b)}{2} = \frac{20(4+10)}{2} = \mathbf{140}\ \mathrm{kN/m}$$

$$\bar{x} = x + \frac{2c+b}{3} = 3 + \frac{2(4)+10}{3} = \mathbf{9}\ \mathrm{m} \qquad m = \frac{\bar{x}}{H} = 0.36$$

2 Resultante de la carga lineal (ψ = 2): integral en profundidad del integrando de la carga lineal

$$P_H = \psi\,\frac{Q}{\pi}\,\frac{H^2}{\bar{x}^2+H^2} = \frac{2Q}{\pi}\,\frac{1}{1+m^2} = \frac{2(140)}{\pi}\,\frac{1}{1+0.1296} = \mathbf{78.90}\ \mathrm{kN/m}$$

La carga lineal equivalente da **78.90 kN/m**; la resultante de la carga triangular es **78.41 kN/m** (diferencia del 0.6%). Las presiones máximas son 6.43 y 6.63 kPa; z_R es 9.22 y 8.82 m. En cuanto a la resultante, la diferencia es pequeña; en cambio el diagrama de presiones (presión máxima y su profundidad, z_R) se aparta del de la carga lineal.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Resumen

Puntos clave

$\sigma_H = \psi\,(2q/\pi)\,\{[B_2 - B_1 - x(A_2 - A_1)]/c + [s_3(A_3 - A_2) - (B_3 - B_2)]/b\}$; $A(s) = \tfrac{1}{2}[\tan^{-1}(s/z) - sz/R^2]$, $B(s) = (z/2)[\ln R^2 + z^2/R^2]$; $\psi = 2$ muro rígido, $\psi = 1$ semiespacio

Ejemplo (z = 5 m): R_1 5.831, R_2 8.602, R_3 17.720 m; α 23.499°, β 19.148°; σ_H = 3.247 kPa ($\psi = 1$), **6.494 kPa** ($\psi = 2$)

Perfil: 0 en la superficie; la presión máxima es **6.63 kPa**, en z = 4.14 m; después disminuye

Resultante P_H = **78.41 kN/m**, z_R = **8.82 m** (desde la superficie del terreno); para $\psi = 1$, P_H = 39.21 kN/m, z_R igual

Comparación: la resultante disminuye a medida que la carga se aleja del muro; la carga triangular da una resultante próxima a la de la carga lineal equivalente situada en su centro de gravedad (78.41 y 78.90 kN/m)

Referencias bibliográficas

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; esta página se basa en esta obra.

NOTA

Todos los ejemplos numéricos se han obtenido con el propio motor de cálculo del módulo; el módulo da los mismos valores. El ejemplo de apertura del módulo es el muro con H = 25 m, x = 3 m, c = 4 m, b = 10 m, q = 20 kPa.

GeoTerva

Cálculos geotécnicos en línea

De la teoría a la práctica

Introducir en GeoTerva la propia carga triangular, la distancia de inicio, los anchos de los brazos y la altura del muro; el módulo proporciona conjuntamente el diagrama de presiones, la resultante y su profundidad de actuación, las tres vistas, la solución paso a paso y el informe.

Abrir el módulo →

Página de teoría →

Abrir en el teléfono
Los módulos de prueba no requieren registro.

Si desea utilizarlas en sus clases: info@geoterva.com