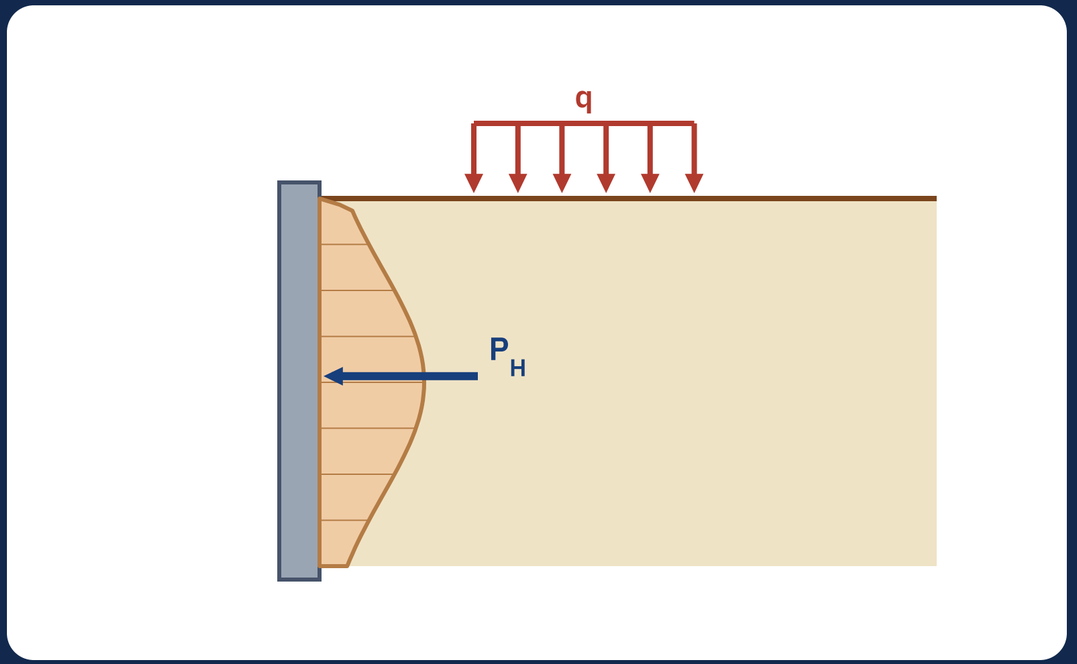
Презентация лекции по геотехнике · Внешние нагрузки

Полосовая пригрузка

Лекция: боковое давление на стену от длинной полосовой нагрузки, параллельной стене; эпюра давления, равнодействующая и линия действия, примеры расчёта.

- $\beta \cdot \alpha$
- $\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$
- Жёсткая стена $\psi = 2$
- P_H и z_R
- Эпюра давления



Что мы изучим на этой лекции?

- Геометрия полосовой нагрузки: x_1, x_2, $b = x_2 - x_1$ и **лучи**, идущие от точки на стене к двум краям полосы
- Нахождение давления по углам **β** и **α**: $\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$
- Формы для **жёсткой стены (ψ = 2)** и **полубесконечной среды (ψ = 1)** и условия применимости каждой из них
- Площадь эпюры давления — P_H, по первому моменту — z_R; глубина наибольшего давления
- Влияние **положения и ширины** полосы и **высоты стены** на результат

ХОД ЛЕКЦИИ

Каждая тема излагается **в три шага**:

1 · **Теория**: формула и обоснование

2 · **Условие**: дано и требуется определить

3 · **Решение**: пошагово, с числами

Стена примера: H = 25 m, полоса между x_1 = 4 m и x_2 = 12 m, q = 20 kPa. Силы приведены на единицу длины стены (kN/m).

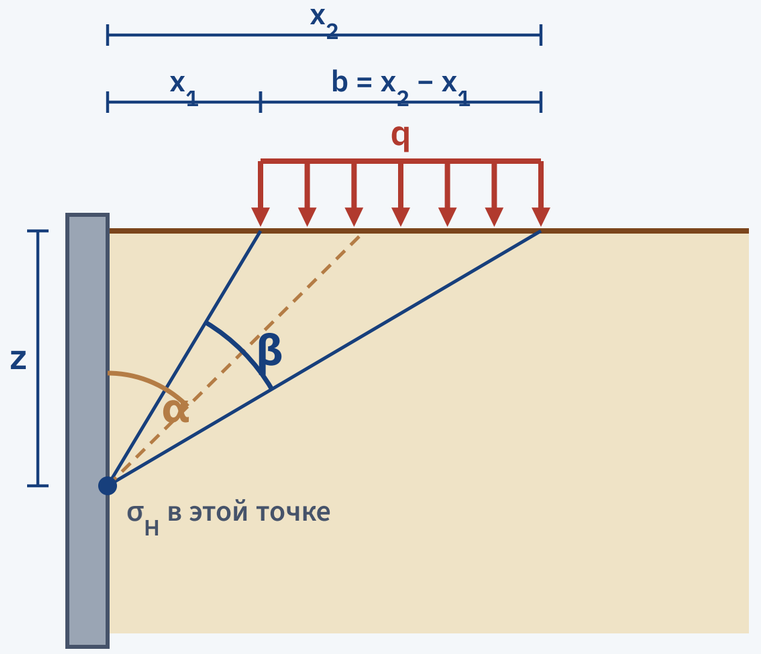
Полосовая нагрузка, действующая на стену

ТЕОРИЯ

Равномерно распределённая полосовая нагрузка **q**, действующая на поверхность грунта между расстояниями x_1 и x_2 от стены, создаёт дополнительное горизонтальное давление на стену

Давление на глубине z получается из геометрии двух лучей, соединяющих эту точку на стене с **ближним и дальним краями** полосы

Полоса протяжённая и параллельна стене: все результаты приведены **на единицу длины** стены



H — высота стены; **z** — глубина от поверхности

x_1, x_2 — горизонтальные расстояния от стены до ближнего и дальнего края полосы

$b = x_2 - x_1$ — ширина полосы; **q** — равномерная нагрузка на полосе

β, α и σ_H

ТЕОРИЯ

На глубине z полоса видна из точки на стене под углом **β**; **биссектриса** этого угла составляет с вертикалью угол **α**

Тригонометрические функции принимают углы в **радианах**; градусы — только для удобства чтения. В отношениях используется сама величина **z**

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{z}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x_1}{z}\right) \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x_1}{z}\right) + \frac{\beta}{2}$$

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{\pi} \left[\beta - \sin\beta \, \cos 2\alpha\right]$$

На поверхности грунта (z = 0): полоса, удалённая от стены, давления не создаёт; при $x_1 = 0$ имеем β = 90°, α = 45° и $\sigma_H = \psi q/2$

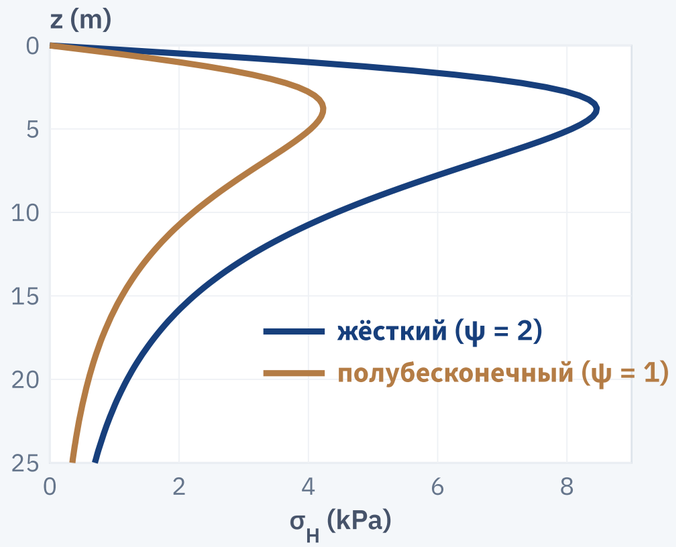
ψ = 2 и ψ = 1: две формы выражения

ТЕОРИЯ

ψ = 1 (полубесконечная среда): горизонтальное напряжение, создаваемое полосовой нагрузкой в упругой среде так, как если бы стены не было; подходит для стены, деформации которой достаточны для снятия напряжений в грунте

ψ = 2 (жёсткая стена): несмещаемая стена препятствует смещению грунта у своей грани и воспринимает **удвоенное** значение этого напряжения; как и для сосредоточенной нагрузки, оно принято в модуле по умолчанию

z (m)	β (°)	α (°)	σ_H ψ = 1 (kPa)	σ_H ψ = 2 (kPa)
0.00	0.000	90.000	0.00	0.00
2.50	20.237	68.113	3.84	7.68
5.00	28.720	53.020	4.04	8.07
7.50	29.922	43.034	3.11	6.21
10.00	28.393	35.998	2.22	4.44
15.00	23.728	26.796	1.12	2.23
20.00	19.654	21.137	0.5994	1.1988
25.00	16.551	17.366	0.3486	0.6971



Площадь эпюры и первый момент

ТЕОРИЯ

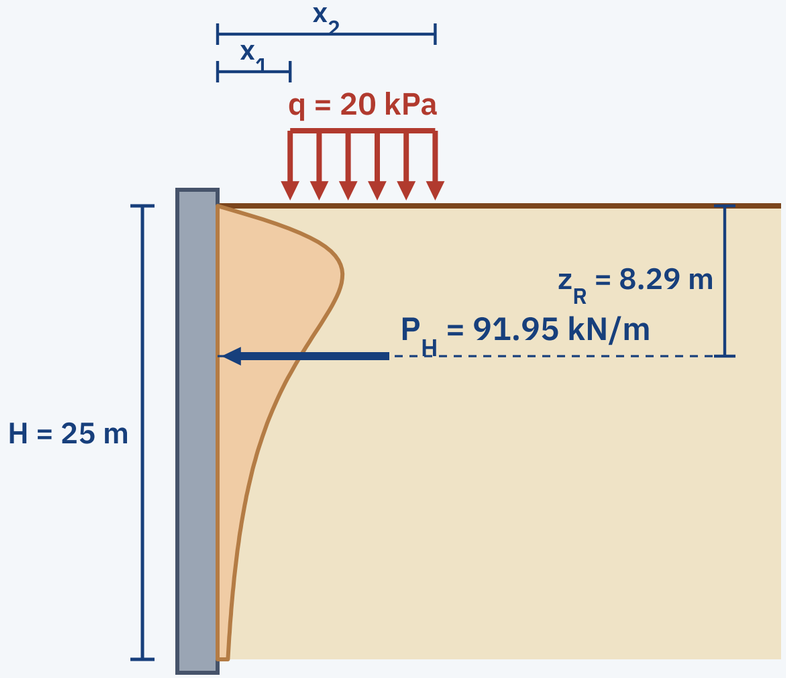
Равнодействующая давления на единицу длины стены равна **площади** эпюры давления; её **глубина от поверхности грунта** определяется точкой, в которой уравновешивается первый момент эпюры

Модуль вычисляет оба интеграла численно с полной точностью; в качестве проверки приводится **выражение площади в замкнутой форме**

Для очень глубокой стены P_H стремится к значению $\psi \cdot q \cdot b/\pi$

$$P_H = \int_0^H \sigma_H \, dz = \psi \, \frac{q}{\pi} \, H \, (\theta_2 - \theta_1) \qquad \theta_i = \tan^{-1}\left(\frac{x_i}{H}\right)$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z \, \sigma_H \, dz}{P_H}$$



Условие

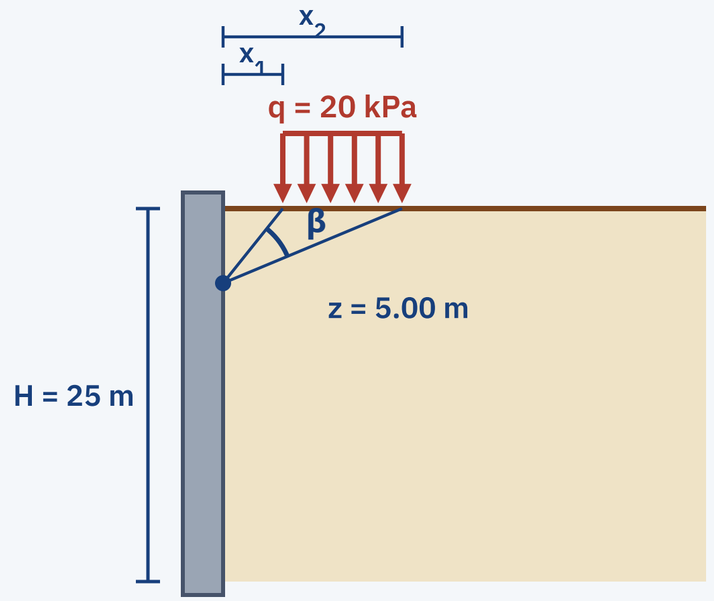
ПРИМЕР

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

β, **α** и σ_H: сначала полубесконечная среда (ψ = 1), затем жёсткая стена (ψ = 2).

Дано

Стена	$H = 25.00$ **m**
Полоса	$x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Глубина	$z = 5.00$ **m**



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Ширина полосы

$$b = x_2 - x_1 = 12.00 - 4.00 = \mathbf{8.00}\ \text{m}$$

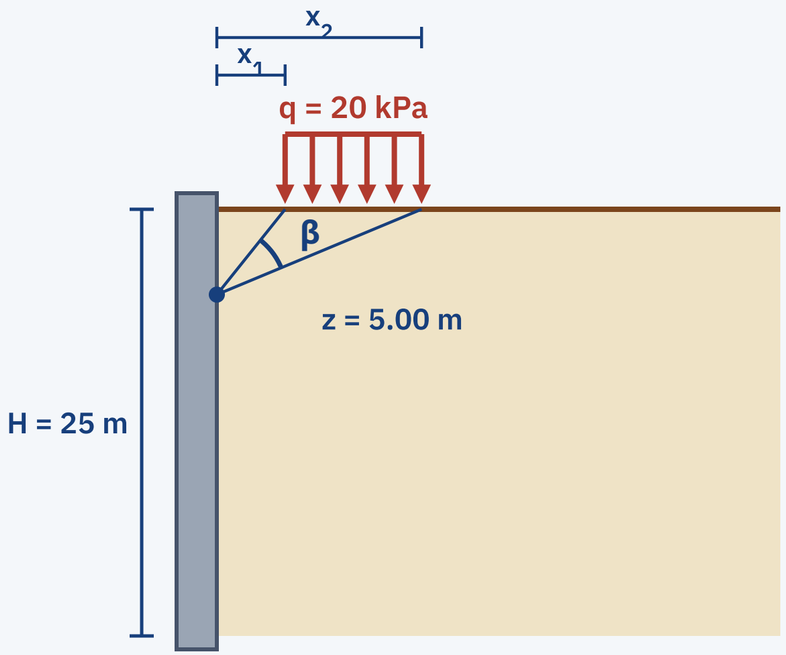
2 β: угол между двумя лучами

$$\beta = \tan^{-1}\tfrac{12}{5} - \tan^{-1}\tfrac{4}{5} = 67.380^\circ - 38.660^\circ = \mathbf{28.720}^\circ$$

3 α: угол между биссектрисой и вертикалью

$$\alpha = \tan^{-1}\tfrac{4}{5} + \tfrac{\beta}{2} = 38.660^\circ + 14.3602^\circ = \mathbf{53.020}^\circ$$

В радианах β = **0.50126** и 2α = **1.85075** (используются для σ_H на следующей странице).



Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

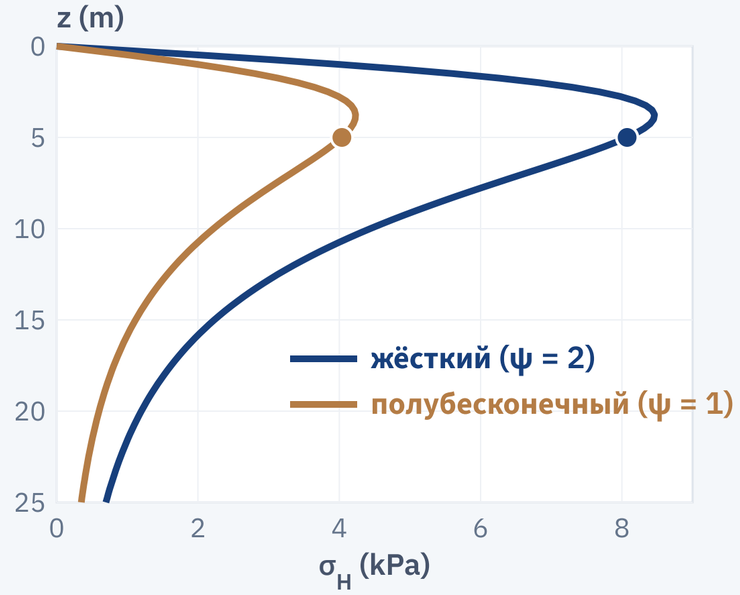
4 Полубесконечная среда (ψ = 1)

$$\sigma_H = \frac{20}{\pi}\left[0.50126 - \sin(0.50126)\cos(1.85075)\right] = \mathbf{4.0364}\ \text{kPa}$$

5 Жёсткая стена (ψ = 2): вдвое больше

$$\sigma_H = 2 \times 4.0364 = \mathbf{8.0728}\ \text{kPa}$$

При z = 5 m для полубесконечной среды — **4.0364 kPa**, для жёсткой стены — **8.0728 kPa**. Одни и те же β и α используются в обеих формах; ψ — лишь масштаб.



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

ПРИМЕР

Дано

Стена и полоса	$H = 25.00$ **m,** $x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Глубины	$z = 0$ **–** 25 **m, с шагом** 2.5 **m**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Профиль **β**, **α**, σ_H (в двух формах); **наибольшее давление** и его глубина.

Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

z (m)	β (°)	α (°)	σ_H ψ = 1 (kPa)	σ_H ψ = 2 (kPa)
0.00	0.000	90.000	0.0000	0.0000
2.50	20.237	68.113	3.8387	7.6773
5.00	**28.720**	**53.020**	**4.0364**	**8.0728**
7.50	29.922	43.034	3.1069	6.2137
10.00	28.393	35.998	2.2191	4.4382
12.50	26.086	30.788	1.5660	3.1319
15.00	23.728	26.796	1.1160	2.2319
17.50	21.564	23.657	0.8096	1.6193
20.00	19.654	21.137	0.5994	1.1988
22.50	17.992	19.077	0.4528	0.9056
25.00	16.551	17.366	0.3486	0.6971

При z = 0 давление отсутствует (полоса далеко от стены); давление растёт с глубиной, достигает максимума при **z ≈ 3.81 m**, затем убывает. Строка z = 5.00 m соответствует Примеру 1. У основания (z = 25 m) при ψ = 2 остаётся 0.6971 kPa.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 Глубина максимума: условие $d\sigma_H/dz = 0$

$$\frac{x_1^3}{(x_1^2+z^2)^2} = \frac{x_2^3}{(x_2^2+z^2)^2} \;\Rightarrow\; z^2 = \frac{(x_1x_2)^{3/2}\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)}{x_2^{3/2}-x_1^{3/2}}$$

$$z^2 = 14.504 \;\Rightarrow\; z = \mathbf{3.8084}\ \text{m}$$

2 Углы на этой глубине

$$\beta = \tan^{-1}\frac{12}{3.8084} - \tan^{-1}\frac{4}{3.8084} = \mathbf{25.99}^\circ \qquad \alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3.8084} + \frac{\beta}{2} = \mathbf{59.40}^\circ$$

3 Наибольшее давление

$$\sigma_{H,max} = \frac{20}{\pi}[0.45355 - \sin(0.45355)\cos(2.07341)] = \mathbf{4.23}\ (\psi = 1);\quad \mathbf{8.46}\ \text{kPa}\ (\psi = 2)$$

Пик при z = **3.81 m**: **8.46 kPa** (ψ = 2), **4.23 kPa** (ψ = 1); глубина зависит только от x_1, x_2.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

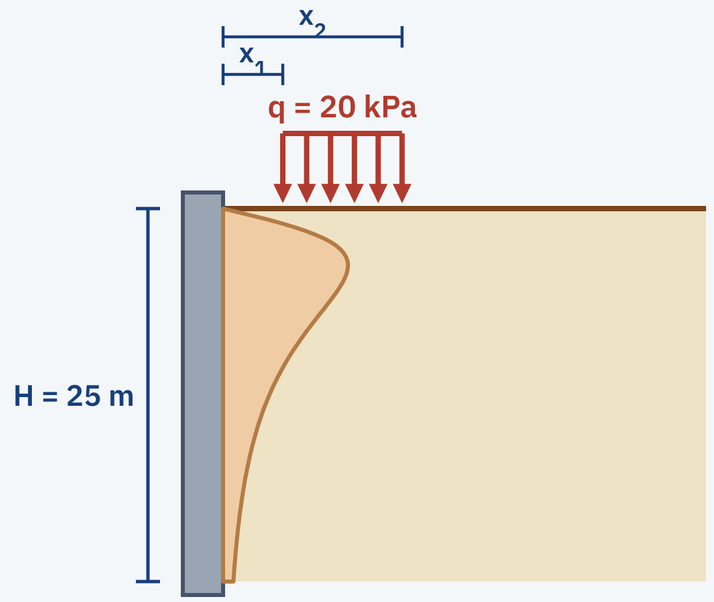
ПРИМЕР

Дано

Стена и полоса	$H = 25.00$ **m,** $x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Формы	**полубесконечная среда ($\psi = 1$) и жёсткая стена ($\psi = 2$)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

P_H (по замкнутому выражению для площади), z_R и высота над подошвой.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Углы (на глубине H = 25 m)

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{4}{25} = \mathbf{0.158655}\ \text{rad}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{12}{25} = \mathbf{0.447520}\ \text{rad}$$

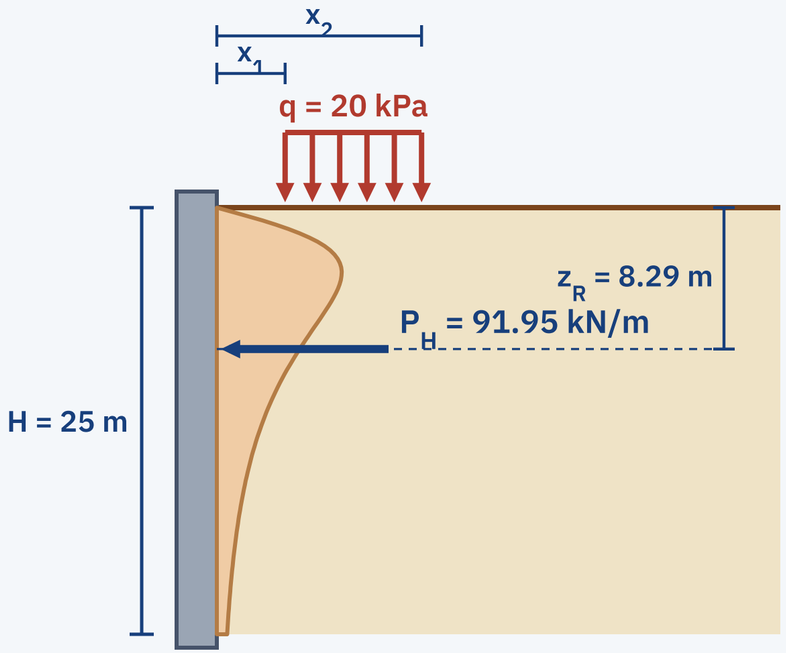
2 Полубесконечная среда (ψ = 1)

$$P_H = \frac{20}{\pi} \times 25 \times (0.447520 - 0.158655) = \mathbf{45.97}\ \text{kN/m}$$

3 Жёсткая стена (ψ = 2): вдвое больше

$$P_H = 2 \times 45.974 = \mathbf{91.95}\ \text{kN/m}$$

Равнодействующая составляет **45.97 kN/m** для упругого полупространства и **91.95 kN/m** для жёсткой стены; численное интегрирование в модуле даёт то же значение.



Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 Первый момент (в замкнутом виде; ψ = 1, выражение в [ ] вычисляется для x_2 за вычетом значения для x_1)

$$M = \int_0^H z\,\sigma_H\,dz = \frac{q}{\pi}\left[\frac{H^2}{2}\tan^{-1}\frac{x}{H} - \frac{x}{2}\left(H - x\tan^{-1}\frac{H}{x}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$

2 Числовые значения (ψ = 1)

$$x_2: \quad 312.5(0.447520) - 6(25 - 12\cdot 1.12328) = 70.7259$$

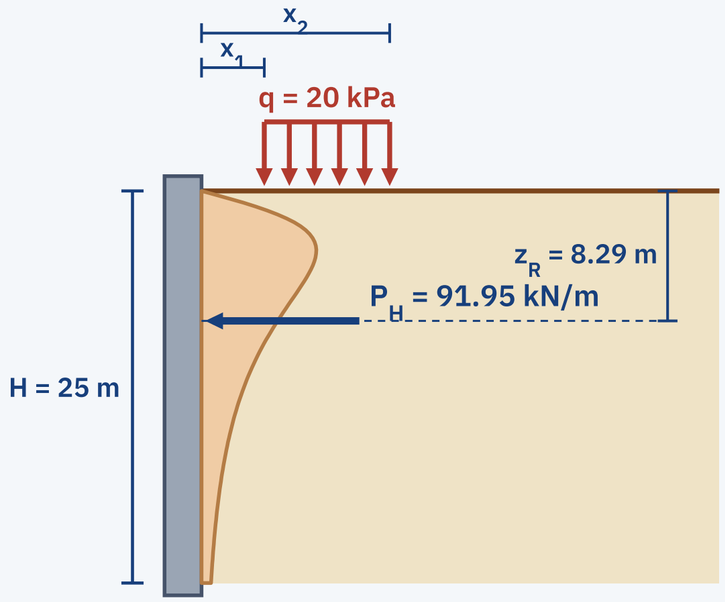
$$x_1: \quad 312.5(0.158655) - 2(25 - 4\cdot 1.41214) = 10.8769$$

$$M = \frac{20}{\pi}(70.7259 - 10.8769) = \mathbf{381.011}\ \text{kN}$$

3 Глубина и высота над подошвой

$$z_R = \frac{M}{P_H} = \frac{381.011}{45.974} = \mathbf{8.287}\ \text{m} \qquad H - z_R = \mathbf{16.71}\ \text{m}$$

Равнодействующая расположена на **8.29 m** ниже поверхности и на **16.71 m** выше основания; глубина в обеих формах одна и та же.



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

ПРИМЕР

Дано

Стена и нагрузка	$H = 25.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa, жёсткая стена** $(\psi = 2)$
Полоса	**ширина** $b = 8.00$ **m постоянна;** $x_1 = 0,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 20$ **m**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

P_H, z_R, наибольшее давление и его глубина; проверка вручную для $x_1 = 0$.

Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

x_1 (m)	x_2 (m)	P_H (kN/m)	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
0	8	98.58	4.80	20.00	0.00
2	10	95.71	6.72	11.53	2.33
4	**12**	**91.95**	**8.29**	**8.46**	**3.81**
8	16	82.64	10.63	5.57	6.40
12	20	72.33	12.21	4.16	8.85
20	28	53.22	14.06	2.76	13.60

По мере удаления полосы от стены **равнодействующая уменьшается** (98.58 → 53.22 kN/m), **линия действия опускается глубже** (4.80 → 14.06 m), а пик давления смещается вниз; строка x_1 = 4 m соответствует Примерам 1 и 3.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 На поверхности углы принимают предельное значение (z = 0)

$$\beta = 90^\circ, \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \sin 90^\circ \cos 90^\circ \right] = \psi \frac{q}{2} = \frac{2 \times 20}{2} = \mathbf{20.00}\ \text{kPa}$$

2 Равнодействующая ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \tan^{-1}(8/25)$)

$$P_H = \frac{2 \times 20}{\pi} \times 25 \times (0.309703 - 0) = \mathbf{98.58}\ \text{kN/m}$$

Полоса, начинающаяся у грани стены, **непосредственно нагружает** верхнюю часть стены: давление на поверхности грунта составляет ψq/2 = **20.00 kPa** (в полубесконечной среде — 10.00 kPa), равнодействующая — **98.58 kN/m**, а z_R = 4.80 m.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

ПРИМЕР

Дано

Стена и нагрузка	$q = 20.00$ **kPa, жёсткая стена (**$\psi = 2$**)**
Ширина	$x_1 = 4.00$ **m постоянно,** $b = 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 36$ **m (**$H = 25$ **m)**
Высота	$x_1 = 4$**,** $x_2 = 12$ **m;** $H = 5,\ 10,\ 25,\ 50,\ 100,\ 250$ **m**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

P_H и z_R; сравнение с предельным значением для глубокой стены $\psi\, q\, b / \pi$.

Решение

РЕШЕНИЕ

b (m)	x_2 (m)	P_H (kN/m)	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)
2	6	**24.47**	6.12	3.32
4	8	**48.08**	6.95	5.57
8	12	**91.95**	8.29	8.46
16	20	**164.28**	10.01	11.53
36	40	**271.69**	11.82	14.63

Более широкая полоса передаёт большую нагрузку: P_H увеличивается, z_R и максимум эпюры смещаются вглубь.

H (m)	P_H (kN/m)	P_H / (ψqb/π)	z_R (m)	от подошвы (m)
5	**31.91**	0.3133	3.00	2.00
10	**63.10**	0.6194	5.10	4.90
25	**91.95**	0.9027	8.29	16.71
50	**99.13**	0.9732	10.13	39.87
100	**101.16**	0.9931	11.27	88.73
250	**101.75**	0.9989	12.03	237.97

При большой высоте стены P_H приближается к значению ψqb/π = 101.86 kN/m.

Профиль давления не зависит от высоты стены ($\sigma_{H,max}$ = 8.46 kPa, z = 3.81 m для любой H): высота изменяет лишь верхний предел интеграла.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Главное

$\beta = \tan^{-1}(x_2/z) - \tan^{-1}(x_1/z)$, $\alpha = \tan^{-1}(x_1/z) + \beta/2$; $\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$; $\psi = 2$ — жёсткая стена, $\psi = 1$ — полубесконечная среда

Пример ($H = 25$ m, $x_1 = 4$, $x_2 = 12$, $q = 20$): при $z = 5$ m $\beta = 28.720°$, $\alpha = 53.020°$, $\sigma_H = 4.0364$ kPa ($\psi = 1$) и 8.0728 kPa ($\psi = 2$)

Наибольшее давление 8.46 kPa ($\psi = 2$) на глубине $z = 3.81$ m; на поверхности — нуль, у основания 0.6971 kPa

Равнодействующая $P_H = \psi\,(q/\pi)\,H\,(\theta_2 - \theta_1)$ = **91.95 kN/m** ($\psi = 2$), **$z_R = 8.29$ m** ниже поверхности (16.71 m от подошвы)

Влияние параметров: по мере удаления полосы P_H уменьшается, а z_R увеличивается; при $x_1 = 0$ у поверхности значение равно $\psi q/2$; для очень глубокой стены $P_H \to \psi q b/\pi$

Список литературы

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; эта страница основана на данном источнике.

California Department of Transportation. Trenching and Shoring Manual — решение для полосовой нагрузки на жесткую стену (удвоенная форма).

ПРИМЕЧАНИЕ

Все численные примеры получены с помощью собственного расчётного ядра модуля; модуль даёт те же значения. Начальная стена модуля имеет H = 25 m, x_1 = 4 m, x_2 = 12 m и q = 20 kPa.

GeoTerva

Геотехнические расчёты онлайн

От теории к практике

В GeoTerva вводятся собственная стена, положение и ширина полосовой нагрузки; модуль выдаёт значения β, α, σ_H на каждой глубине, эпюру давления, равнодействующую и линию действия, пошаговое решение и отчёт вместе.

Открыть модуль →

Страница теории →

Открыть на телефоне
Для пробных модулей регистрация не требуется.