Apresentação de aula de geotecnia · Sobrecargas

Sobrecarga em faixa

Aula: pressão lateral produzida no muro por uma carga em faixa longa, paralela ao muro; perfil de pressões, resultante e linha de ação, exemplos resolvidos.

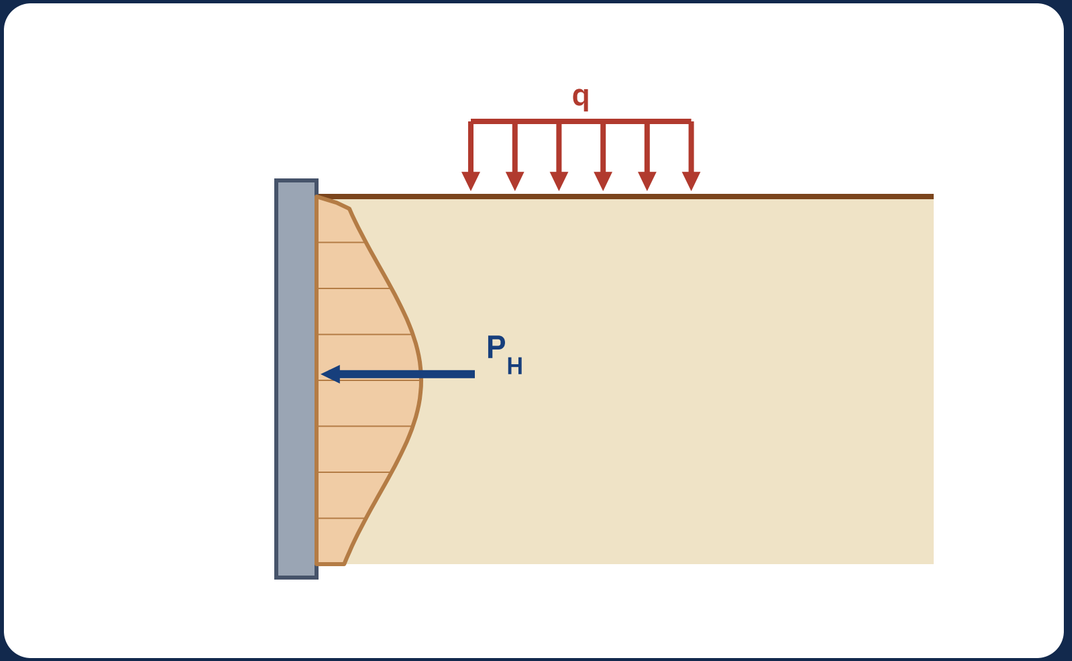
β · α

$\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$

Muro rígido ψ = 2

P_H e z_R

Perfil de pressões



Introdução

O que veremos nesta aula?

- A geometria da carga em faixa: x_1, x_2, $b = x_2 - x_1$ e os **raios** de um ponto do muro às duas bordas da faixa
- Obtenção da pressão a partir dos ângulos **β** e **α**: $\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$
- A forma para **muro rígido (ψ = 2)** e para **meio semi-infinito (ψ = 1)**, e quando cada uma é apropriada
- A área do diagrama de pressões fornece P_H e, pelo primeiro momento, z_R; a profundidade da pressão máxima
- Como a **posição e a largura** da faixa e a **altura do muro** afetam o resultado

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: fórmula e justificativa

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Muro do exemplo: H = 25 m, faixa entre x_1 = 4 m e x_2 = 12 m, q = 20 kPa. As forças são por unidade de comprimento do muro (kN/m).

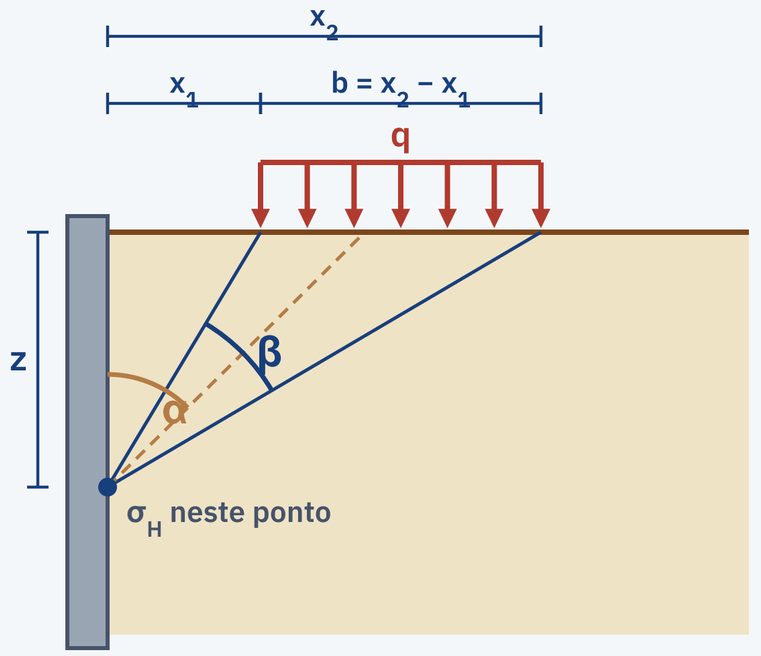
Carga em faixa atuante no muro

TEORIA

Entre as distâncias x_1 e x_2 a partir do muro, uma carga em faixa **q** uniformemente distribuída, atuante na superfície do terreno, acrescenta uma pressão horizontal ao muro

A pressão na profundidade z é obtida da geometria dos dois raios que unem esse ponto do muro às **bordas próxima e distante** da faixa

A faixa é longa e paralela ao muro: todos os resultados são **por unidade de comprimento do muro**



H — altura do muro; **z** — profundidade a partir da superfície

x_1, x_2 — distâncias horizontais do muro às bordas próxima e afastada da faixa

$b = x_2 - x_1$ — largura da faixa; **q** — carga uniforme sobre a faixa

β, α e σ_H

TEORIA

Na profundidade z, a faixa enxerga, no ponto do muro, o ângulo **β**; a **bissetriz** desse ângulo forma com a vertical o ângulo **α**

As funções trigonométricas tomam os ângulos em **radianos**; os graus servem apenas para facilitar a leitura. Nas razões, usa-se o próprio **z**

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{z}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x_1}{z}\right) \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x_1}{z}\right) + \frac{\beta}{2}$$

$$\sigma_H = \psi \, \frac{q}{\pi} \left[\beta - \sin\beta \, \cos 2\alpha\right]$$

Na superfície do terreno (z = 0): uma faixa afastada do muro não produz pressão; se $x_1 = 0$, então β = 90°, α = 45° e $\sigma_H = \psi q/2$

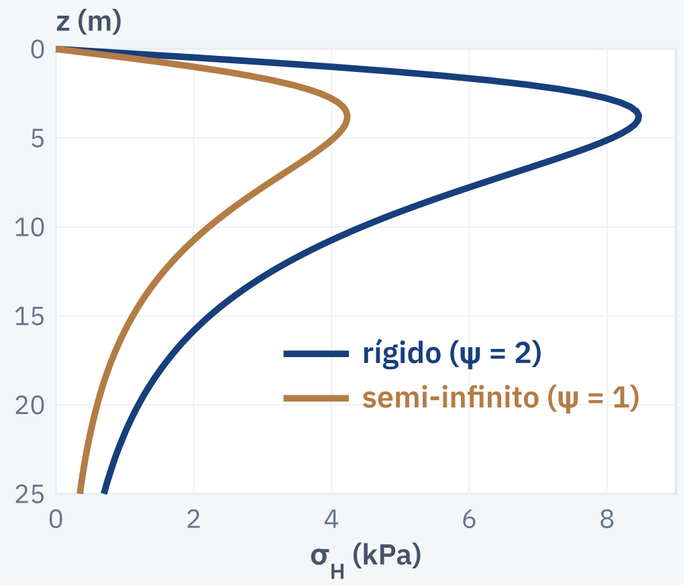
ψ = 2 e ψ = 1: duas formas de expressão

TEORIA

ψ = 1 (meio semi-infinito): a tensão horizontal produzida pela carga em faixa em um meio elástico, como se o muro não existisse; adequada a um muro que se deforma o suficiente para aliviar a tensão do solo

ψ = 2 (muro rígido): o muro indeslocável impede o movimento do solo junto à sua face e recebe o **dobro** dessa tensão; como no caso da carga pontual, é o valor padrão do módulo

z (m)	β (°)	α (°)	σ_H ψ = 1 (kPa)	σ_H ψ = 2 (kPa)
0.00	0.000	90.000	0.00	0.00
2.50	20.237	68.113	3.84	7.68
5.00	28.720	53.020	4.04	8.07
7.50	29.922	43.034	3.11	6.21
10.00	28.393	35.998	2.22	4.44
15.00	23.728	26.796	1.12	2.23
20.00	19.654	21.137	0.5994	1.1988
25.00	16.551	17.366	0.3486	0.6971



Área e primeiro momento do diagrama

TEORIA

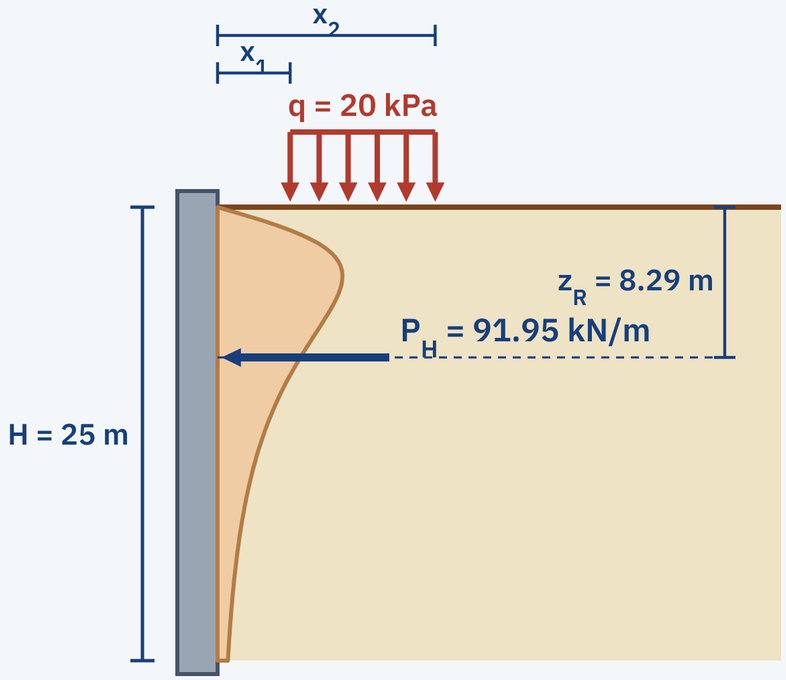
A **resultante** da pressão por unidade de comprimento do muro é a **área** sob o diagrama de pressão; a sua **profundidade a partir da superfície do terreno** é o ponto em que o primeiro momento do diagrama se equilibra

O módulo calcula numericamente as duas integrais com precisão total; a **expressão fechada da área** é fornecida como verificação

Em muro muito profundo, P_H tende a ψ·q·b/π

$$P_H = \int_0^H \sigma_H \, dz = \psi \, \frac{q}{\pi} \, H \, (\theta_2 - \theta_1) \qquad \theta_i = \tan^{-1}\left(\frac{x_i}{H}\right)$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z \, \sigma_H \, dz}{P_H}$$



Enunciado

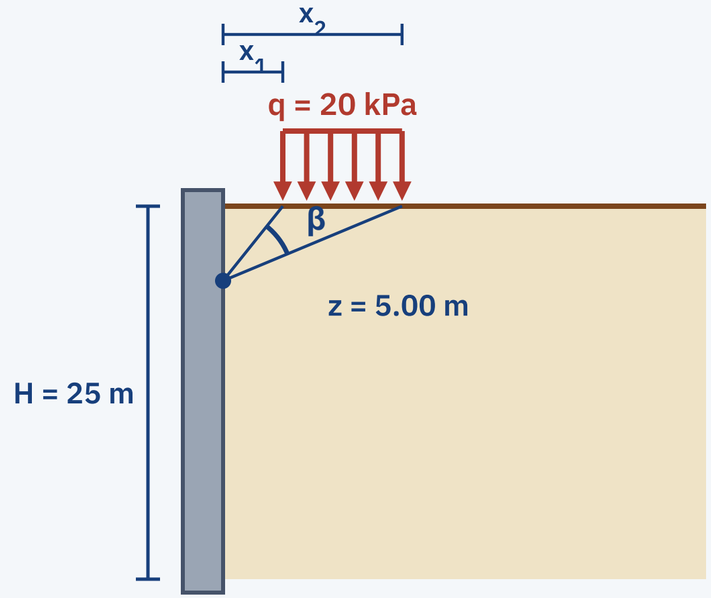
EXEMPLO

PEDE-SE

β, **α** e **σ_H**: primeiro o meio semi-infinito (ψ = 1), depois o muro rígido (ψ = 2).

Dados

Muro	$H = 25.00$ **m**
Faixa	$x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Profundidade	$z = 5.00$ **m**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Largura da faixa

$$b = x_2 - x_1 = 12.00 - 4.00 = \mathbf{8.00}\ \text{m}$$

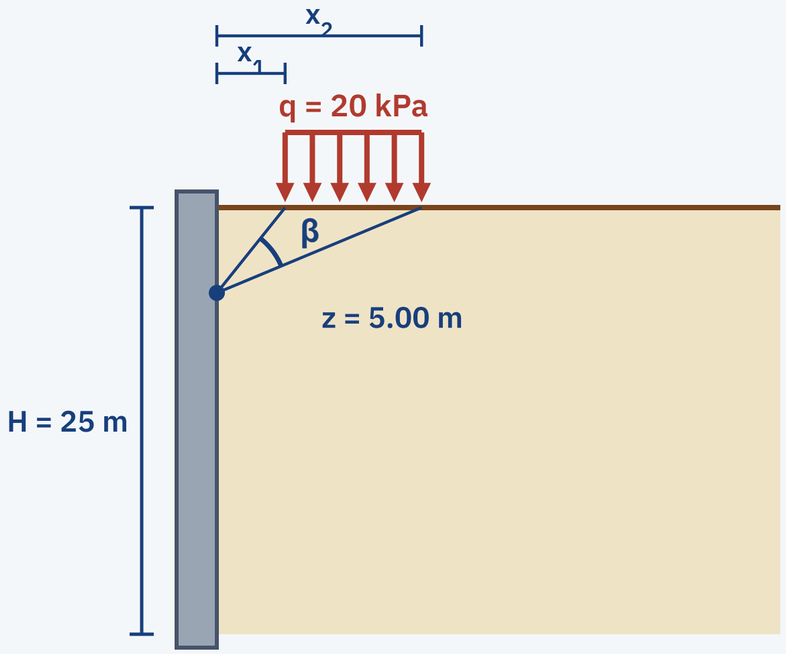
2 β: ângulo entre os dois raios

$$\beta = \tan^{-1}\frac{12}{5} - \tan^{-1}\frac{4}{5} = 67.380^\circ - 38.660^\circ = \mathbf{28.720}^\circ$$

3 α: ângulo da bissetriz com a vertical

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{4}{5} + \frac{\beta}{2} = 38.660^\circ + 14.3602^\circ = \mathbf{53.020}^\circ$$

Em radianos, β = **0.50126** e 2α = **1.85075** (usados para σ_H na página seguinte).



Solução (2/2)

SOLUÇÃO

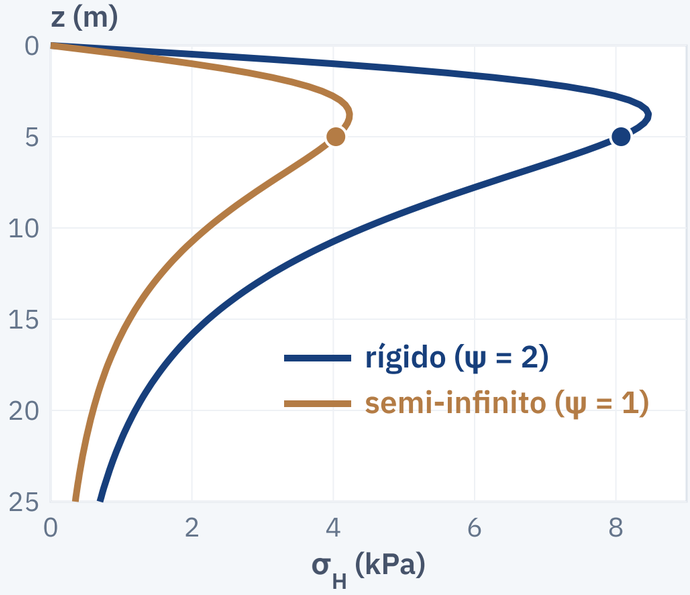
4 Meio semi-infinito (ψ = 1)

$$\sigma_H = \frac{20}{\pi}\left[0.50126 - \sin(0.50126)\cos(1.85075)\right] = \mathbf{4.0364}\ \text{kPa}$$

5 Muro rígido (ψ = 2): o dobro

$$\sigma_H = 2 \times 4.0364 = \mathbf{8.0728}\ \text{kPa}$$

Em z = 5 m, **4.0364 kPa** para meio semi-infinito e **8.0728 kPa** para muro rígido. Os mesmos β e α são usados nas duas formas; ψ é apenas um fator de escala.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Muro e faixa	$H = 25.00$ **m,** $x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Profundidades	$z = 0$ **–** 25 **m, a cada** 2.5 **m**

PEDE-SE

Perfil de **β**, **α**, **σ_H** (duas formas); **pressão máxima** e sua profundidade.

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

z (m)	β (°)	α (°)	σ_H ψ = 1 (kPa)	σ_H ψ = 2 (kPa)
0.00	0.000	90.000	0.0000	0.0000
2.50	20.237	68.113	3.8387	7.6773
5.00	**28.720**	**53.020**	**4.0364**	**8.0728**
7.50	29.922	43.034	3.1069	6.2137
10.00	28.393	35.998	2.2191	4.4382
12.50	26.086	30.788	1.5660	3.1319
15.00	23.728	26.796	1.1160	2.2319
17.50	21.564	23.657	0.8096	1.6193
20.00	19.654	21.137	0.5994	1.1988
22.50	17.992	19.077	0.4528	0.9056
25.00	16.551	17.366	0.3486	0.6971

Em z = 0 não há pressão (a faixa está longe do muro); a pressão aumenta com a profundidade, atinge o pico em **z ≈ 3.81 m** e depois diminui. A linha z = 5.00 m é o Exemplo 1. Na base (z = 25 m) restam 0.6971 kPa para ψ = 2.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

1 Profundidade do pico: condição $d\sigma_H/dz = 0$

$$\frac{x_1^3}{(x_1^2+z^2)^2} = \frac{x_2^3}{(x_2^2+z^2)^2} \;\Rightarrow\; z^2 = \frac{(x_1x_2)^{3/2}\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)}{x_2^{3/2}-x_1^{3/2}}$$

$$z^2 = 14.504 \;\Rightarrow\; z = \mathbf{3.8084}\ \mathrm{m}$$

2 Ângulos nesta profundidade

$$\beta = \tan^{-1}\frac{12}{3.8084} - \tan^{-1}\frac{4}{3.8084} = \mathbf{25.99}^\circ \qquad \alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3.8084} + \frac{\beta}{2} = \mathbf{59.40}^\circ$$

3 Pressão máxima

$$\sigma_{H,max} = \frac{20}{\pi}[0.45355 - \sin(0.45355)\cos(2.07341)] = \mathbf{4.23}\ (\psi = 1);\quad \mathbf{8.46}\ \mathrm{kPa}\ (\psi = 2)$$

No pico, z = **3.81 m**: **8.46 kPa** (ψ = 2), **4.23 kPa** (ψ = 1); a profundidade depende apenas de x_1, x_2.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

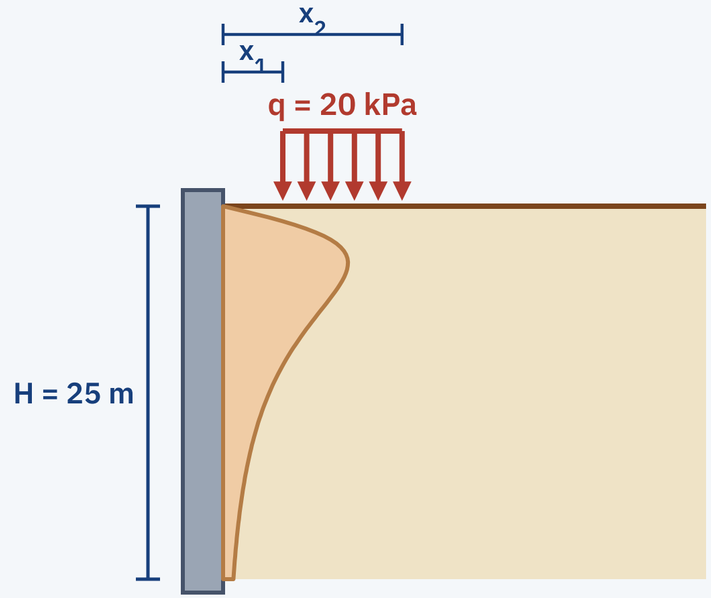
EXEMPLO

PEDE-SE

$\mathbf{P_H}$ (pela expressão fechada da área), $\mathbf{z_R}$ e sua altura em relação à base.

Dados

Muro e faixa	$H = 25.00$ **m,** $x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Formas	**meio semi-infinito ($\psi = 1$) e muro rígido ($\psi = 2$)**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Ângulos (na profundidade H = 25 m)

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{4}{25} = \mathbf{0.158655}\ \text{rad}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{12}{25} = \mathbf{0.447520}\ \text{rad}$$

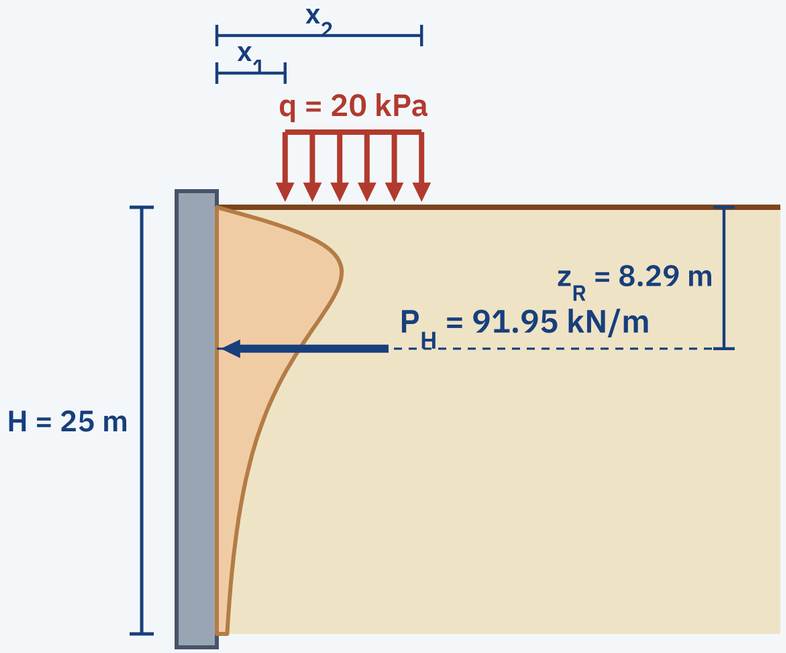
2 Meio semi-infinito (ψ = 1)

$$P_H = \frac{20}{\pi} \times 25 \times (0.447520 - 0.158655) = \mathbf{45.97}\ \text{kN/m}$$

3 Muro rígido (ψ = 2): o dobro

$$P_H = 2 \times 45.974 = \mathbf{91.95}\ \text{kN/m}$$

A resultante é de **45.97 kN/m** para o meio semi-infinito e de **91.95 kN/m** para o muro rígido; a integração numérica do módulo fornece o mesmo valor.



Solução (2/2)

SOLUÇÃO

1 Primeiro momento (expressão fechada; ψ = 1, valor de [ ] em x_2 menos o valor em x_1)

$$M = \int_0^H z\,\sigma_H\,dz = \frac{q}{\pi}\left[\frac{H^2}{2}\tan^{-1}\frac{x}{H} - \frac{x}{2}\left(H - x\tan^{-1}\frac{H}{x}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$

2 Valores numéricos (ψ = 1)

$$x_2: \quad 312.5(0.447520) - 6(25 - 12\cdot 1.12328) = 70.7259$$

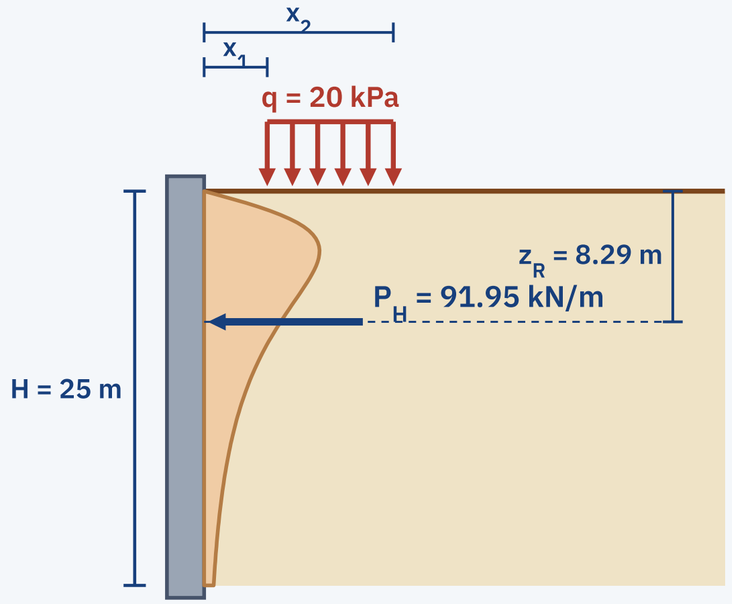
$$x_1: \quad 312.5(0.158655) - 2(25 - 4\cdot 1.41214) = 10.8769$$

$$M = \frac{20}{\pi}(70.7259 - 10.8769) = \mathbf{381.011}\ \text{kN}$$

3 Profundidade e altura acima da base

$$z_R = \frac{M}{P_H} = \frac{381.011}{45.974} = \mathbf{8.287}\ \text{m} \qquad H - z_R = \mathbf{16.71}\ \text{m}$$

A resultante está **8.29 m** abaixo da superfície e **16.71 m** acima da base; a profundidade é a mesma nos dois modos.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Muro e carga	$H = 25.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa, muro rígido (** $\psi = 2$**)**
Faixa	**largura** $b = 8.00$ **m constante;** $x_1 = 0,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 20$ **m**

PEDE-SE

P_H, z_R, a pressão máxima e sua profundidade; verificação à mão para **$x_1 = 0$**.

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

x_1 (m)	x_2 (m)	P_H (kN/m)	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
0	8	98.58	4.80	20.00	0.00
2	10	95.71	6.72	11.53	2.33
4	**12**	**91.95**	**8.29**	**8.46**	**3.81**
8	16	82.64	10.63	5.57	6.40
12	20	72.33	12.21	4.16	8.85
20	28	53.22	14.06	2.76	13.60

À medida que a faixa se afasta do muro, **a resultante diminui** (98.58 → 53.22 kN/m), **a linha de ação se aprofunda** (4.80 → 14.06 m) e o pico da pressão desce; a linha x_1 = 4 m corresponde aos Exemplos 1 e 3.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

1 Na superfície, os ângulos assumem o valor-limite (z = 0)

$$\beta = 90^\circ, \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \sin 90^\circ \cos 90^\circ\right] = \psi \frac{q}{2} = \frac{2 \times 20}{2} = \mathbf{20.00}\ \mathrm{kPa}$$

2 Resultante ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \tan^{-1}(8/25)$)

$$P_H = \frac{2 \times 20}{\pi} \times 25 \times (0.309703 - 0) = \mathbf{98.58}\ \mathrm{kN/m}$$

Uma carga em faixa que começa na face do muro **solicita diretamente** a parte superior do muro: na superfície do terreno a pressão é ψq/2 = **20.00 kPa** (10.00 kPa em meio semi-infinito), a resultante é **98.58 kN/m** e z_R = 4.80 m.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Muro e carga	$q = 20.00$ **kPa, muro rígido (**$\psi = 2$**)**
Largura	$x_1 = 4.00$ **m constante,** $b = 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 36$ **m (**$H = 25$ **m)**
Altura	$x_1 = 4$**,** $x_2 = 12$ **m;** $H = 5,\ 10,\ 25,\ 50,\ 100,\ 250$ **m**

PEDE-SE

P_H e z_R; comparação com o limite de muro profundo $\psi\, q\, b / \pi$.

Solução

SOLUÇÃO

b (m)	x_2 (m)	P_H (kN/m)	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)
2	6	**24.47**	6.12	3.32
4	8	**48.08**	6.95	5.57
8	12	**91.95**	8.29	8.46
16	20	**164.28**	10.01	11.53
36	40	**271.69**	11.82	14.63

A **faixa mais larga** transmite mais carga: P_H aumenta; z_R e o pico se aprofundam.

H (m)	P_H (kN/m)	P_H / (ψqb/π)	z_R (m)	a partir da base (m)
5	**31.91**	0.3133	3.00	2.00
10	**63.10**	0.6194	5.10	4.90
25	**91.95**	0.9027	8.29	16.71
50	**99.13**	0.9732	10.13	39.87
100	**101.16**	0.9931	11.27	88.73
250	**101.75**	0.9989	12.03	237.97

Em muro profundo, P_H tende ao valor ψqb/π = 101.86 kN/m.

O perfil de pressão não depende da altura do muro ($\sigma_{H,max}$ = 8.46 kPa, z = 3.81 m para todo H): a altura altera apenas o limite superior da integral.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Resumo

Pontos-chave

$\beta = \tan^{-1}(x_2/z) - \tan^{-1}(x_1/z)$, $\alpha = \tan^{-1}(x_1/z) + \beta/2$; $\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$; $\psi = 2$ para muro rígido, $\psi = 1$ para meio semi-infinito

Exemplo ($H = 25$ m, $x_1 = 4$, $x_2 = 12$, $q = 20$): em $z = 5$ m, $\beta = 28.720°$, $\alpha = 53.020°$, $\sigma_H = 4.0364$ kPa ($\psi = 1$) e 8.0728 kPa ($\psi = 2$)

Pressão máxima de 8.46 kPa ($\psi = 2$) à profundidade $z = 3.81$ m; nula na superfície e 0.6971 kPa na base

Resultante $P_H = \psi\,(q/\pi)\,H\,(\theta_2 - \theta_1)$ = **91.95 kN/m** ($\psi = 2$), **$z_R = 8.29$ m** abaixo da superfície (16.71 m a partir da base)

Efeitos: à medida que a faixa se afasta, P_H diminui e z_R se aprofunda; se $x_1 = 0$, na superfície tem-se $\psi q/2$; para muro muito profundo, $P_H \to \psi q b/\pi$

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; esta página segue essa referência.

California Department of Transportation. Trenching and Shoring Manual — a formulação duplicada (muro rígido) para a pressão de carga em faixa.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o próprio motor de cálculo do módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O muro inicial do módulo tem H = 25 m, x_1 = 4 m, x_2 = 12 m e q = 20 kPa.

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva o muro, a posição e a largura da carga em faixa; o módulo fornece, em cada profundidade, os valores de β, α e σ_H, o perfil de pressões, a resultante e a linha de ação, a solução passo a passo e o relatório.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.