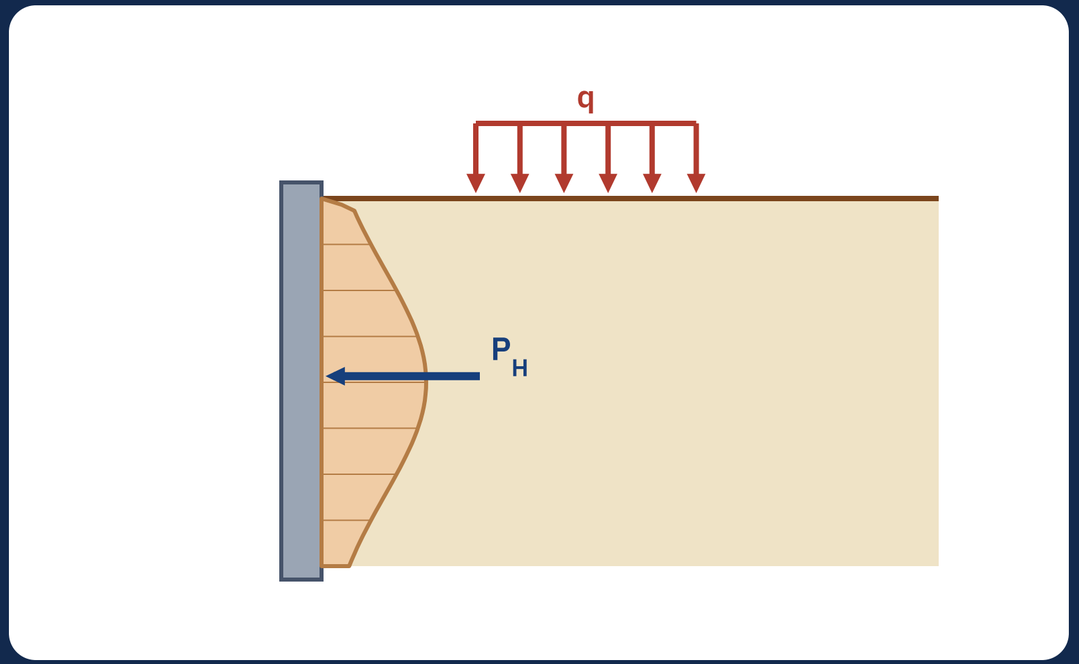
Présentation de cours de géotechnique · Surcharges

Surcharge en bande

Cours : pression latérale produite sur le mur par une longue charge en bande parallèle au mur ; profil de pression, résultante et ligne d'action, exemples de calcul.



β · α

$\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$

Mur rigide ψ = 2

P_H et z_R

Profil de pression

Introduction

Que verrons-nous dans ce cours ?

- La géométrie de la charge en bande : x_1, x_2, $b = x_2 - x_1$ et les **rayons** allant d'un point du mur aux deux bords de la bande
- Détermination de la pression à partir des angles **β** et **α** : $\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$
- La forme applicable au **mur rigide (ψ = 2)** et au **milieu semi-infini (ψ = 1)**, et les cas où chacune convient
- L'aire du diagramme de pression donne P_H, et le moment du premier ordre donne z_R ; la profondeur de la pression maximale
- Comment la **position et la largeur** de la bande et la **hauteur du mur** influent sur le résultat

DÉROULÉ DU COURS

Chaque thème est traité en **trois étapes** :

1 · **Théorie** : formule et justification

2 · **Énoncé** : données et à déterminer

3 · **Solution** : étape par étape, avec les valeurs numériques

Mur d'exemple : H = 25 m, bande entre x_1 = 4 m et x_2 = 12 m, q = 20 kPa. Les efforts sont rapportés à l'unité de longueur de mur (kN/m).

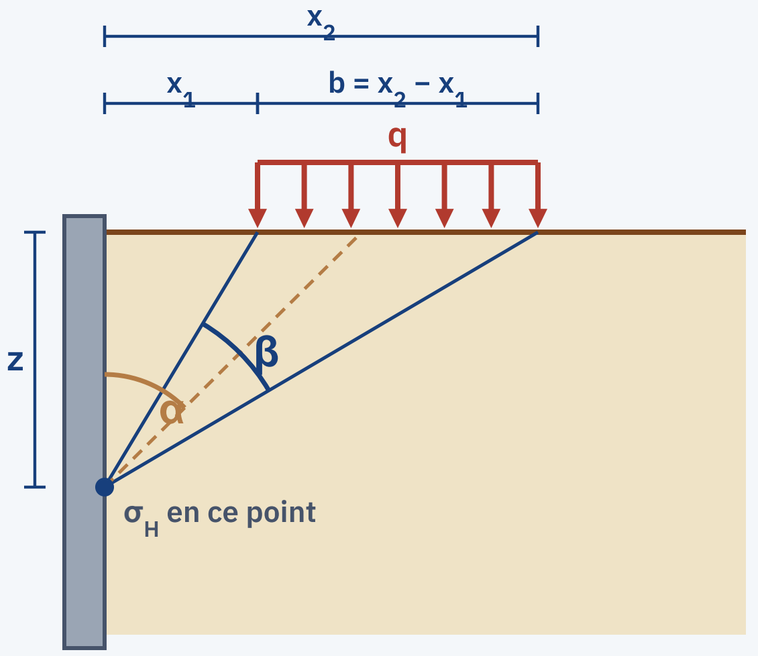
Charge en bande agissant sur le mur

THÉORIE

Entre les distances x_1 et x_2 du mur, une charge en bande uniformément répartie **q** agissant sur la surface du sol ajoute une pression horizontale au mur

La pression à la profondeur z s'obtient à partir de la géométrie des deux rayons joignant ce point du mur aux **bords proche et éloigné** de la bande

La bande est longue et parallèle au mur : tous les résultats sont **par unité de longueur du mur**



H — hauteur du mur ; **z** — profondeur à partir de la surface

x_1, x_2 — distances horizontales du mur au bord proche et au bord éloigné de la bande

$b = x_2 - x_1$ — largeur de la bande ; **q** — charge uniforme sur la bande

β, α et σ_H

THÉORIE

À la profondeur z, la bande est vue sous l'angle **β** depuis le point sur le mur ; la **bissectrice** de cet angle fait l'angle **α** avec la verticale

Les fonctions trigonométriques prennent les angles en **radians** ; les degrés ne servent qu'à la lisibilité. Dans les ratios, **z** lui-même est utilisé

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{z}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x_1}{z}\right) \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x_1}{z}\right) + \frac{\beta}{2}$$

$$\sigma_H = \psi \, \frac{q}{\pi} \left[\beta - \sin\beta \, \cos 2\alpha\right]$$

À la surface du sol (z = 0) : une bande éloignée du mur ne donne aucune pression ; si $x_1 = 0$, alors β = 90°, α = 45° et $\sigma_H = \psi q/2$

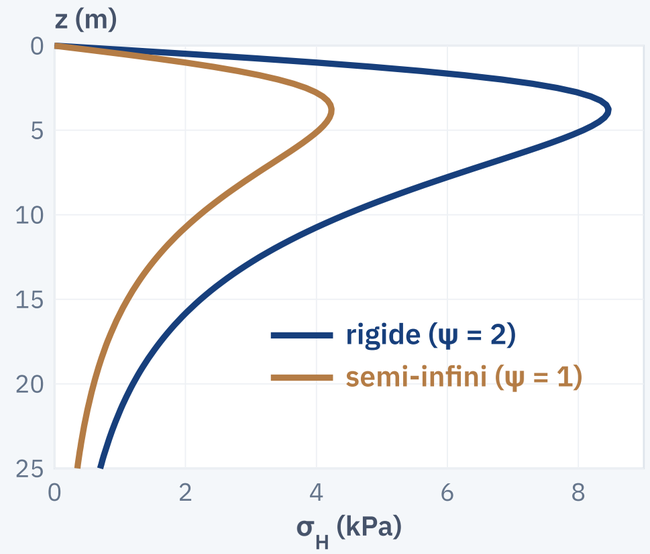
ψ = 2 et ψ = 1 : deux formes d'expression

THÉORIE

ψ = 1 (milieu semi-infini) : contrainte horizontale produite par la charge en bande dans un sol élastique, comme si le mur n'existait pas ; convient à un mur qui se déforme suffisamment pour relâcher la contrainte du sol

ψ = 2 (mur rigide) : un mur qui ne se déplace pas empêche le mouvement du sol au contact de son parement et reçoit **le double** de cette contrainte ; comme pour la charge ponctuelle, c'est la valeur par défaut du module

z (m)	β (°)	α (°)	σ_H ψ = 1 (kPa)	σ_H ψ = 2 (kPa)
0.00	0.000	90.000	0.00	0.00
2.50	20.237	68.113	3.84	7.68
5.00	28.720	53.020	4.04	8.07
7.50	29.922	43.034	3.11	6.21
10.00	28.393	35.998	2.22	4.44
15.00	23.728	26.796	1.12	2.23
20.00	19.654	21.137	0.5994	1.1988
25.00	16.551	17.366	0.3486	0.6971



Aire et moment statique du diagramme

THÉORIE

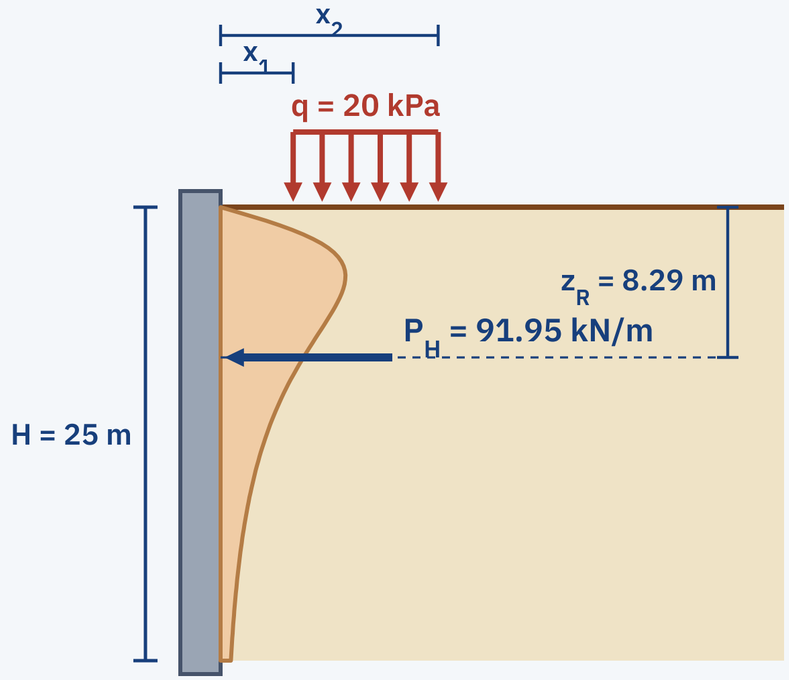
La **résultante** par unité de longueur de mur est l'**aire** sous le diagramme des pressions ; sa **profondeur à partir de la surface du sol** est le point où le moment statique du diagramme est équilibré

Le module calcule numériquement les deux intégrales à pleine précision ; l'**expression fermée de l'aire** est donnée à titre de vérification

Pour un mur très profond, P_H tend vers ψ·q·b/π

$$P_H = \int_0^H \sigma_H \, dz = \psi \, \frac{q}{\pi} \, H \, (\theta_2 - \theta_1) \qquad \theta_i = \tan^{-1}\left(\frac{x_i}{H}\right)$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z \, \sigma_H \, dz}{P_H}$$



Énoncé

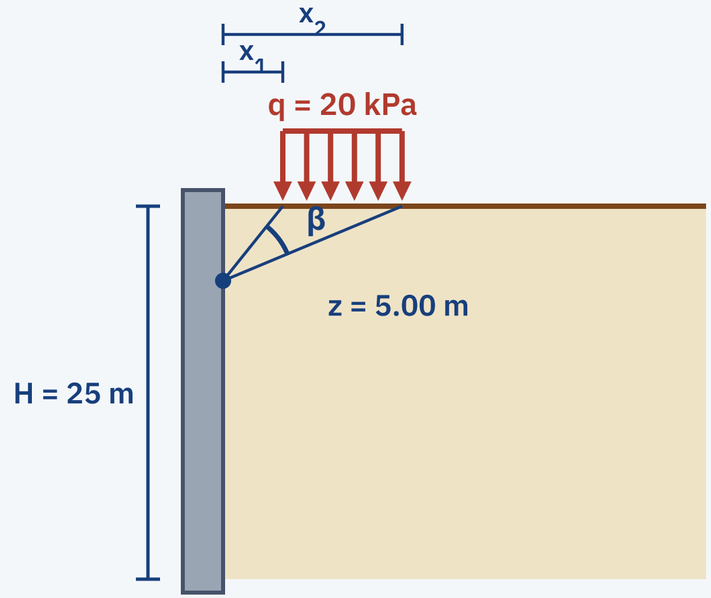
EXEMPLE

Données

Mur	$H = 25.00$ **m**
Bande	$x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Profondeur	$z = 5.00$ **m**

À DÉTERMINER

β, **α** et **σ_H** : d'abord le milieu semi-infini (ψ = 1), puis le mur rigide (ψ = 2).



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Largeur de la bande

$$b = x_2 - x_1 = 12.00 - 4.00 = \mathbf{8.00}\ \text{m}$$

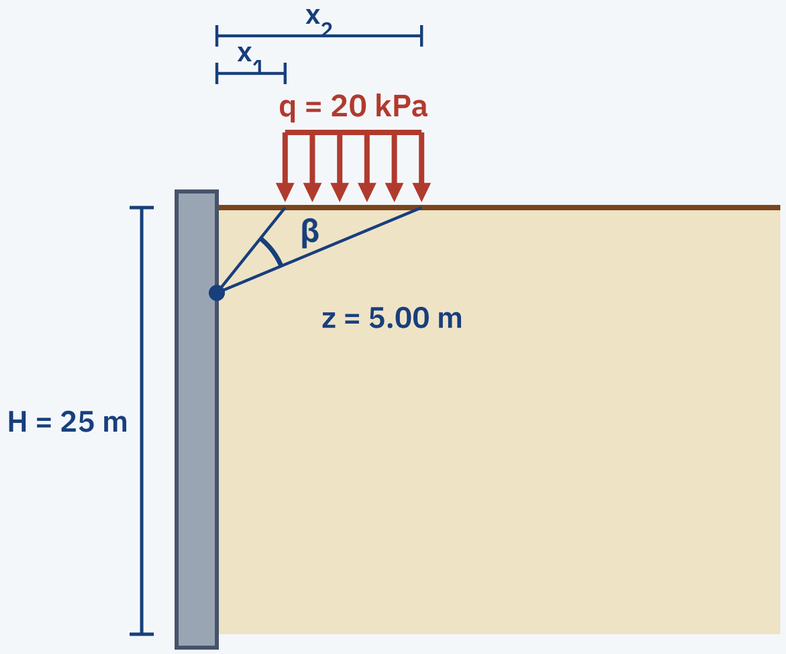
2 β : angle entre les deux rayons

$$\beta = \tan^{-1}\tfrac{12}{5} - \tan^{-1}\tfrac{4}{5} = 67.380^\circ - 38.660^\circ = \mathbf{28.720}^\circ$$

3 α : angle de la bissectrice avec la verticale

$$\alpha = \tan^{-1}\tfrac{4}{5} + \tfrac{\beta}{2} = 38.660^\circ + 14.3602^\circ = \mathbf{53.020}^\circ$$

En radians, β = **0.50126** et 2α = **1.85075** (utilisés pour σ_H à la page suivante).



Solution (2/2)

SOLUTION

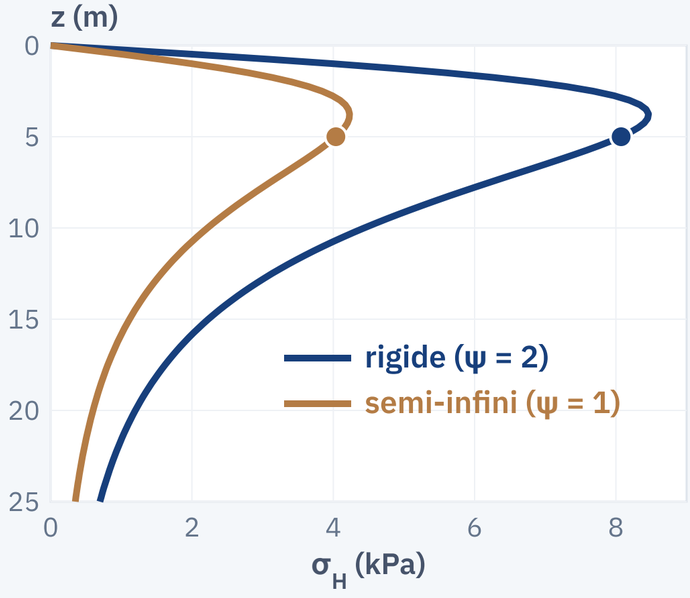
4 Milieu semi-infini (ψ = 1)

$$\sigma_H = \frac{20}{\pi}\left[0.50126 - \sin(0.50126)\cos(1.85075)\right] = \mathbf{4.0364}\ \text{kPa}$$

5 Mur rigide (ψ = 2) : le double

$$\sigma_H = 2 \times 4.0364 = \mathbf{8.0728}\ \text{kPa}$$

À z = 5 m : **4.0364 kPa** pour le massif semi-infini et **8.0728 kPa** pour le mur rigide. Les mêmes β et α servent dans les deux formes ; ψ n'est qu'un facteur d'échelle.



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

EXEMPLE

Données

Mur et bande	$H = 25.00$ **m,** $x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Profondeurs	$z = 0$ **–** 25 **m, tous les** 2.5 **m**

À DÉTERMINER

Profil de **β**, **α**, **σ_H** (deux formes) ; **pression maximale** et sa profondeur.

Solution (1/2)

SOLUTION

z (m)	β (°)	α (°)	σ_H ψ = 1 (kPa)	σ_H ψ = 2 (kPa)
0.00	0.000	90.000	0.0000	0.0000
2.50	20.237	68.113	3.8387	7.6773
5.00	**28.720**	**53.020**	**4.0364**	**8.0728**
7.50	29.922	43.034	3.1069	6.2137
10.00	28.393	35.998	2.2191	4.4382
12.50	26.086	30.788	1.5660	3.1319
15.00	23.728	26.796	1.1160	2.2319
17.50	21.564	23.657	0.8096	1.6193
20.00	19.654	21.137	0.5994	1.1988
22.50	17.992	19.077	0.4528	0.9056
25.00	16.551	17.366	0.3486	0.6971

En z = 0, il n'y a pas de pression (la bande est éloignée du mur) ; la pression augmente avec la profondeur, atteint son maximum en **z ≈ 3.81 m**, puis diminue. La ligne z = 5.00 m correspond à l'Exemple 1. À la base (z = 25 m), il reste 0.6971 kPa pour ψ = 2.

Solution (2/2)

SOLUTION

1 Profondeur du sommet : condition $d\sigma_H/dz = 0$

$$\frac{x_1^3}{(x_1^2+z^2)^2} = \frac{x_2^3}{(x_2^2+z^2)^2} \Rightarrow z^2 = \frac{(x_1x_2)^{3/2}\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)}{x_2^{3/2}-x_1^{3/2}}$$

$$z^2 = 14.504 \Rightarrow z = \mathbf{3.8084}\ \mathrm{m}$$

2 Angles à cette profondeur

$$\beta = \tan^{-1}\frac{12}{3.8084} - \tan^{-1}\frac{4}{3.8084} = \mathbf{25.99}^\circ \qquad \alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3.8084} + \frac{\beta}{2} = \mathbf{59.40}^\circ$$

3 Pression maximale

$$\sigma_{H,max} = \frac{20}{\pi}[0.45355 - \sin(0.45355)\cos(2.07341)] = \mathbf{4.23}\ (\psi = 1);\ \ \mathbf{8.46}\ \mathrm{kPa}\ (\psi = 2)$$

Au maximum, en z = **3.81 m** : **8.46 kPa** (ψ = 2), **4.23 kPa** (ψ = 1) ; la profondeur ne dépend que de x_1, x_2.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

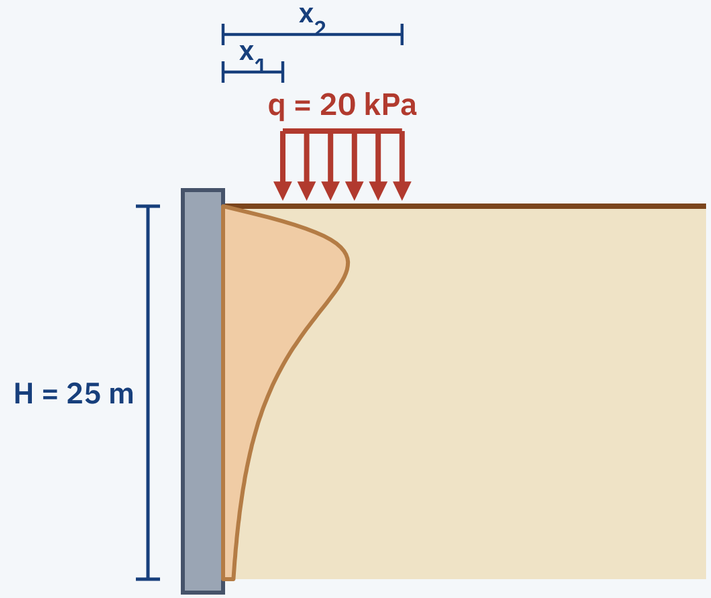
EXEMPLE

À DÉTERMINER

$\mathbf{P_H}$ (par l'expression analytique de l'aire), $\mathbf{z_R}$ et sa hauteur au-dessus de la base.

Données

Mur et bande	$H = 25.00$ **m,** $x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Formes	**milieu semi-infini ($\psi = 1$) et mur rigide ($\psi = 2$)**



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Angles (à la profondeur H = 25 m)

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{4}{25} = \mathbf{0.158655}\ \text{rad}$$
$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{12}{25} = \mathbf{0.447520}\ \text{rad}$$

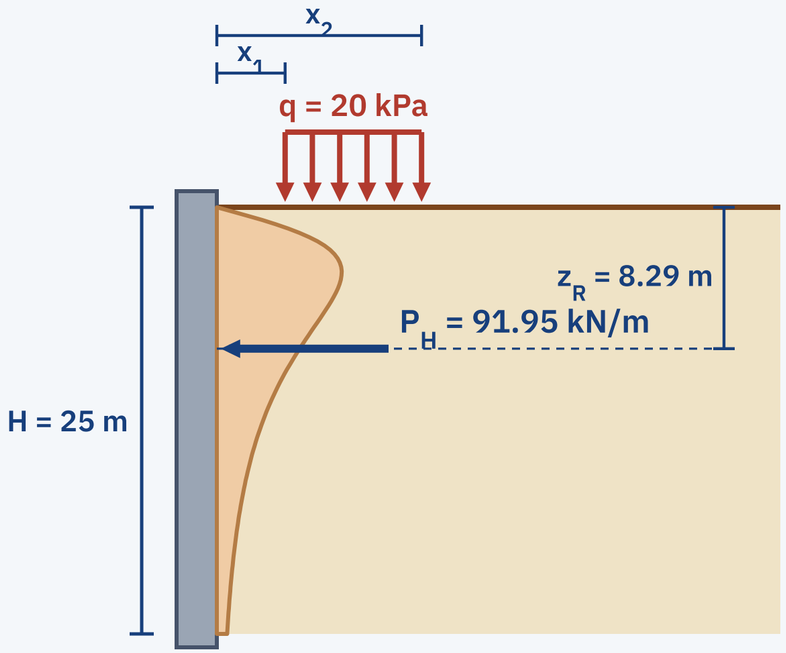
2 Milieu semi-infini (ψ = 1)

$$P_H = \frac{20}{\pi} \times 25 \times (0.447520 - 0.158655) = \mathbf{45.97}\ \text{kN/m}$$

3 Mur rigide (ψ = 2) : le double

$$P_H = 2 \times 45.974 = \mathbf{91.95}\ \text{kN/m}$$

La résultante est de **45.97 kN/m** en milieu semi-infini et de **91.95 kN/m** pour un mur rigide ; l'intégration numérique du module donne la même valeur.



Solution (2/2)

SOLUTION

1 Premier moment (forme fermée ; ψ = 1, l'expression entre [ ] pour x_2 moins celle pour x_1)

$$M = \int_0^H z\,\sigma_H\,dz = \frac{q}{\pi}\left[\frac{H^2}{2}\tan^{-1}\frac{x}{H} - \frac{x}{2}\left(H - x\tan^{-1}\frac{H}{x}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$

2 Valeurs numériques (ψ = 1)

$$x_2: \quad 312.5(0.447520) - 6(25 - 12\cdot 1.12328) = 70.7259$$

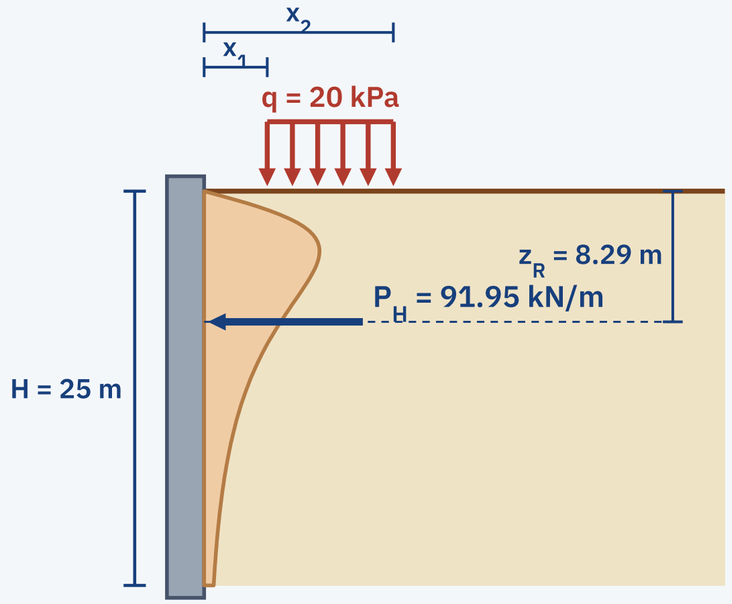
$$x_1: \quad 312.5(0.158655) - 2(25 - 4\cdot 1.41214) = 10.8769$$

$$M = \frac{20}{\pi}(70.7259 - 10.8769) = \mathbf{381.011}\ \text{kN}$$

3 Profondeur et hauteur au-dessus de la base

$$z_R = \frac{M}{P_H} = \frac{381.011}{45.974} = \mathbf{8.287}\ \text{m} \qquad H - z_R = \mathbf{16.71}\ \text{m}$$

La résultante se situe à **8.29 m** sous la surface et à **16.71 m** au-dessus de la base ; la profondeur est la même dans les deux formulations.



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

EXEMPLE

Données

Mur et charge	$H = 25.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa, mur rigide (** $\psi = 2$**)**
Bande	**largeur** $b = 8.00$ **m constante ;** $x_1 = 0,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 20$ **m**

À DÉTERMINER

P_H, z_R, pression maximale et sa profondeur ; vérification à la main pour $x_1 = 0$.

Solution (1/2)

SOLUTION

x_1 (m)	x_2 (m)	P_H (kN/m)	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
0	8	98.58	4.80	20.00	0.00
2	10	95.71	6.72	11.53	2.33
4	**12**	**91.95**	**8.29**	**8.46**	**3.81**
8	16	82.64	10.63	5.57	6.40
12	20	72.33	12.21	4.16	8.85
20	28	53.22	14.06	2.76	13.60

Lorsque la charge en bande s'éloigne du mur, **la résultante diminue** (98.58 → 53.22 kN/m), **la ligne d'action s'approfondit** (4.80 → 14.06 m) et le pic de pression descend ; la ligne x_1 = 4 m correspond aux Exemples 1 et 3.

Solution (2/2)

SOLUTION

1 À la surface, les angles prennent leur valeur limite (z = 0)

$$\beta = 90^\circ, \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \sin 90^\circ \cos 90^\circ\right] = \psi \frac{q}{2} = \frac{2 \times 20}{2} = \mathbf{20.00}\ \mathrm{kPa}$$

2 Résultante ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \tan^{-1}(8/25)$)

$$P_H = \frac{2 \times 20}{\pi} \times 25 \times (0.309703 - 0) = \mathbf{98.58}\ \mathrm{kN/m}$$

La bande démarrant au contact du mur **charge directement** la partie supérieure du mur : à la surface du sol, la pression vaut ψq/2 = **20.00 kPa** (10.00 kPa dans un milieu semi-infini), la résultante est de **98.58 kN/m** et z_R = 4.80 m.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

EXEMPLE

Données

Mur et charge	$q = 20.00$ **kPa, mur rigide (**$\psi = 2$**)**
Largeur	$x_1 = 4.00$ **m constant,** $b = 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 36$ **m (**$H = 25$ **m)**
Hauteur	$x_1 = 4$**,** $x_2 = 12$ **m;** $H = 5,\ 10,\ 25,\ 50,\ 100,\ 250$ **m**

À DÉTERMINER

P_H et z_R ; comparaison avec la limite du mur profond **ψ q b / π**.

Solution

SOLUTION

b (m)	x_2 (m)	P_H (kN/m)	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)
2	6	**24.47**	6.12	3.32
4	8	**48.08**	6.95	5.57
8	12	**91.95**	8.29	8.46
16	20	**164.28**	10.01	11.53
36	40	**271.69**	11.82	14.63

Une **bande plus large** transmet plus de charge : P_H augmente, z_R et le pic s'approfondissent.

H (m)	P_H (kN/m)	P_H / (ψqb/π)	z_R (m)	à partir de la base (m)
5	**31.91**	0.3133	3.00	2.00
10	**63.10**	0.6194	5.10	4.90
25	**91.95**	0.9027	8.29	16.71
50	**99.13**	0.9732	10.13	39.87
100	**101.16**	0.9931	11.27	88.73
250	**101.75**	0.9989	12.03	237.97

Dans un mur profond, P_H tend vers la valeur ψqb/π = 101.86 kN/m.

Le profil de pression ne dépend pas de la hauteur du mur ($\sigma_{H,max}$ = 8.46 kPa, z = 3.81 m quel que soit H) : la hauteur ne modifie que la borne supérieure de l'intégrale.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Synthèse

Points à retenir

$\beta = \tan^{-1}(x_2/z) - \tan^{-1}(x_1/z)$, $\alpha = \tan^{-1}(x_1/z) + \beta/2$; $\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$; $\psi = 2$ mur rigide, $\psi = 1$ milieu semi-infini

Exemple ($H = 25$ m, $x_1 = 4$, $x_2 = 12$, $q = 20$) : à $z = 5$ m, $\beta = 28.720°$, $\alpha = 53.020°$, $\sigma_H = 4.0364$ kPa ($\psi = 1$) et 8.0728 kPa ($\psi = 2$)

Pression maximale 8.46 kPa ($\psi = 2$) à la profondeur $z = 3.81$ m ; nulle en surface, 0.6971 kPa à la base

Résultante $P_H = \psi\,(q/\pi)\,H\,(\theta_2 - \theta_1)$ = **91.95 kN/m** ($\psi = 2$), **$z_R = 8.29$ m** sous la surface (16.71 m depuis la base)

Effets : lorsque la bande s'éloigne, P_H diminue et z_R s'abaisse ; si $x_1 = 0$, la pression en surface vaut $\psi q/2$; pour un mur très profond, $P_H \to \psi q b/\pi$

Références bibliographiques

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning ; la présente page s’y conforme.

California Department of Transportation. Trenching and Shoring Manual — forme du mur rigide (doublée) de la pression due à la charge en bande.

REMARQUE

Tous les exemples numériques ont été produits avec le moteur de calcul propre au module ; le module donne les mêmes valeurs. Le mur proposé à l'ouverture du module a pour caractéristiques H = 25 m, x_1 = 4 m, x_2 = 12 m et q = 20 kPa.

GeoTerva

Calculs géotechniques en ligne

De la théorie à la pratique

Saisir dans GeoTerva le mur, la position et la largeur de la charge en bande ; le module fournit ensemble les valeurs β, α, σ_H à chaque profondeur, le profil de pression, la résultante et la ligne d'action, la solution pas à pas et le rapport.

Ouvrir le module → | **Page de théorie →**

Ouvrir sur smartphone
Les modules d'essai ne nécessitent pas d'inscription.

Si vous souhaitez les utiliser dans vos cours : info@geoterva.com