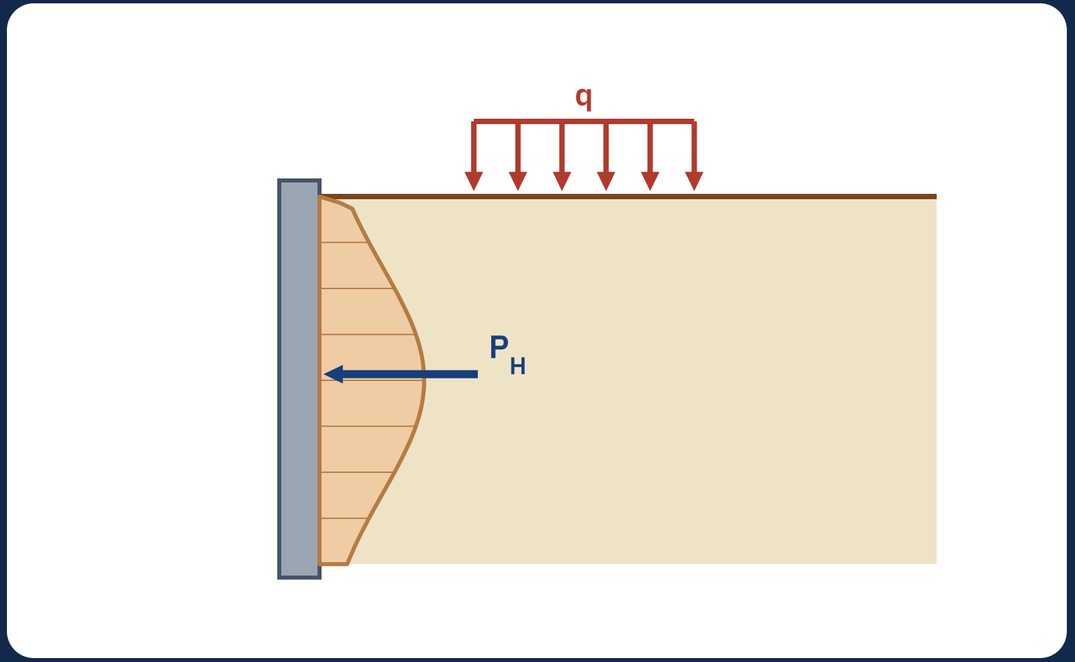
Presentación de clase de geotecnia · Sobrecargas

Sobrecarga en franja

Clase: presión lateral que produce sobre el muro una sobrecarga en franja larga, paralela al muro; perfil de presiones, resultante y línea de acción, ejemplos resueltos.

- $\beta \cdot \alpha$
- $\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$
- Muro rígido $\psi = 2$
- P_H y z_R
- Perfil de presiones



Introducción

¿Qué aprenderemos en esta clase?

- La geometría de la carga en franja: x_1, x_2, $b = x_2 - x_1$ y los **rayos** desde un punto del muro hasta los dos bordes de la franja
- La obtención de la presión a partir de los ángulos **β** y **α**: $\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$
- La forma del **muro rígido (ψ = 2)** y la del **medio semiinfinito (ψ = 1)**, y cuándo es adecuada cada una
- El área del diagrama de presiones da P_H y, a partir del primer momento, z_R; la profundidad de la presión máxima
- Cómo influyen en el resultado **la posición y el ancho** de la franja y **la altura del muro**

DESARROLLO DE LA CLASE

Cada tema se desarrolla en **tres pasos**:

1 · **Teoría**: fórmula y su justificación

2 · **Enunciado**: datos y se pide

3 · **Solución**: paso a paso, con números

Muro de ejemplo: H = 25 m, franja entre x_1 = 4 m y x_2 = 12 m, q = 20 kPa. Las fuerzas se refieren a la unidad de longitud del muro (kN/m).

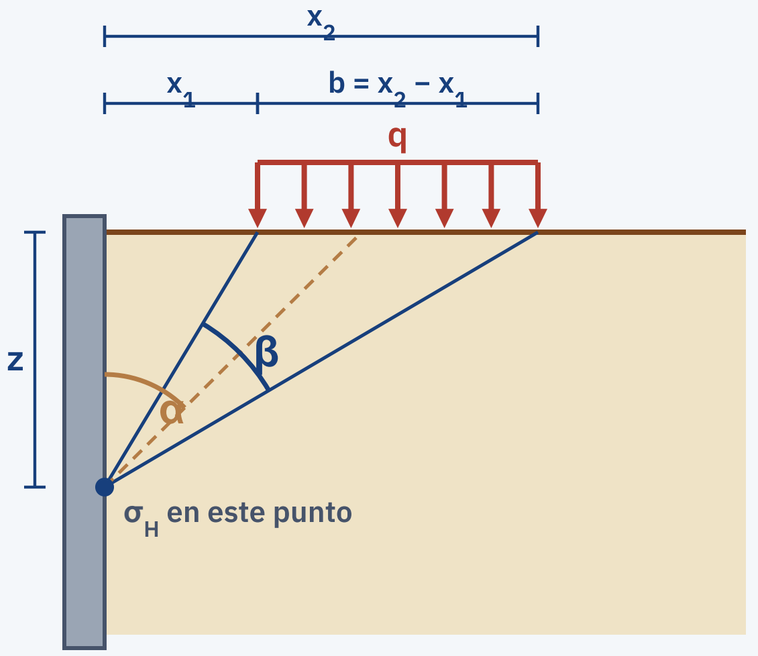
Carga en franja que actúa sobre el muro

TEORÍA

Entre las distancias x_1 y x_2 al muro, una carga en franja **q** uniformemente distribuida que actúa sobre la superficie del terreno añade una presión horizontal al muro

La presión a la profundidad z se obtiene de la geometría de los dos rayos que unen ese punto del muro con los bordes **cercano y lejano** de la franja

La franja es larga y paralela al muro: todos los resultados son **por unidad de longitud de muro**



H — altura del muro; **z** — profundidad desde la superficie

x_1, x_2 — distancia horizontal desde el muro hasta el borde cercano y el lejano de la franja

$b = x_2 - x_1$ — ancho de la franja; **q** — carga uniforme sobre la franja

β, α y σ_H

TEORÍA

A la profundidad z, la franja subtiende en el punto del muro el ángulo **β**; la **bisectriz** de este ángulo forma con la vertical el ángulo **α**

Las funciones trigonométricas toman los ángulos en **radianes**; los grados son solo para facilitar la lectura. En las razones se usa el propio valor de **z**

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{z}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x_1}{z}\right) \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x_1}{z}\right) + \frac{\beta}{2}$$

$$\sigma_H = \psi \, \frac{q}{\pi} \left[\beta - \sin\beta \, \cos 2\alpha\right]$$

En la superficie del terreno (z = 0): una franja alejada del muro no produce presión; si $x_1 = 0$, β = 90°, α = 45° y $\sigma_H = \psi q/2$

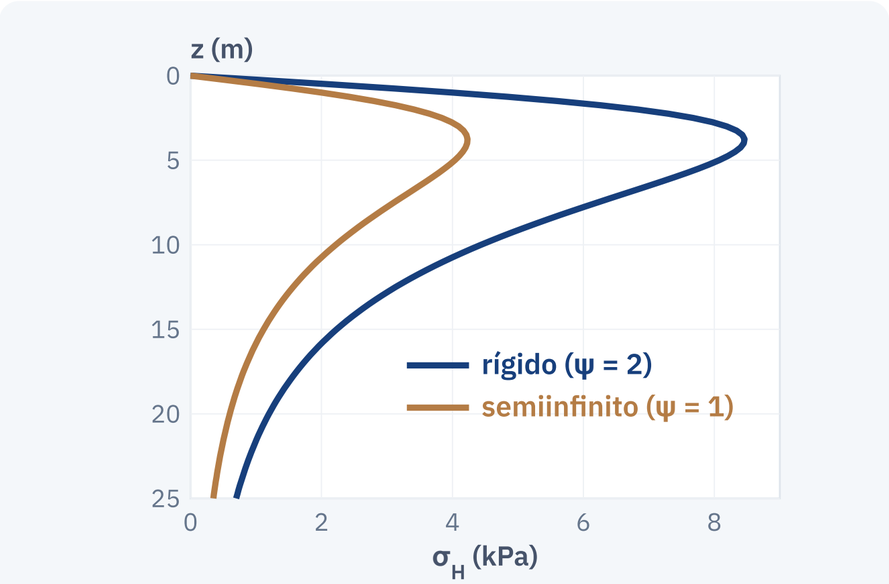
ψ = 2 y ψ = 1: dos formas de expresión

TEORÍA

ψ = 1 (medio semiinfinito): tensión horizontal que produce la carga en franja en un suelo elástico como si no existiera el muro; adecuado para un muro que se deforma lo suficiente como para aliviar la tensión del terreno

ψ = 2 (muro rígido): el muro que no se desplaza impide el movimiento del terreno en su cara y recibe el **doble** de esta tensión; al igual que en la carga puntual, es el valor predeterminado del módulo

z (m)	β (°)	α (°)	σ_H ψ = 1 (kPa)	σ_H ψ = 2 (kPa)
0.00	0.000	90.000	0.00	0.00
2.50	20.237	68.113	3.84	7.68
5.00	28.720	53.020	4.04	8.07
7.50	29.922	43.034	3.11	6.21
10.00	28.393	35.998	2.22	4.44
15.00	23.728	26.796	1.12	2.23
20.00	19.654	21.137	0.5994	1.1988
25.00	16.551	17.366	0.3486	0.6971



Área del diagrama y su primer momento

TEORÍA

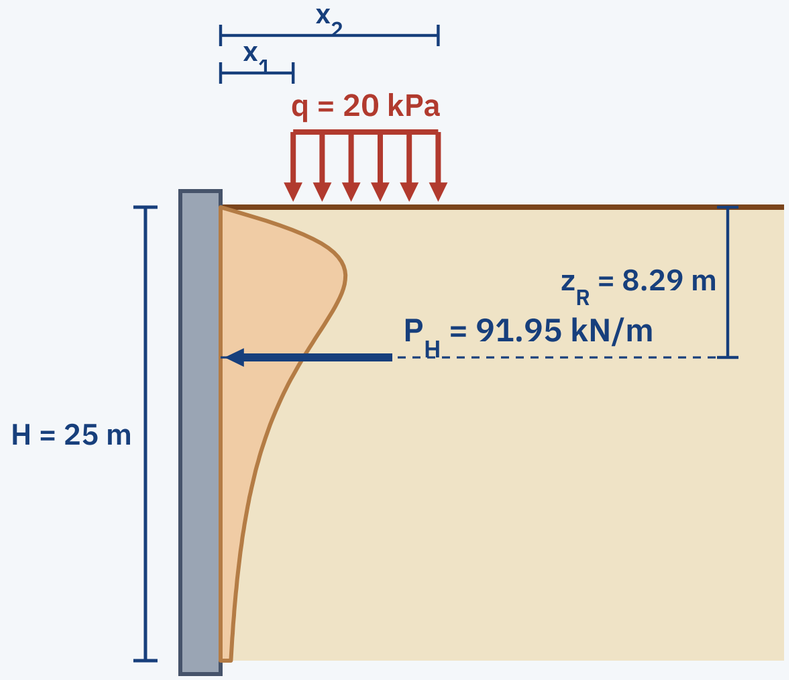
La **resultante** de la presión por unidad de longitud de muro es el **área** bajo el diagrama de presiones; su **profundidad respecto a la superficie del terreno** es el punto en que se equilibra el primer momento del diagrama

El módulo calcula numéricamente ambas integrales con plena precisión; la **expresión cerrada del área** se ofrece como comprobación

En un muro muy profundo, P_H tiende a ψ·q·b/π

$$P_H = \int_0^H \sigma_H \, dz = \psi \, \frac{q}{\pi} \, H \, (\theta_2 - \theta_1) \qquad \theta_i = \tan^{-1}\left(\frac{x_i}{H}\right)$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z \, \sigma_H \, dz}{P_H}$$



Enunciado

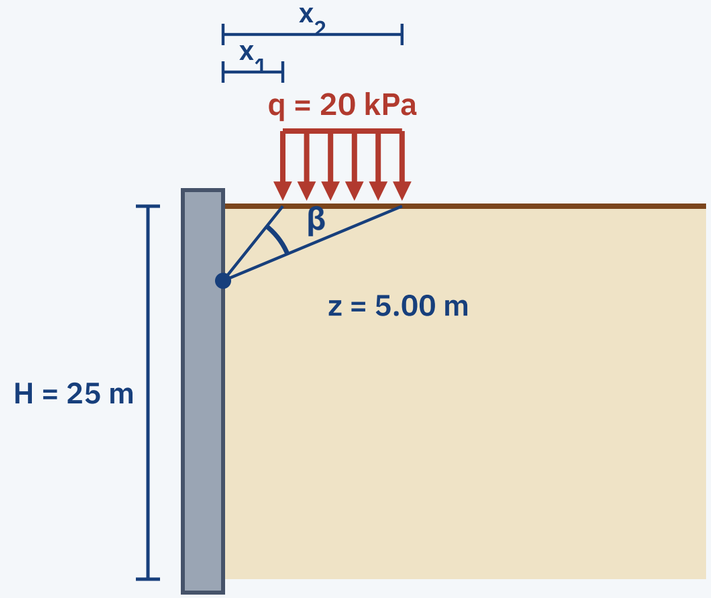
EJEMPLO

SE PIDE

β, **α** y **σ_H**: primero medio semiinfinito (ψ = 1) y después muro rígido (ψ = 2).

Datos

Muro	$H = 25.00$ **m**
Franja	$x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Profundidad	$z = 5.00$ **m**



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 Ancho de la franja

$$b = x_2 - x_1 = 12.00 - 4.00 = \mathbf{8.00}\ \text{m}$$

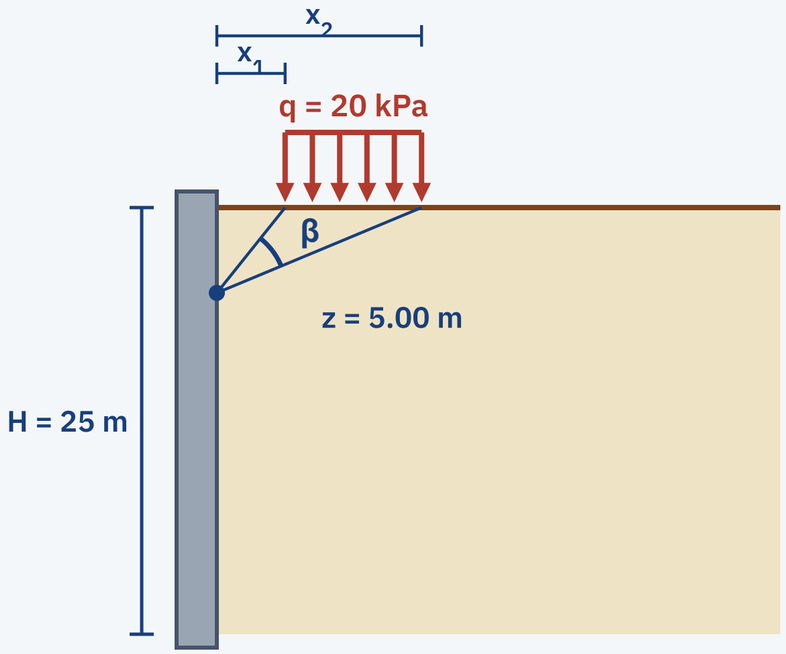
2 β: ángulo entre los dos rayos

$$\beta = \tan^{-1}\tfrac{12}{5} - \tan^{-1}\tfrac{4}{5} = 67.380^\circ - 38.660^\circ = \mathbf{28.720}^\circ$$

3 α: ángulo de la bisectriz con la vertical

$$\alpha = \tan^{-1}\tfrac{4}{5} + \tfrac{\beta}{2} = 38.660^\circ + 14.3602^\circ = \mathbf{53.020}^\circ$$

En radianes, β = **0.50126** y 2α = **1.85075** (se utilizan para σ_H en la página siguiente).



Solución (2/2)

SOLUCIÓN

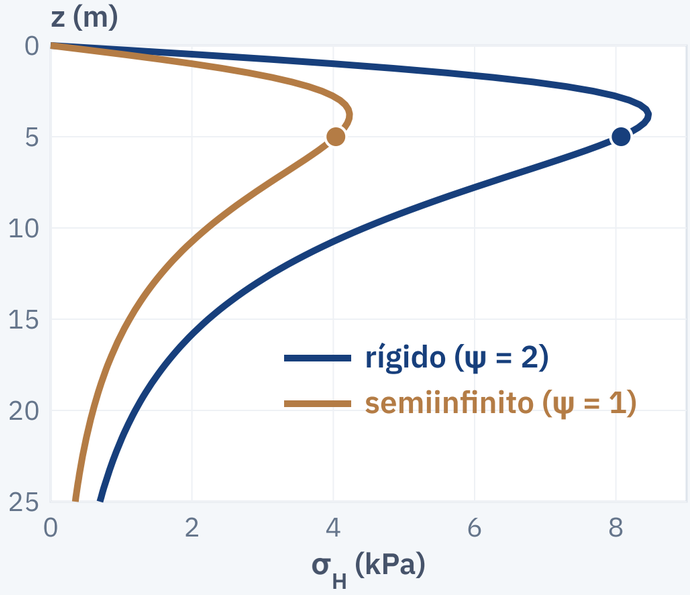
4 Medio semiinfinito (ψ = 1)

$$\sigma_H = \frac{20}{\pi}\left[0.50126 - \sin(0.50126)\cos(1.85075)\right] = \mathbf{4.0364}\ \text{kPa}$$

5 Muro rígido (ψ = 2): el doble

$$\sigma_H = 2 \times 4.0364 = \mathbf{8.0728}\ \text{kPa}$$

A z = 5 m, **4.0364 kPa** para el medio semiinfinito y **8.0728 kPa** para el muro rígido. Los mismos β y α se utilizan en ambas formas; ψ es solo un factor de escala.



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

EJEMPLO

Datos

Muro y franja	$H = 25.00$ **m,** $x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Profundidades	$z = 0$ **–** 25 **m, cada** 2.5 **m**

SE PIDE

Perfil de **β**, **α**, **σ_H** (dos formas); la **presión máxima** y su profundidad.

Solución (1/2)

SOLUCIÓN

z (m)	β (°)	α (°)	σ_H ψ = 1 (kPa)	σ_H ψ = 2 (kPa)
0.00	0.000	90.000	0.0000	0.0000
2.50	20.237	68.113	3.8387	7.6773
5.00	**28.720**	**53.020**	**4.0364**	**8.0728**
7.50	29.922	43.034	3.1069	6.2137
10.00	28.393	35.998	2.2191	4.4382
12.50	26.086	30.788	1.5660	3.1319
15.00	23.728	26.796	1.1160	2.2319
17.50	21.564	23.657	0.8096	1.6193
20.00	19.654	21.137	0.5994	1.1988
22.50	17.992	19.077	0.4528	0.9056
25.00	16.551	17.366	0.3486	0.6971

En z = 0 no hay presión (la franja está lejos del muro); la presión aumenta con la profundidad, alcanza su máximo en **z ≈ 3.81 m** y después disminuye. La fila z = 5.00 m corresponde al Ejemplo 1. En la base (z = 25 m) quedan 0.6971 kPa para ψ = 2.

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

1 Profundidad de la cresta: condición $d\sigma_H/dz = 0$

$$\frac{x_1^3}{(x_1^2+z^2)^2} = \frac{x_2^3}{(x_2^2+z^2)^2} \;\Rightarrow\; z^2 = \frac{(x_1x_2)^{3/2}\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)}{x_2^{3/2}-x_1^{3/2}}$$

$$z^2 = 14.504 \;\Rightarrow\; z = \mathbf{3.8084}\ \mathrm{m}$$

2 Ángulos a esta profundidad

$$\beta = \tan^{-1}\frac{12}{3.8084} - \tan^{-1}\frac{4}{3.8084} = \mathbf{25.99}^\circ \qquad \alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3.8084} + \frac{\beta}{2} = \mathbf{59.40}^\circ$$

3 Presión máxima

$$\sigma_{H,max} = \frac{20}{\pi}\left[0.45355 - \sin(0.45355)\cos(2.07341)\right] = \mathbf{4.23}\ (\psi = 1);\quad \mathbf{8.46}\ \mathrm{kPa}\ (\psi = 2)$$

En el máximo, z = **3.81 m**: **8.46 kPa** (ψ = 2), **4.23 kPa** (ψ = 1); la profundidad depende solo de x_1 y x_2.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

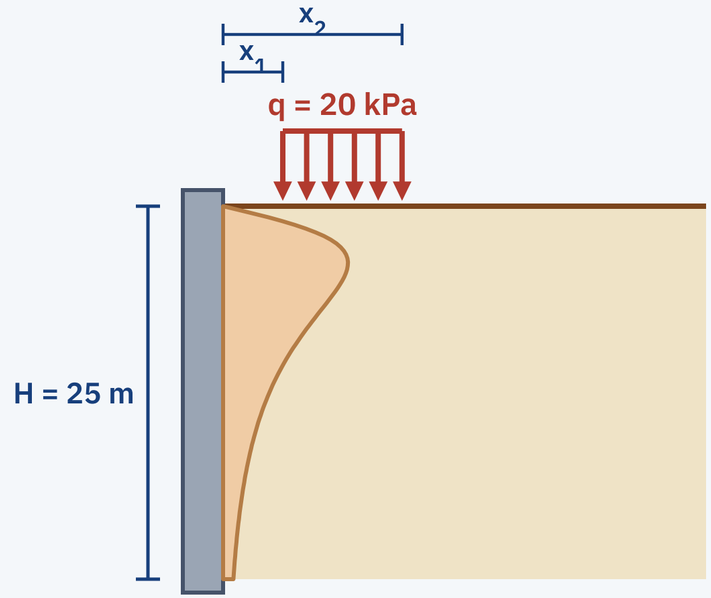
EJEMPLO

SE PIDE

$\mathbf{P_H}$ (con la expresión cerrada del área), $\mathbf{z_R}$ y su altura sobre la base.

Datos

Muro y franja	$H = 25.00$ **m,** $x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Formas	**medio semiinfinito ($\psi = 1$) y muro rígido ($\psi = 2$)**



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 Ángulos (a la profundidad H = 25 m)

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{4}{25} = \mathbf{0.158655}\ \text{rad}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{12}{25} = \mathbf{0.447520}\ \text{rad}$$

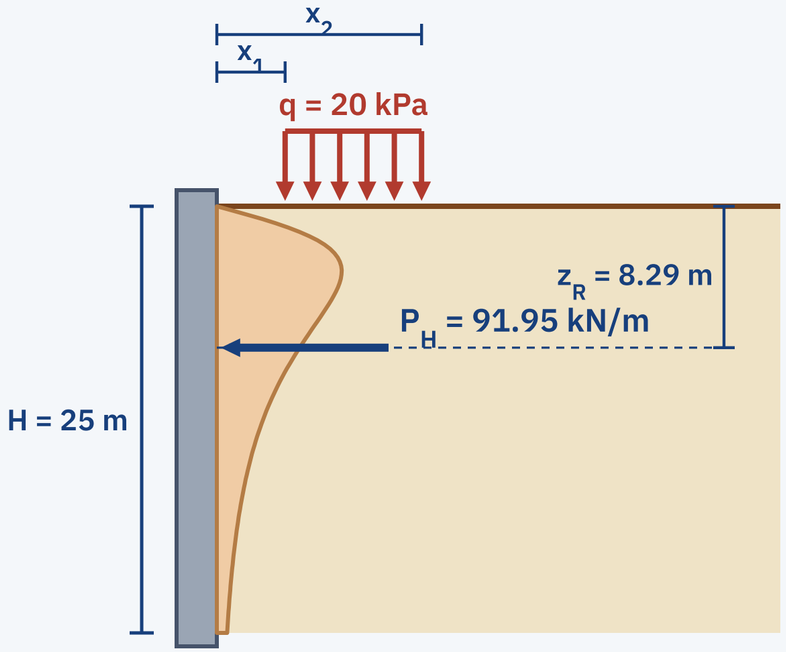
2 Medio semiinfinito (ψ = 1)

$$P_H = \frac{20}{\pi} \times 25 \times (0.447520 - 0.158655) = \mathbf{45.97}\ \text{kN/m}$$

3 Muro rígido (ψ = 2): el doble

$$P_H = 2 \times 45.974 = \mathbf{91.95}\ \text{kN/m}$$

La resultante es de **45.97 kN/m** para el medio semiinfinito y de **91.95 kN/m** para el muro rígido; la integración numérica del módulo da el mismo valor.



Solución (2/2)

SOLUCIÓN

1 Primer momento (forma cerrada; ψ = 1, el contenido de [ ] para x_2 menos el de x_1)

$$M = \int_0^H z\,\sigma_H\,dz = \frac{q}{\pi}\left[\frac{H^2}{2}\tan^{-1}\frac{x}{H} - \frac{x}{2}\left(H - x\tan^{-1}\frac{H}{x}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$

2 Valores numéricos (ψ = 1)

$$x_2: \quad 312.5(0.447520) - 6(25 - 12\cdot 1.12328) = 70.7259$$

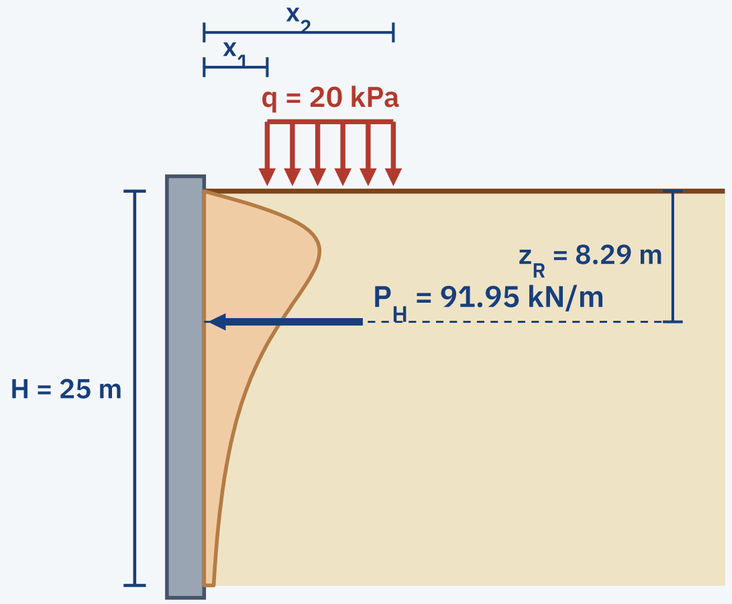
$$x_1: \quad 312.5(0.158655) - 2(25 - 4\cdot 1.41214) = 10.8769$$

$$M = \frac{20}{\pi}(70.7259 - 10.8769) = \mathbf{381.011}\ \text{kN}$$

3 Profundidad y altura sobre la base

$$z_R = \frac{M}{P_H} = \frac{381.011}{45.974} = \mathbf{8.287}\ \text{m} \qquad H - z_R = \mathbf{16.71}\ \text{m}$$

La resultante se encuentra **8.29 m** por debajo de la superficie y **16.71 m** por encima de la base; la profundidad es la misma de ambas formas.



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

EJEMPLO

Datos

Muro y carga	$H = 25.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa, muro rígido (** $\psi = 2$**)**
Franja	**ancho** $b = 8.00$ **m constante;** $x_1 = 0,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 20$ **m**

SE PIDE

P_H, z_R, presión máxima y su profundidad; comprobación a mano para $x_1 = 0$.

Solución (1/2)

SOLUCIÓN

x_1 (m)	x_2 (m)	P_H (kN/m)	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
0	8	98.58	4.80	20.00	0.00
2	10	95.71	6.72	11.53	2.33
4	**12**	**91.95**	**8.29**	**8.46**	**3.81**
8	16	82.64	10.63	5.57	6.40
12	20	72.33	12.21	4.16	8.85
20	28	53.22	14.06	2.76	13.60

Al alejarse la franja del muro, **la resultante disminuye** (98.58 → 53.22 kN/m), **la línea de acción se profundiza** (4.80 → 14.06 m) y el máximo de presión desciende; la fila x_1 = 4 m corresponde a los Ejemplos 1 y 3.

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

1 En la superficie los ángulos toman su valor límite (z = 0)

$$\beta = 90^\circ, \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \sin 90^\circ \cos 90^\circ\right] = \psi \frac{q}{2} = \frac{2 \times 20}{2} = \mathbf{20.00}\ \mathrm{kPa}$$

2 Resultante ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \tan^{-1}(8/25)$)

$$P_H = \frac{2 \times 20}{\pi} \times 25 \times (0.309703 - 0) = \mathbf{98.58}\ \mathrm{kN/m}$$

Una franja que comienza en la cara del muro **carga directamente** la parte superior del muro: en la superficie del terreno la presión es ψq/2 = **20.00 kPa** (10.00 kPa en un medio semiinfinito), la resultante es **98.58 kN/m** y z_R = 4.80 m.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

EJEMPLO

Datos

Muro y carga	$q = 20.00$ **kPa, muro rígido** ($\psi = 2$)
Ancho	$x_1 = 4.00$ **m constante,** $b = 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 36$ **m** ($H = 25$ **m**)
Altura	$x_1 = 4$, $x_2 = 12$ **m;** $H = 5,\ 10,\ 25,\ 50,\ 100,\ 250$ **m**

SE PIDE

P_H y z_R; comparación con el límite de muro profundo $\psi\, q\, b / \pi$.

Solución

SOLUCIÓN

b (m)	x_2 (m)	P_H (kN/m)	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)
2	6	**24.47**	6.12	3.32
4	8	**48.08**	6.95	5.57
8	12	**91.95**	8.29	8.46
16	20	**164.28**	10.01	11.53
36	40	**271.69**	11.82	14.63

Una **franja más ancha** transmite más carga: P_H aumenta, y z_R y el pico se profundizan.

H (m)	P_H (kN/m)	P_H / (ψqb/π)	z_R (m)	desde la base (m)
5	**31.91**	0.3133	3.00	2.00
10	**63.10**	0.6194	5.10	4.90
25	**91.95**	0.9027	8.29	16.71
50	**99.13**	0.9732	10.13	39.87
100	**101.16**	0.9931	11.27	88.73
250	**101.75**	0.9989	12.03	237.97

En un muro profundo, P_H tiende al valor ψqb/π = 101.86 kN/m.

El perfil de presiones no depende de la altura del muro ($\sigma_{H,max}$ = 8.46 kPa, z = 3.81 m para cualquier H): la altura solo modifica el límite superior de la integral.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Resumen

Puntos clave

$\beta = \tan^{-1}(x_2/z) - \tan^{-1}(x_1/z)$, $\alpha = \tan^{-1}(x_1/z) + \beta/2$; $\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$; $\psi = 2$ muro rígido, $\psi = 1$ medio semiinfinito

Ejemplo ($H = 25$ m, $x_1 = 4$, $x_2 = 12$, $q = 20$): en $z = 5$ m, $\beta = 28.720°$, $\alpha = 53.020°$, $\sigma_H = 4.0364$ kPa ($\psi = 1$) y 8.0728 kPa ($\psi = 2$)

La **presión máxima** es de 8.46 kPa ($\psi = 2$) a la profundidad $z = 3.81$ m; nula en la superficie, 0.6971 kPa en la base

Resultante $P_H = \psi\,(q/\pi)\,H\,(\theta_2 - \theta_1)$ = **91.95 kN/m** ($\psi = 2$), **$z_R = 8.29$ m** bajo la superficie (a 16.71 m de la base)

Efectos: al alejarse la franja, P_H disminuye y z_R se hace más profunda; si $x_1 = 0$, en la superficie vale $\psi q/2$; en un muro muy profundo, $P_H \to \psi q b/\pi$

Referencias bibliográficas

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; esta página se basa en esta obra.

California Department of Transportation. Trenching and Shoring Manual — la forma de muro rígido (duplicada) de la presión de la carga en franja.

NOTA

Todos los ejemplos numéricos se han obtenido con el propio motor de cálculo del módulo; el módulo da los mismos valores. El muro con el que se abre el módulo tiene H = 25 m, x_1 = 4 m, x_2 = 12 m y q = 20 kPa.

GeoTerva

Cálculos geotécnicos en línea

De la teoría a la práctica

Introducir en GeoTerva el muro propio, la posición y el ancho de la sobrecarga en franja; el módulo proporciona, a cada profundidad, los valores de β, α y σ_H, el perfil de presiones, la resultante y su línea de acción, la solución paso a paso y el informe.

Abrir el módulo → **Página de teoría →**

Abrir en el teléfono
Los módulos de prueba no requieren registro.

Si desea utilizarlas en sus clases: info@geoterva.com