Geotechnische Vorlesung · Auflasten

Streifenlast als Auflast

Vorlesung: der durch eine lange, zur Wand parallele Streifenlast auf die Wand ausgeübte Erddruck; Erddruckverteilung, Resultierende und Wirkungslinie, Rechenbeispiele.

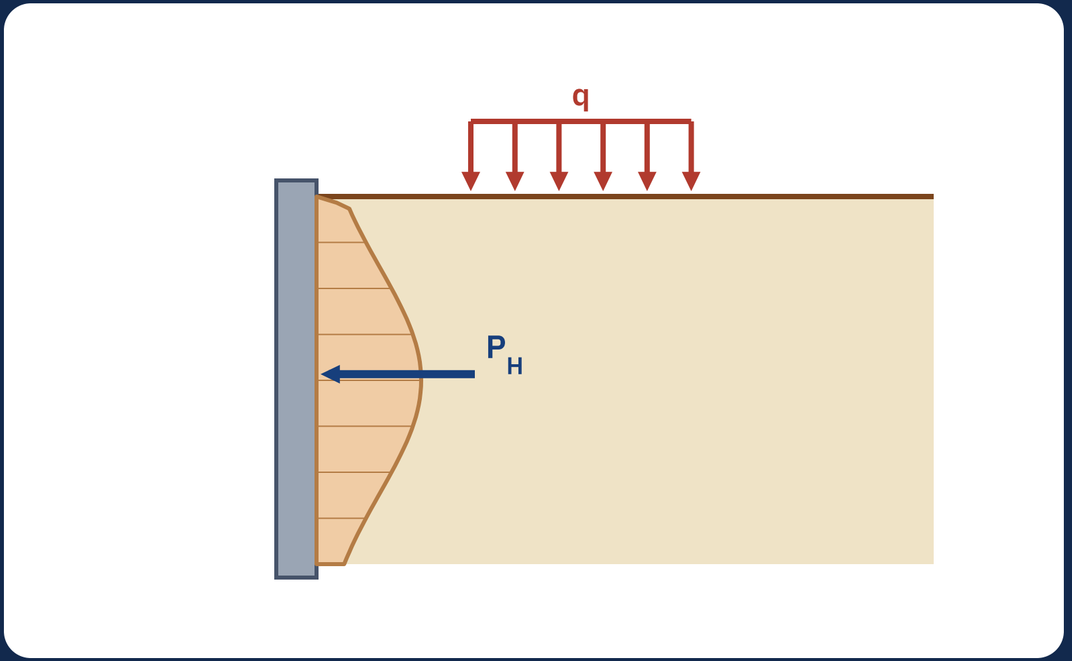
β · α

$\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$

Starre Wand ψ = 2

P_H und z_R

Druckprofil



Einführung

Was lernen wir in dieser Vorlesung?

- Die Geometrie der Streifenlast: x_1, x_2, $b = x_2 - x_1$ und die **Strahlen** von einem Punkt an der Wand zu den beiden Kanten des Streifens
- Die Ermittlung des Drucks aus den Winkeln **β** und **α**: $\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$
- Die Form für die **starre Wand (ψ = 2)** gegenüber dem **halbunendlichen Medium (ψ = 1)** und wann welche geeignet ist
- Die Fläche des Druckdiagramms ergibt P_H, aus dem ersten Moment folgt z_R; die Tiefe des größten Drucks
- Wie **Lage und Breite** der Streifenlast sowie die **Wandhöhe** das Ergebnis beeinflussen

VORLESUNGSABLAUF

Jedes Thema wird in **drei Schritten** behandelt:

1 · **Theorie**: Formel und Begründung

2 · **Aufgabe**: Gegeben und Gesucht

3 · **Lösung**: Schritt für Schritt, mit Zahlen

Beispielwand: H = 25 m, Streifen zwischen x_1 = 4 m und x_2 = 12 m, q = 20 kPa. Die Kräfte beziehen sich auf die Längeneinheit der Wand (kN/m).

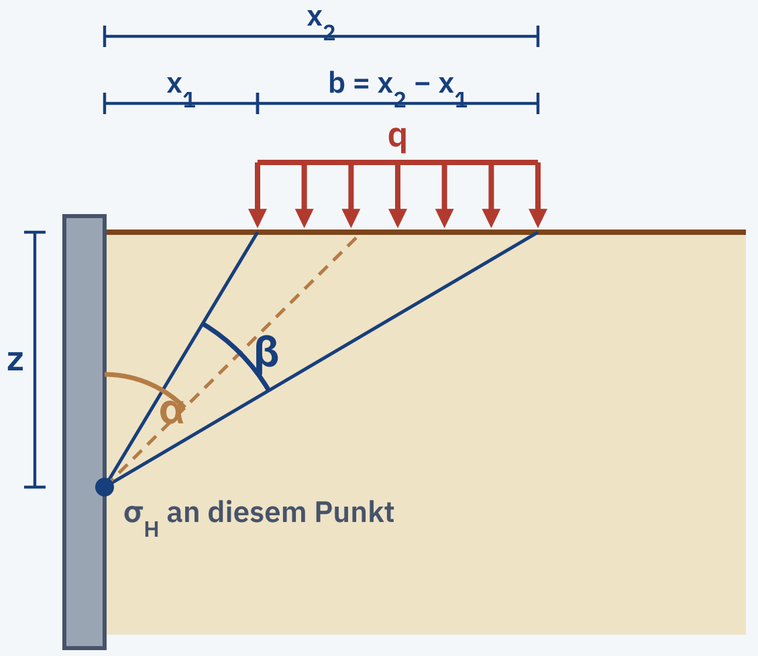
Auf die Wand wirkende Streifenlast

THEORIE

Zwischen den Abständen x_1 und x_2 von der Wand fügt eine auf die Geländeoberfläche wirkende gleichmäßig verteilte Streifenlast **q** der Wand einen horizontalen Erddruck hinzu

Der Druck in der Tiefe z ergibt sich aus der Geometrie der beiden Strahlen, die diesen Punkt an der Wand mit dem **nahen und dem fernen Rand** des Streifens verbinden

Der Streifen ist lang und parallel zur Wand: alle Ergebnisse beziehen sich **auf die Längeneinheit der Wand**



H — Wandhöhe; **z** — Tiefe von der Oberfläche

x_1, x_2 — waagerechte Abstände von der Wand zum nahen und zum fernen Rand des Streifens

$b = x_2 - x_1$ — Streifenbreite; **q** — Gleichlast auf dem Streifen

β, α und σ_H

THEORIE

In der Tiefe z sieht der Streifen am Wandpunkt den Winkel **β**; die **Winkelhalbierende** dieses Winkels bildet mit der Vertikalen den Winkel **α**

Trigonometrische Funktionen nehmen Winkel im **Bogenmaß** an; Grad dienen nur der Lesbarkeit. In den Verhältnissen wird **z** selbst verwendet

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{z}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x_1}{z}\right) \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x_1}{z}\right) + \frac{\beta}{2}$$

$$\sigma_H = \psi \, \frac{q}{\pi} \, [\beta - \sin\beta \, \cos 2\alpha]$$

An der Geländeoberfläche (z = 0): Ein von der Wand entfernter Streifen erzeugt keinen Erddruck; für $x_1 = 0$ gilt β = 90°, α = 45° und $\sigma_H = \psi q/2$

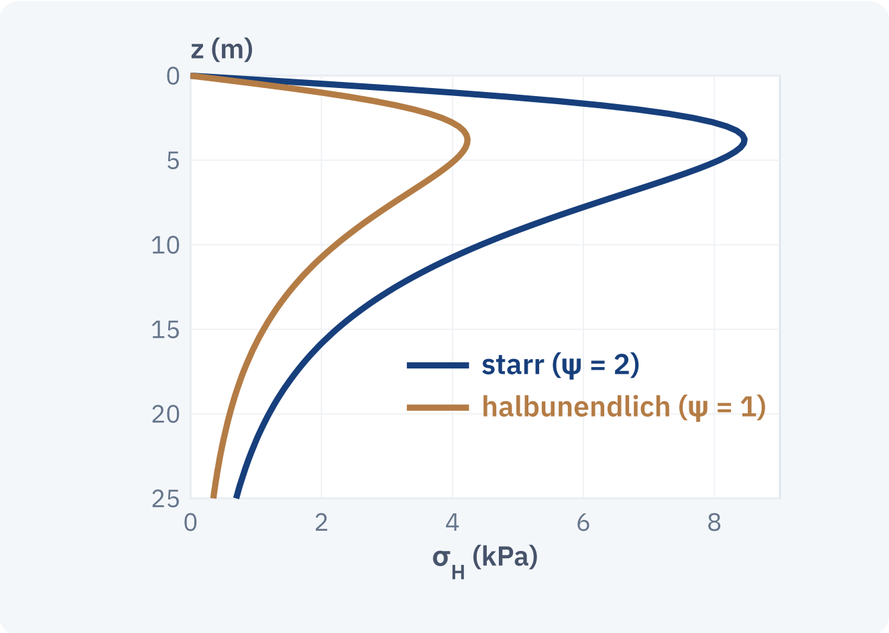
ψ = 2 und ψ = 1: zwei Ausdrucksformen

THEORIE

ψ = 1 (halbunendliches Medium): die horizontale Spannung, die die Streifenlast im elastischen Medium erzeugt, als wäre keine Wand vorhanden; geeignet für eine Wand, die sich so weit verformt, dass sie die Spannung im Boden abbaut

ψ = 2 (starre Wand): Die unnachgiebige Wand verhindert die Bewegung des Bodens an ihrer Fläche und nimmt das **Doppelte** dieser Spannung auf; wie bei der Einzellast ist dies der Standardwert des Moduls

z (m)	β (°)	α (°)	σ_H ψ = 1 (kPa)	σ_H ψ = 2 (kPa)
0.00	0.000	90.000	0.00	0.00
2.50	20.237	68.113	3.84	7.68
5.00	28.720	53.020	4.04	8.07
7.50	29.922	43.034	3.11	6.21
10.00	28.393	35.998	2.22	4.44
15.00	23.728	26.796	1.12	2.23
20.00	19.654	21.137	0.5994	1.1988
25.00	16.551	17.366	0.3486	0.6971



Fläche und erstes Moment des Diagramms

THEORIE

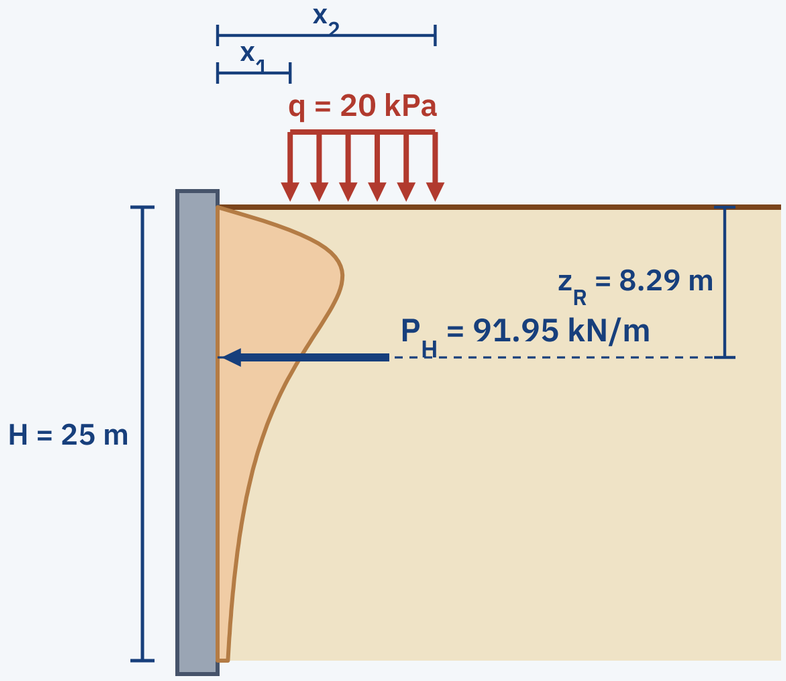
Die **Resultierende** je Längeneinheit der Wand ist die **Fläche** unter dem Erddruckdiagramm; ihre **Tiefe ab Geländeoberfläche** ist der Punkt, an dem das Moment erster Ordnung des Diagramms ausgeglichen ist

Das Modul berechnet beide Integrale numerisch mit voller Genauigkeit; der **geschlossene Ausdruck für die Fläche** wird als Kontrolle angegeben

Bei einer sehr tiefen Wand nähert sich P_H dem Wert $\psi \cdot q \cdot b / \pi$

$$P_H = \int_0^H \sigma_H \, dz = \psi \, \frac{q}{\pi} \, H \, (\theta_2 - \theta_1) \qquad \theta_i = \tan^{-1}\left(\frac{x_i}{H}\right)$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z \, \sigma_H \, dz}{P_H}$$



Aufgabe

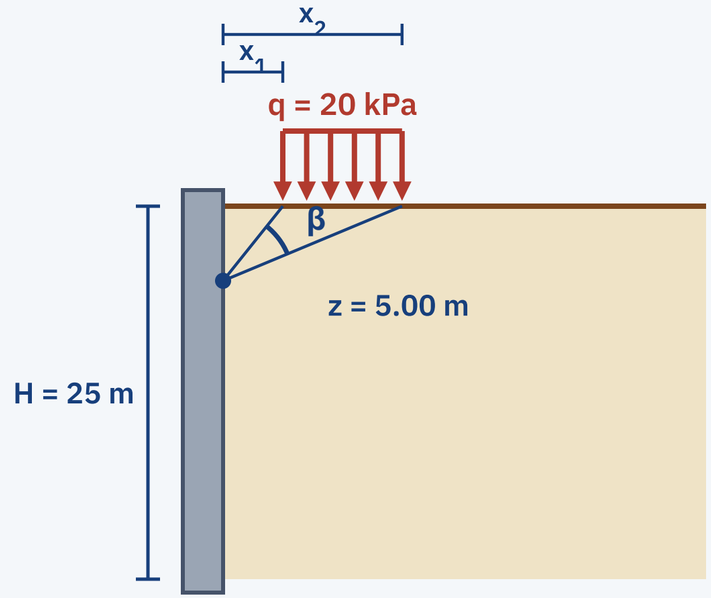
BEISPIEL

GESUCHT

β, **α** und σ_H: zuerst halbunendliches Medium (ψ = 1), dann starre Wand (ψ = 2).

Gegeben

Wand	$H = 25.00$ **m**
Streifen	$x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Tiefe	$z = 5.00$ **m**



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Streifenbreite

$$b = x_2 - x_1 = 12.00 - 4.00 = \mathbf{8.00}\ \mathrm{m}$$

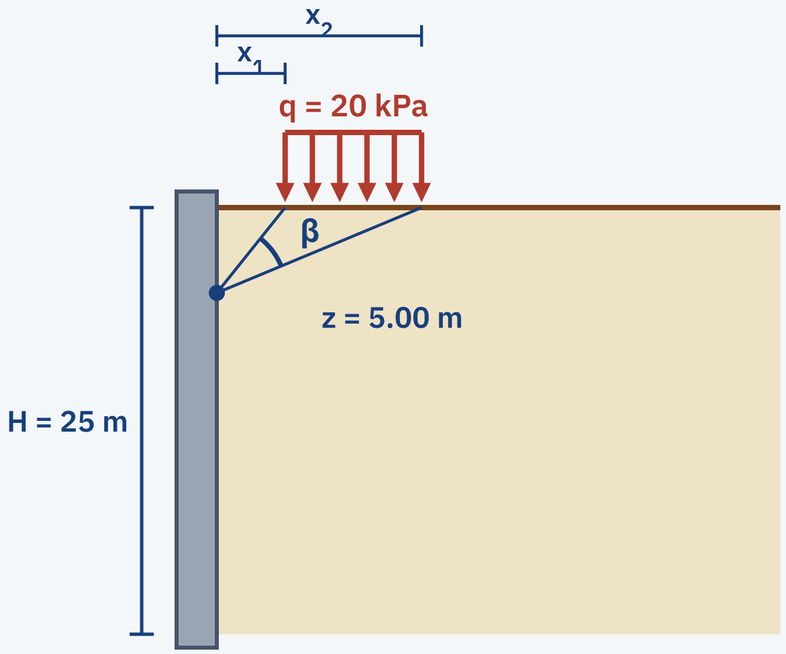
2 β: Winkel zwischen den beiden Strahlen

$$\beta = \tan^{-1}\tfrac{12}{5} - \tan^{-1}\tfrac{4}{5} = 67.380^\circ - 38.660^\circ = \mathbf{28.720}^\circ$$

3 α: Winkel der Winkelhalbierenden zur Vertikalen

$$\alpha = \tan^{-1}\tfrac{4}{5} + \tfrac{\beta}{2} = 38.660^\circ + 14.3602^\circ = \mathbf{53.020}^\circ$$

In Bogenmaß β = **0.50126** und 2α = **1.85075** (wird auf der nächsten Seite für σ_H verwendet).



Lösung (2/2)

LÖSUNG

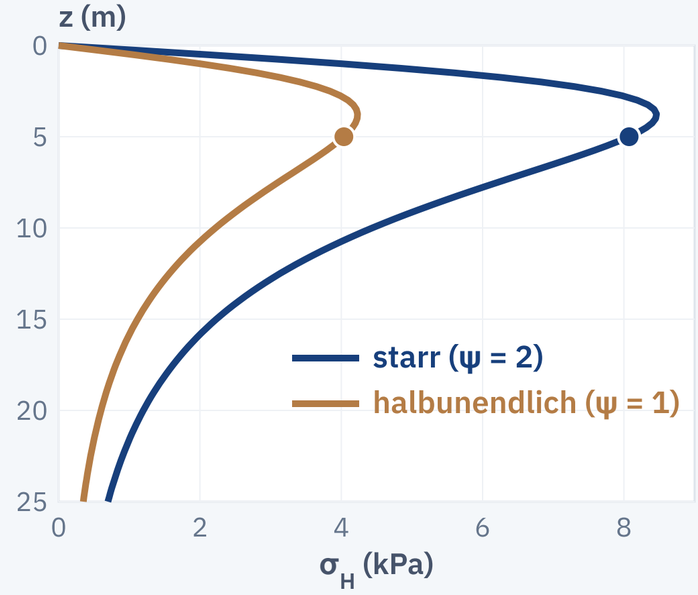
4 Halbunendliches Medium (ψ = 1)

$$\sigma_H = \frac{20}{\pi}\left[0.50126 - \sin(0.50126)\cos(1.85075)\right] = \mathbf{4.0364}\ \mathrm{kPa}$$

5 Starre Wand (ψ = 2): doppelt

$$\sigma_H = 2 \times 4.0364 = \mathbf{8.0728}\ \mathrm{kPa}$$

Bei z = 5 m **4.0364 kPa** für einen Halbraum und **8.0728 kPa** für eine starre Wand. Dieselben β und α werden in beiden Formen verwendet; ψ ist lediglich ein Maßstabsfaktor.



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Wand und Streifen	$H = 25.00$ **m,** $x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Tiefen	$z = 0$ **–** 25 **m, alle** 2.5 **m**

GESUCHT

Das Profil von **β**, **α**, **σ_H** (zwei Formen); der **größte Druck** und seine Tiefe.

Lösung (1/2)

LÖSUNG

z (m)	β (°)	α (°)	σ_H ψ = 1 (kPa)	σ_H ψ = 2 (kPa)
0.00	0.000	90.000	0.0000	0.0000
2.50	20.237	68.113	3.8387	7.6773
5.00	**28.720**	**53.020**	**4.0364**	**8.0728**
7.50	29.922	43.034	3.1069	6.2137
10.00	28.393	35.998	2.2191	4.4382
12.50	26.086	30.788	1.5660	3.1319
15.00	23.728	26.796	1.1160	2.2319
17.50	21.564	23.657	0.8096	1.6193
20.00	19.654	21.137	0.5994	1.1988
22.50	17.992	19.077	0.4528	0.9056
25.00	16.551	17.366	0.3486	0.6971

Bei z = 0 liegt kein Druck vor (der Streifen ist von der Wand entfernt); der Druck nimmt mit der Tiefe zu, erreicht bei **z ≈ 3.81 m** seinen Höchstwert und nimmt danach ab. Die Zeile z = 5.00 m ist Beispiel 1. An der Sohle (z = 25 m) verbleiben für ψ = 2 0.6971 kPa.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

1 Kammtiefe: Bedingung $d\sigma_H/dz = 0$

$$\frac{x_1^3}{(x_1^2+z^2)^2} = \frac{x_2^3}{(x_2^2+z^2)^2} \;\Rightarrow\; z^2 = \frac{(x_1x_2)^{3/2}\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)}{x_2^{3/2}-x_1^{3/2}}$$

$$z^2 = 14.504 \;\Rightarrow\; z = \mathbf{3.8084}\ \mathrm{m}$$

2 Winkel in dieser Tiefe

$$\beta = \tan^{-1}\frac{12}{3.8084} - \tan^{-1}\frac{4}{3.8084} = \mathbf{25.99}^\circ \qquad \alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3.8084} + \frac{\beta}{2} = \mathbf{59.40}^\circ$$

3 Größte Pressung

$$\sigma_{H,max} = \frac{20}{\pi}\left[0.45355 - \sin(0.45355)\cos(2.07341)\right] = \mathbf{4.23}\ (\psi = 1);\quad \mathbf{8.46}\ \mathrm{kPa}\ (\psi = 2)$$

Am Scheitel z = **3.81 m**: **8.46 kPa** (ψ = 2), **4.23 kPa** (ψ = 1); die Tiefe hängt nur von x_1, x_2 ab.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

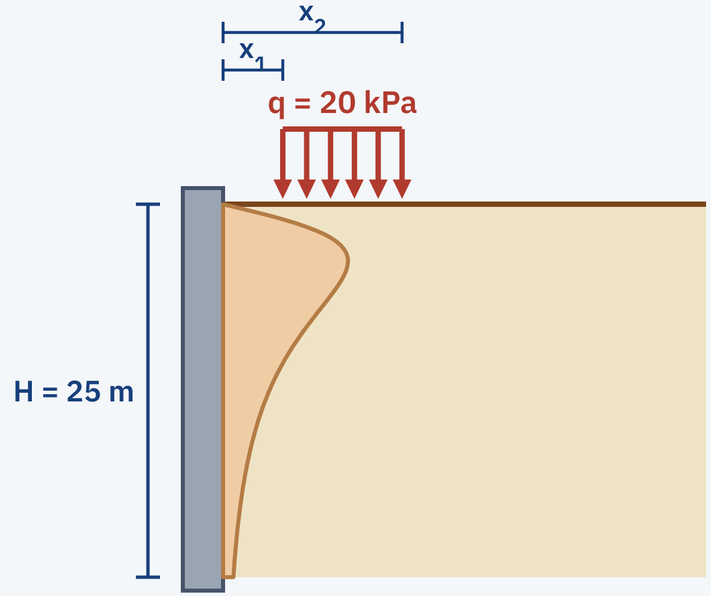
BEISPIEL

Gegeben

Wand und Streifen	$H = 25.00$ **m,** $x_1 = 4.00$ **m,** $x_2 = 12.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa**
Formen	**halbunendlicher Halbraum ($\psi = 1$) und starre Wand ($\psi = 2$)**

GESUCHT

$\mathbf{P_H}$ (mit dem geschlossenen Ausdruck für die Fläche), $\mathbf{z_R}$ und seine Höhe über der Sohle.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Winkel (in der Tiefe H = 25 m)

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{4}{25} = \mathbf{0.158655}\ \text{rad}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{12}{25} = \mathbf{0.447520}\ \text{rad}$$

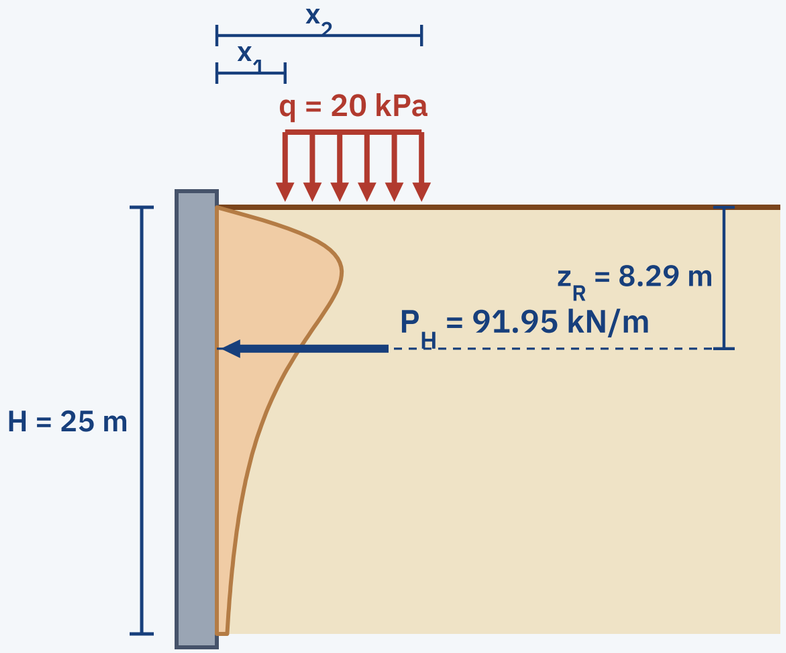
2 Halbunendliches Medium (ψ = 1)

$$P_H = \frac{20}{\pi} \times 25 \times (0.447520 - 0.158655) = \mathbf{45.97}\ \text{kN/m}$$

3 Starre Wand (ψ = 2): doppelt

$$P_H = 2 \times 45.974 = \mathbf{91.95}\ \text{kN/m}$$

Die Resultierende beträgt **45.97 kN/m** für den halbunendlichen Halbraum und **91.95 kN/m** für die starre Wand; die numerische Integration des Moduls liefert denselben Wert.



Lösung (2/2)

LÖSUNG

1 Erstes Moment (geschlossene Form; ψ = 1, in [ ] minus für x_2, plus für x_1)

$$M = \int_0^H z\,\sigma_H\,dz = \frac{q}{\pi}\left[\frac{H^2}{2}\tan^{-1}\frac{x}{H} - \frac{x}{2}\left(H - x\tan^{-1}\frac{H}{x}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$

2 Beiwerte (ψ = 1)

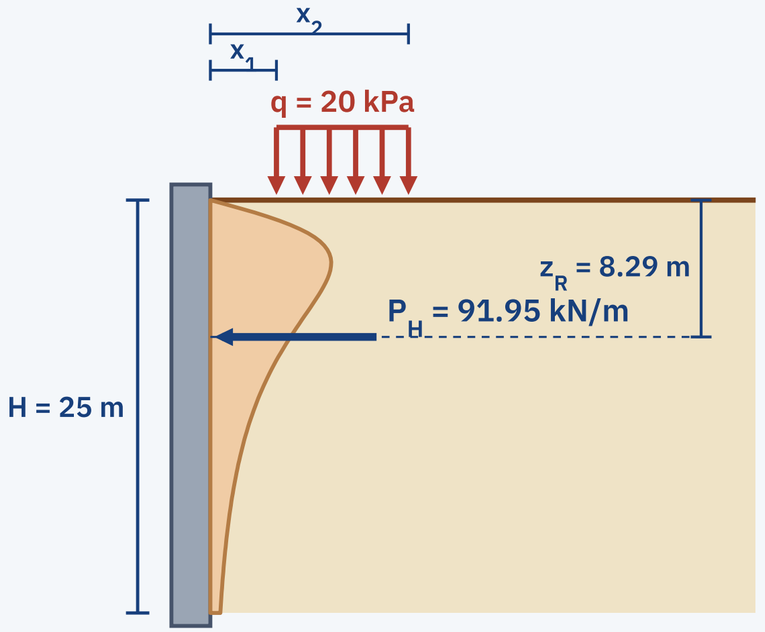
$$x_2: \quad 312.5(0.447520) - 6(25 - 12\cdot 1.12328) = 70.7259$$

$$x_1: \quad 312.5(0.158655) - 2(25 - 4\cdot 1.41214) = 10.8769$$

$$M = \frac{20}{\pi}(70.7259 - 10.8769) = \mathbf{381.011}\ \text{kN}$$

3 Tiefe und Höhe über der Sohle

$$z_R = \frac{M}{P_H} = \frac{381.011}{45.974} = \mathbf{8.287}\ \text{m} \qquad H - z_R = \mathbf{16.71}\ \text{m}$$



Die Resultierende liegt **8.29 m** unter der Geländeoberfläche und **16.71 m** über der Sohle; die Tiefe ist in beiden Darstellungen gleich.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Wand und Last	$H = 25.00$ **m,** $q = 20.00$ **kPa, starre Wand (** $\psi = 2$**)**
Streifen	**Breite** $b = 8.00$ **m konstant;** $x_1 = 0,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 20$ **m**

GESUCHT

P_H, **z_R**, der größte Druck und seine Tiefe; Handrechnung für **$x_1 = 0$**.

Lösung (1/2)

LÖSUNG

x_1 (m)	x_2 (m)	P_H (kN/m)	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)	z (m)
0	8	98.58	4.80	20.00	0.00
2	10	95.71	6.72	11.53	2.33
4	**12**	**91.95**	**8.29**	**8.46**	**3.81**
8	16	82.64	10.63	5.57	6.40
12	20	72.33	12.21	4.16	8.85
20	28	53.22	14.06	2.76	13.60

Je weiter sich die Streifenlast von der Wand entfernt, **desto kleiner wird die Resultierende** (98.58 → 53.22 kN/m), **desto tiefer liegt die Wirkungslinie** (4.80 → 14.06 m), und die Spitze des Erddrucks wandert nach unten; die Zeile x_1 = 4 m entspricht Beispiel 1 und 3.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

1 An der Oberfläche nehmen die Winkel ihren Grenzwert an (z = 0)

$$\beta = 90^\circ, \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \sin 90^\circ \cos 90^\circ\right] = \psi \frac{q}{2} = \frac{2 \times 20}{2} = \mathbf{20.00}\ \mathrm{kPa}$$

2 Resultierende ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \tan^{-1}(8/25)$)

$$P_H = \frac{2 \times 20}{\pi} \times 25 \times (0.309703 - 0) = \mathbf{98.58}\ \mathrm{kN/m}$$

Ein an der Wandfläche beginnender Streifen **belastet den oberen Teil der Wand direkt**: An der Geländeoberfläche beträgt der Druck ψq/2 = **20.00 kPa** (10.00 kPa im halbunendlichen Medium), die Resultierende **98.58 kN/m** und z_R = 4.80 m.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Wand und Last	$q = 20.00$ **kPa, starre Wand (**$\psi = 2$**)**
Breite	$x_1 = 4.00$ **m konstant,** $b = 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 36$ **m (**$H = 25$ **m)**
Höhe	$x_1 = 4$**,** $x_2 = 12$ **m;** $H = 5,\ 10,\ 25,\ 50,\ 100,\ 250$ **m**

GESUCHT

P_H und z_R; Vergleich mit der Grenze für die tiefe Wand $\psi\ q\ b\ /\ \pi$.

Lösung

LÖSUNG

b (m)	x_2 (m)	P_H (kN/m)	z_R (m)	$\sigma_{H,max}$ (kPa)
2	6	**24.47**	6.12	3.32
4	8	**48.08**	6.95	5.57
8	12	**91.95**	8.29	8.46
16	20	**164.28**	10.01	11.53
36	40	**271.69**	11.82	14.63

Ein **breiterer Streifen** trägt mehr Last: P_H nimmt zu, z_R und die Kuppe werden tiefer.

H (m)	P_H (kN/m)	P_H / (ψqb/π)	z_R (m)	von der Sohle (m)
5	**31.91**	0.3133	3.00	2.00
10	**63.10**	0.6194	5.10	4.90
25	**91.95**	0.9027	8.29	16.71
50	**99.13**	0.9732	10.13	39.87
100	**101.16**	0.9931	11.27	88.73
250	**101.75**	0.9989	12.03	237.97

Bei einer tiefen Wand nähert sich P_H dem Wert ψqb/π = 101.86 kN/m.

Das Erddruckprofil hängt nicht von der Wandhöhe ab ($\sigma_{H,max}$ = 8.46 kPa, z = 3.81 m für jedes H): Die Höhe ändert nur die obere Grenze des Integrals.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Zusammenfassung

Die wichtigsten Punkte

$\beta = \tan^{-1}(x_2/z) - \tan^{-1}(x_1/z)$, $\alpha = \tan^{-1}(x_1/z) + \beta/2$; $\sigma_H = \psi\,(q/\pi)[\beta - \sin\beta\cos 2\alpha]$; $\psi = 2$ starre Wand, $\psi = 1$ halbunendliches Medium

Beispiel ($H = 25$ m, $x_1 = 4$, $x_2 = 12$, $q = 20$): bei $z = 5$ m ist $\beta = 28.720°$, $\alpha = 53.020°$, $\sigma_H = 4.0364$ kPa ($\psi = 1$) und 8.0728 kPa ($\psi = 2$)

Größter Druck 8.46 kPa ($\psi = 2$) in der Tiefe $z = 3.81$ m; null an der Oberfläche, 0.6971 kPa an der Sohle

Resultierende $P_H = \psi\,(q/\pi)\,H\,(\theta_2 - \theta_1)$ = **91.95 kN/m** ($\psi = 2$), **$z_R = 8.29$ m** unter der Geländeoberfläche (16.71 m über der Sohle)

Auswirkungen: Mit zunehmendem Abstand des Streifens nimmt P_H ab und z_R wird tiefer; bei $x_1 = 0$ beträgt der Wert an der Oberfläche $\psi q/2$; bei einer sehr tiefen Wand gilt $P_H \to \psi q b/\pi$

Literatur

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; diese Seite folgt diesem Werk.

California Department of Transportation. Trenching and Shoring Manual – die Form des Streifenlastdrucks für die starre Wand (verdoppelt).

HINWEIS

Alle Rechenbeispiele wurden mit der moduleigenen Berechnungsengine erzeugt; das Modul liefert dieselben Werte. Die Öffnungswand des Moduls hat H = 25 m, x_1 = 4 m, x_2 = 12 m und q = 20 kPa.

GeoTerva

Geotechnische Berechnungen online

Von der Theorie zur Praxis

Geben Sie Ihre eigene Wand sowie Lage und Breite Ihrer Streifenlast in GeoTerva ein; das Modul liefert die Werte β, α, σ_H in jeder Tiefe, das Druckprofil, die Resultierende und deren Wirkungslinie, die schrittweise Lösung und den Bericht zusammen.

Modul öffnen →

Theorieseite →

Auf dem Smartphone öffnen

Die Beispielmodule erfordern keine Registrierung.

Falls Sie sie in Ihren Vorlesungen verwenden möchten: info@geoterva.com