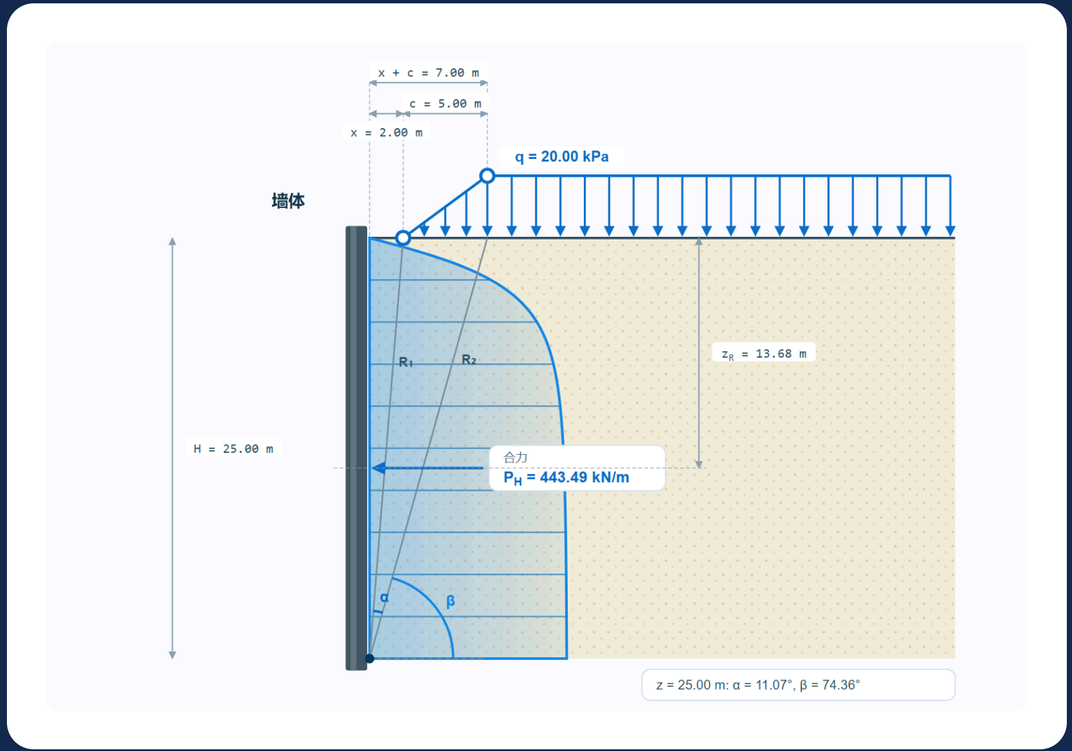
GeoTerva

岩土工程讲义 · 地表超载

梯形地面超载

讲义：由零开始增至平台值的梯形荷载；某一深度处的压力纵坐标用手算求解，压力剖面、合力和各种变化情形以表格给出。

线荷载叠加 | R_1, R_2, α, β | 刚性墙ψ = 2 | 合力与z_R | 可手算求解



引言

本讲内容

梯形荷载的几何形状：自距墙**x**处从零开始，在宽度**c**范围内增至q，其后以恒定的q继续

求出某一深度z处的半径R_1、R_2和角**α**、**β**（弧度）

由**线荷载叠加**得到的水平压力的闭合形式：$\sigma_H = \psi\, q/(\pi c)\,[c\beta - x\alpha + 2z \ln(R_2/R_1)]$

刚性墙($\psi = 2$)与**半无限体**($\psi = 1$)的差异

合力P_H和**作用深度z_R**：压力图的面积及一次矩；x和c的影响

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：公式及其依据

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

算例：H = 25 m，x = 2 m，c = 5 m，q = 20 kPa；刚性墙。取z = 5 m处的一个纵坐标进行手算。

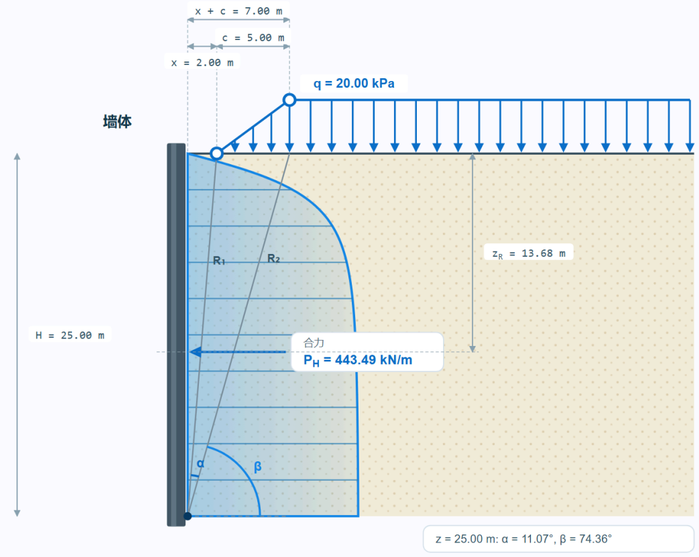
作用于墙上的梯形地面超载

理论

梯形超载始于距墙水平距离x处

地表压力在梯形荷载宽度c范围内由零线性增大至完整的q值；在x + c以外，超载以恒定强度q继续作用

荷载为长条形且平行于墙；合力按墙的**单位长度**给出



H：墙的总高度

x：墙至梯形荷载起点的距离

c：荷载由0增至q的水平宽度

q：梯形荷载渐变段以外的全值均布超载强度

z：计算σ_H处距地表的深度

深度z处的几何关系

理论

在深度z处，墙上该点至梯形荷载**起点**和**终点**的两条射线的长度，以及它们之间的夹角，如下

压力方程中角度以**弧度**代入；为便于阅读，界面和计算报告中可显示以度为单位的数值

$$R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \qquad R_2 = \sqrt{(x+c)^2 + z^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x+c}{z} - \tan^{-1}\frac{x}{z} \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{x+c}{z}$$

线荷载的叠加

理论

梯形荷载由一系列连续的线荷载组成，每个线荷载的强度为**w(s)·ds**（斜坡段递增，平台段为常数）；将弹性水平应力(Flamant)叠加

上升的斜坡段和平台段产生额外的代数项；这些项恰好相互抵消，剩下的只有**角度和对数**

$$\sigma_H = \psi \frac{2}{\pi} \int w(s) \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} ds$$

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{\pi c} \left[c\beta - x\alpha + 2z \ln \frac{R_2}{R_1} \right]$$

ψ = 1为半无限介质（无墙）；**ψ = 2**为不发生位移的刚性墙，水平应力加倍：模块默认值。σ_H在地面处为零

压力图的面积与一阶矩

理论

单位墙长上的**地面超载合力**及其距地面的深度，分别是分布图的面积和一次矩；模块以全精度对这两个积分进行数值计算

$$P_H = \int_0^H \sigma_H(z)\,dz$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z\,\sigma_H(z)\,dz}{P_H}$$

算例中，P_H = 443.49 kN/m（刚性墙）或221.74 kN/m（半无限介质）；两种情形下均为z_R = 13.68 m，位于地面以下

六个步骤与一个纵坐标

理论

1 · 定义H、x、c、q，并选取ψ

2 · 在地面与墙底之间选定深度z

3 · 计算R_1和R_2；**4** · 计算α和β（弧度）

5 · 计算σ_H：代入q、c、x、α、β、R_1、R_2

6 · 重复计算并积分：压力分布，然后是P_H和z_R

$$z = 5\ \text{m}: \quad R_1 = 5.385\ \text{m} \quad R_2 = 8.602\ \text{m} \qquad \alpha = 32.661^\circ \quad \beta = 35.538^\circ$$

$$\sigma_H = \frac{20}{5\pi}\left[5(0.62025) - 2(0.57004) + 10\ln\frac{8.6023}{5.3852}\right] = 8.461\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1) \ \rightarrow\ 16.921\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2)$$

题目

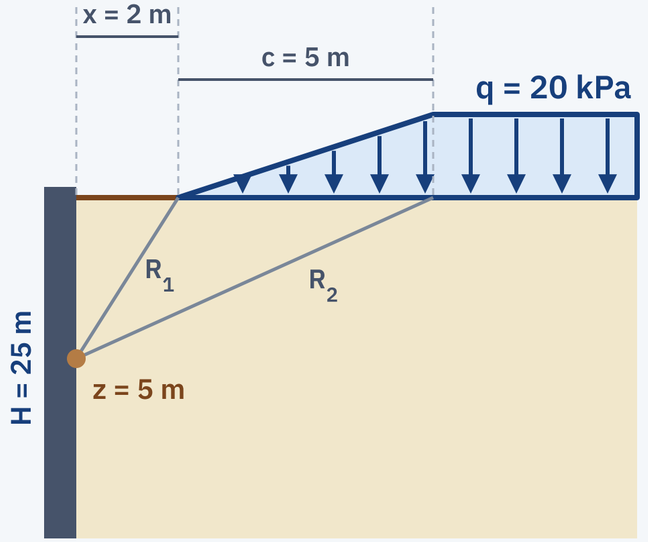
算例

已知条件

墙与荷载	$H = 25.0$ m; $x = 2.0$ m; $c = 5.0$ m; $q = 20.0$ kPa
墙	**半无限介质($\psi = 1$)与刚性墙($\psi = 2$)**

求

在深度z = 5 m处的R_1、R_2、α、β以及水平压力σ_H（对应两个ψ值）；与模块的比较。



解答 (1/2)

解答

1 从墙上的点到梯形荷载起点(x)和终点(x + c)的射线

$$R_1 = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = \mathbf{5.3852}\ \text{m}$$

$$R_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} = \mathbf{8.6023}\ \text{m}$$

2 角度（弧度）

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \tan^{-1}\frac{2}{5} = 0.95055 - 0.38051 = \mathbf{0.57004}\ \text{rad}\ \ (32.661^\circ)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{7}{5} = 1.57080 - 0.95055 = \mathbf{0.62025}\ \text{rad}\ \ (35.538^\circ)$$

从墙上该点看，斜坡段起点的视角为**32.66°**，终点为**35.54°**；射线长度分别为5.385 m和8.602 m。

解答 (2/2)

解答

3 半无限介质(ψ = 1)：方括号内的三项

$$\sigma_H = \frac{q}{\pi c}\left[c\beta - x\alpha + 2z\ln\frac{R_2}{R_1}\right] = \frac{20}{5\pi}\left[5(0.62025) - 2(0.57004) + 10\ln\frac{8.6023}{5.3852}\right]$$

$$= 1.27324\left[3.1012 - 1.1401 + 4.6838\right] = 1.27324(6.6450) = \mathbf{8.461}\ \text{kPa}$$

4 刚性墙(ψ = 2)：为半无限介质值的两倍

$$\sigma_H = 2 \times 8.461 = \mathbf{16.921}\ \text{kPa}$$

在z = 5 m处，**σ_H = 16.921 kPa**（刚性墙；半无限介质中为8.461）。模块给出相同的值。x·α项以负号代入：与自x起始的完整条形荷载相比，渐增的梯形荷载使靠近墙处的荷载减小。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

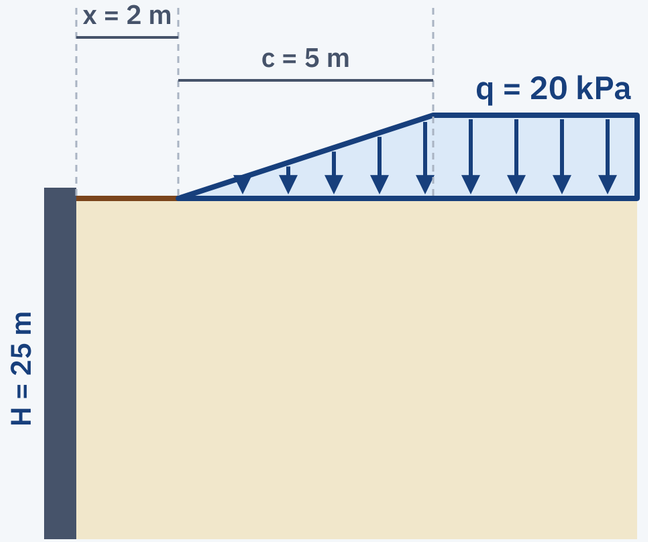
算例

求

压力分布及墙底处的数值；压力在深处的变化趋势（公式在z → ∞时的极限）。

已知条件

模型	**算例1中的梯形荷载；刚性墙；表格每$H/30 = 0.833$ m取值**
每一行中	**R_1、R_2、α、β和σ_H；半无限介质的值为刚性墙的一半**



解答 (1/2)

解答

z (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	α (°)	β (°)	σ_H (kPa)
0.00	2.000	7.000	0.00	0.00	0.000
0.83	2.167	7.049	15.83	6.79	5.109
1.67	2.603	7.196	26.41	13.39	9.258
2.50	3.202	7.433	31.69	19.65	12.275
3.33	3.887	7.753	33.57	25.46	14.395
4.17	4.622	8.146	33.60	30.76	15.877
5.00	**5.385**	**8.602**	**32.66**	**35.54**	**16.921**
5.83	6.167	9.112	31.27	39.81	17.665
6.67	6.960	9.667	29.70	43.60	18.202
7.50	7.762	10.259	28.09	46.97	18.596
8.33	8.570	10.883	26.53	49.97	18.887
9.17	9.382	11.534	25.06	52.63	19.107
10.00	10.198	12.207	23.68	55.01	19.275
10.83	11.016	12.898	22.41	57.13	19.405
11.67	11.837	13.606	21.24	59.04	19.506
12.50	12.659	14.327	20.16	60.75	19.586
13.33	13.482	15.059	19.17	62.30	19.651
14.17	14.307	15.802	18.26	63.71	19.703
15.00	15.133	16.553	17.42	64.98	19.745
15.83	15.959	17.312	16.65	66.15	19.780
16.67	16.786	18.077	15.94	67.22	19.809
17.50	17.614	18.848	15.28	68.20	19.833
18.33	18.442	19.624	14.67	69.10	19.853
19.17	19.271	20.405	14.11	69.94	19.870
20.00	20.100	21.190	13.58	70.71	19.885
20.83	20.929	21.978	13.09	71.43	19.897
21.67	21.759	22.769	12.63	72.10	19.908
22.50	22.589	23.564	12.20	72.72	19.918
23.33	23.419	24.361	11.80	73.30	19.926
24.17	24.249	25.160	11.42	73.85	19.933
25.00	25.080	25.962	11.07	74.36	19.939

解答 (2/2)

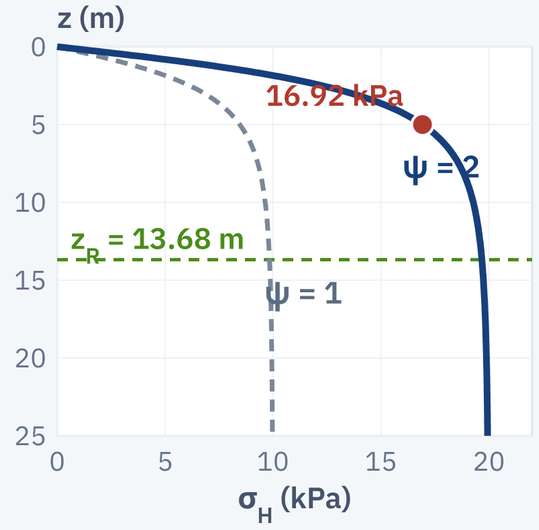
解答

1 地表处与深处

$$z = 0: \quad \sigma_H = 0 \qquad z = H = 25\ \text{m}: \quad \sigma_H = \mathbf{19.94}\ \text{kPa}$$

$$z \to \infty: \quad \alpha \to 0,\ \beta \to \tfrac{\pi}{2},\ 2z \ln \tfrac{R_2}{R_1} \to 0 \ \Rightarrow\ \sigma_H \to \psi\, \frac{q}{2}$$

压力在地表处为零，并**随深度增大**：最大值出现在墙底处(19.94 kPa)。在深处$\sigma_H \to \psi q/2 = \mathbf{q}$：z = 50 m处为19.99，z = 1000 m处为20.00 kPa（刚性墙）。z = 5 m处的纵坐标为16.921 kPa（粗体行，算例1）。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

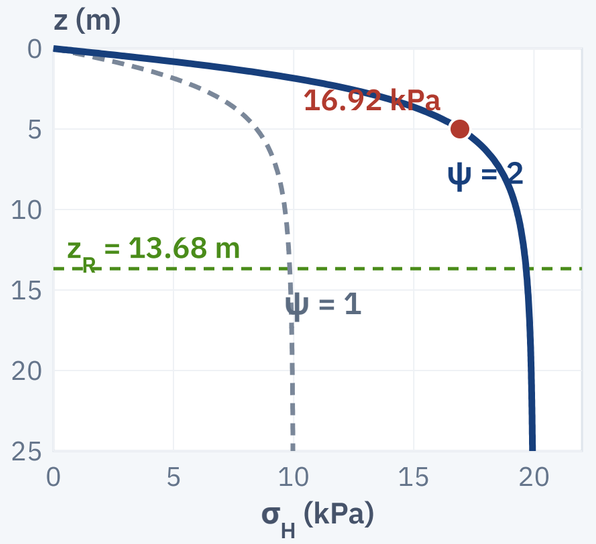
算例

已知条件

模型	**算例1中的梯形荷载；刚性墙；算例2的$H/30$表($n = 30$, $h = H/30 = 0.8333$ m)**
方法	**Simpson法则；** $z_R = \int z\,\sigma\,dz \,/\, P_H$

求

P_H和z_R（手算，由表查得）；半无限介质的值；与模块结果的比较。



解答 (1/2)

解答

	σ_0	Σ奇数项(i = 1, 3, …, 29)	Σ偶数项(i = 2, 4, …, 28)	σ_{30}
σ_H (kPa)	0.000	266.553	255.220	19.939

1 Simpson求和与面积

$$\Sigma = \sigma_0 + 4(266.553) + 2(255.220) + \sigma_{30} = 1{,}596.59$$

$$P_H \approx \frac{h}{3}\,\Sigma = \frac{0.8333}{3}(1{,}596.59) = \mathbf{443.50}\ \text{kN/m}$$

手算得**443.50 kN/m**；模块的精确积分结果为**443.49 kN/m**（相差0.002%）。半无限体中取其一半：**221.74 kN/m**。

解答 (2/2)

解答

	$z_0\sigma_0$	Σ单个	Σ成对	$z_{30}\sigma_{30}$
$z\sigma_H$ (kPa·m)	0.000	3,638.41	3,393.35	498.48

2 一阶矩与深度

$$\int z\,\sigma\,dz \approx \frac{0.8333}{3}\left[0 + 4(3{,}638.41) + 2(3{,}393.35) + 498.48\right] = 6{,}066.3 \text{ kN}$$

$$z_R = \frac{6{,}066.3}{443.50} = \mathbf{13.68}\text{ m} \quad \text{（自地面）} \qquad H - z_R = 11.32\text{ m} \quad \text{（自底部）}$$

手算z_R **= 13.68 m**；模块为13.68 m。合力443.49 kN/m作用于**地表以下13.68 m**处（位于底面以上11.32 m）；ψ变化时z_R不变。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

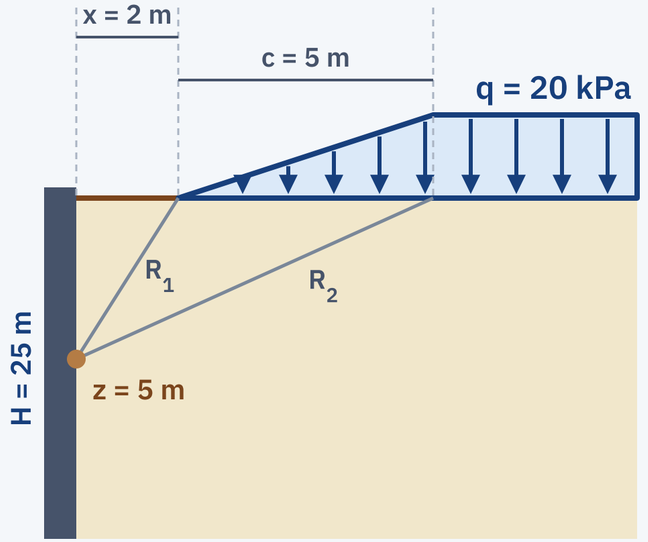
算例

已知条件

模型	**算例1：** $z = 5$ m；**半无限体**($\psi = 1$)
方法	$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\int w(s)\,\frac{s^2 z}{(s^2+z^2)^2}\,ds$；**斜坡段** $w = q(s-x)/c$，**平台段** $w = q$
计算	**斜坡段：Simpson法**($n = 10$, $h = 0.5$ m)；**平台段：闭式积分**

求

分别求出斜坡段和平台段的贡献并相加得到σ_H；与算例1的闭合形式比较。



解答 (1/2)

解答

i	s (m)	w(s) (kPa)	f(s) = s²z/(s²+z²)² (1/m)	c	c·w·f
0	2.0	0.00	0.02378	1	0.00000
1	2.5	2.00	0.03200	4	0.25600
2	3.0	4.00	0.03893	2	0.31142
3	3.5	6.00	0.04414	4	1.05941
4	4.0	8.00	0.04759	2	0.76145
5	4.5	10.00	0.04945	4	1.97796
6	5.0	12.00	0.05000	2	1.20000
7	5.5	14.00	0.04955	4	2.77472
8	6.0	16.00	0.04837	2	1.54797
9	6.5	18.00	0.04671	4	3.36314
10	7.0	20.00	0.04474	1	0.89481
			Σ c·w·f =		**14.14688**

1 梯形荷载中各线荷载的积分

$$I_{ramp} = \frac{h}{3}\sum c_i\, w_i f_i = \frac{0.5}{3}(14.14688) = \mathbf{2.3578}$$

解答 (2/2)

解答

2 平台段（s ≥ x + c = 7 m）：采用A(s) = ½[tan⁻¹(s/z) − sz/(s² + z²)]的闭式积分

$$A(7) = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{7}{5} - \frac{7(5)}{74}\right] = 0.23879 \qquad A(\infty) = \frac{\pi}{4} = 0.78540$$

$$I_{plateau} = q\,[A(\infty) - A(7)] = 20(0.78540 - 0.23879) = 10.9322$$

3 合计与ψ

$$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\,(I_{ramp} + I_{plateau}) = \frac{2}{\pi}(2.3578 + 10.9322) = \mathbf{8.4607}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1)$$

$$\psi = 2:\ \ \sigma_H = \mathbf{16.921}\ \text{kPa}$$

叠加法得到**8.4607 kPa**；闭式解（算例1）为**8.4607 kPa**。两种途径结果一致：方括号中的各项是斜坡段积分与平台段积分之和。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

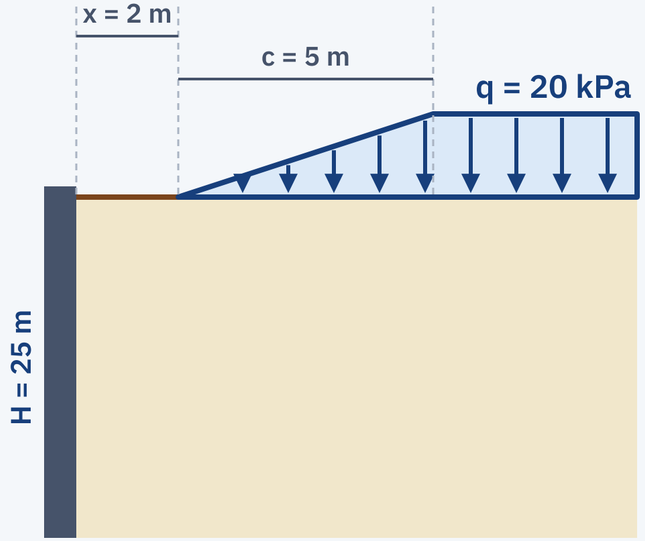
算例

已知条件

模型	$H = 25.0$ m；$q = 20$ kPa；刚性墙；每次只改变其中一项
变量	起始距离$x = 0$；2；5；10 m ($c = 5$ m)和宽度$c = 1$；5；10；20 m ($x = 2$ m)

求

各工况的P_H、z_R及底部压力；半无限体的数值；上限值（均布荷载）。



解答 (1/2)

解答

x (m), c = 5	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	H − z_R (m)	σ_H(H) (kPa)
0	468.38	234.19	13.19	11.81	19.98
2	443.49	221.74	13.68	11.32	19.94
5	407.49	203.75	14.28	10.72	19.78
10	352.75	176.38	15.00	10.00	19.17

c (m), x = 2	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	H − z_R (m)	σ_H(H) (kPa)
1	468.28	234.14	13.22	11.78	19.99
5	443.49	221.74	13.68	11.32	19.94
10	414.10	207.05	14.11	10.89	19.76
20	362.68	181.34	14.67	10.33	19.02

梯形荷载远离墙体（x ↑）或升高较缓（c ↑）时，**合力减小，作用点z_R下移**；底部压力始终接近q = 20 kPa。ψ = 1时的数值为刚性墙的一半。

解答 (2/2)

解答

1 上限：荷载从墙面起始(x = 0)并立即达到q(c → 0)：均布超载

$$\sigma_H = \psi\,\frac{q}{2} = q \quad \text{(任意z处)} \quad \Rightarrow \quad P_H = qH = 20 \times 25 = \mathbf{500}\ \text{kN/m}, \quad z_R = \frac{H}{2} = 12.5\ \text{m}$$

2 斜坡段宽度c → 0：变为始于x = 2 m的阶跃荷载

$$c = 0.001\ \text{m}: \quad P_H = 474.58\ \text{kN/m}, \quad z_R = 13.09\ \text{m}$$

$$\text{条形公式}\ (x_2 \to \infty): \quad P_H = 474.59\ \text{kN/m}, \quad z_R = 13.09\ \text{m}$$

算例1的梯形荷载介于这两个界限之间：**443.49 kN/m**，为上限500 kN/m的88.7%。梯形荷载越陡，结果越趋近于阶跃荷载的条形解：同一叠加原理。（模块在x = 0、c = 0.001 m时给出499.99 kN/m。）

在GeoTerva中验算解答 ↗

小结

要点回顾

$\sigma_H = \psi\, q/(\pi c)\,[c\beta - x\alpha + 2z\ln(R_2/R_1)]$；$R_1 = \sqrt{(x^2 + z^2)}$，$R_2 = \sqrt{((x + c)^2 + z^2)}$，$\alpha = \tan^{-1}((x + c)/z) - \tan^{-1}(x/z)$，$\beta = \pi/2 - \tan^{-1}((x + c)/z)$（弧度）；$\psi = 2$（刚性墙），$\psi = 1$（半无限介质）

算例(z = 5 m)：R_1 5.385 m，R_2 8.602 m；α 32.661°，β 35.538°；σ_H = 8.461 kPa ($\psi = 1$)，**16.921 kPa** ($\psi = 2$)

分布：地表处为0，随深度增大，在深处趋近于$\psi q/2 = q$（底部为19.94 kPa）

合力$P_H = \int \sigma_H dz$ = **443.49 kN/m**，$z_R = \int z\sigma_H dz/P_H$ = **13.68 m**（自地面起算）；$\psi = 1$时，P_H = 221.74 kN/m，z_R不变

对比：随着梯形荷载远离墙体并变宽，合力减小；上限是均布荷载(q H = 500 kN/m)，下端则是梯形荷载变陡后的阶梯荷载

参考文献

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; 本页面遵循该书。

注

所有数值算例均由模块自身的计算引擎生成，模块给出相同的数值。模块的初始算例为H = 25 m, x = 2 m, c = 5 m, q = 20 kPa 的墙。

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入自己的梯形荷载、起始距离、宽度和墙高；模块一并给出压力分布图、合力及其作用深度、三个视图、分步解答和报告。

打开模块→

理论页面 →

用手机打开

试用模块无需注册。

如需在课堂教学中使用：info@geoterva.com