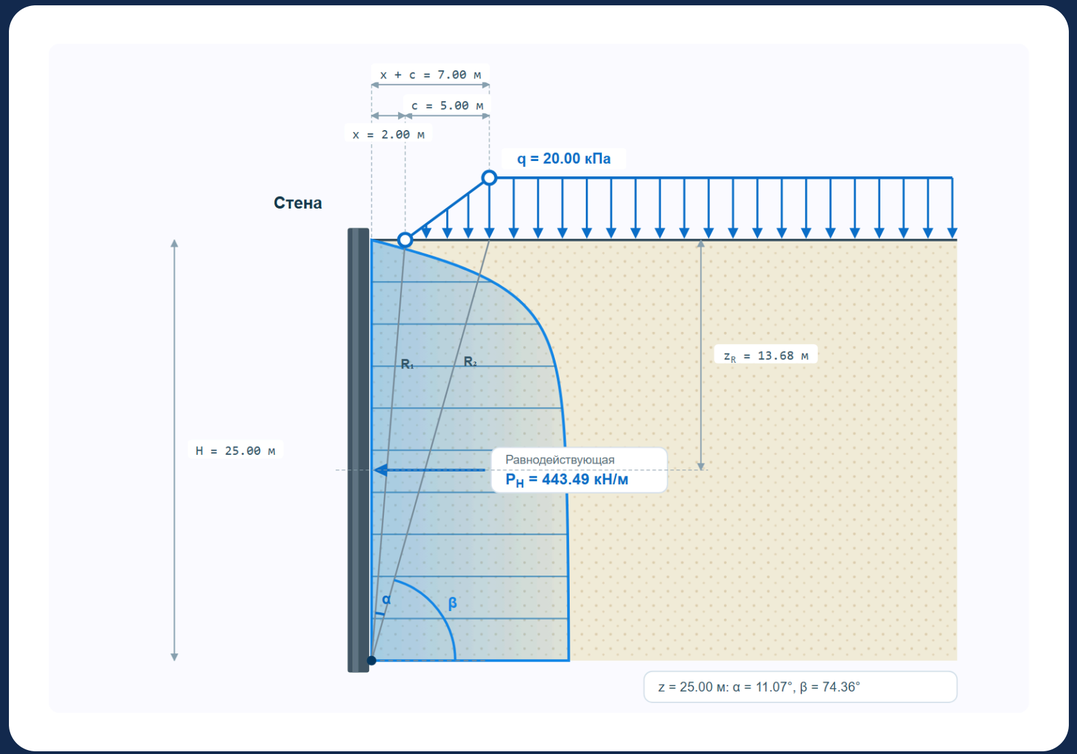
Презентация лекции по геотехнике · Внешние нагрузки

Трапециевидная пригрузка

Лекция: трапециевидная нагрузка, начинающаяся с нуля и выходящая на плато; ордината на заданной глубине определяется вручную, профиль, равнодействующая и варианты — по таблицам.

- Суперпозиция линейных нагрузок
- R_1, R_2, α, β
- Жёсткая стена ψ = 2
- Равнодействующая и z_R
- Решается вручную



Что мы изучим на этой лекции?

- Геометрия **трапециевидной нагрузки**: на расстоянии **x** от стены она начинается с нуля, на ширине **c** возрастает до значения q и далее продолжается с постоянным q
- Определение радиусов R_1, R_2 и углов **α, β** на глубине z (в радианах)
- Замкнутый вид горизонтального давления, получаемый **суперпозицией линейных нагрузок**: $\sigma_H = \psi\, q/(\pi c)\,[c\beta - x\alpha + 2z\,\ln(R_2/R_1)]$
- Различие между **жёсткой стеной** ($\psi = 2$) и **полубесконечной средой** ($\psi = 1$)
- **Равнодействующая P_H** и **глубина приложения z_R**: площадь эпюры и её первый момент; влияние x и c

ХОД ЛЕКЦИИ

Каждая тема излагается **в три шага**:

1 · **Теория**: формула и обоснование

2 · **Условие**: дано и требуется определить

3 · **Решение**: пошагово, с числами

Пример: H = 25 m, x = 2 m, c = 5 m, q = 20 kPa; жёсткая стена. Одна ордината при z = 5 m решается вручную.

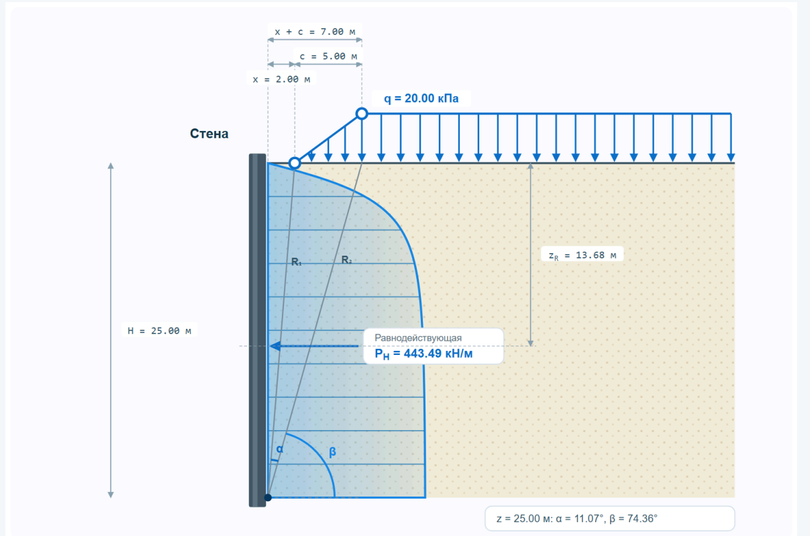
Трапециевидная пригрузка, действующая на стену

ТЕОРИЯ

Пригрузка-рампа начинается на горизонтальном расстоянии **x** от стены

Поверхностное давление линейно возрастает от нуля до полного значения **q** на ширине участка нарастания **c**; за пределами **x + c** пригрузка продолжается с постоянной интенсивностью q

Нагрузка протяжённая и параллельна стене; равнодействующая дана **на единицу длины** стены



H: полная высота стены

x: расстояние от стены до начала участка возрастания нагрузки

c: горизонтальная ширина, на которой нагрузка возрастает от 0 до q

q: интенсивность полной равномерной пригрузки за этим участком

z: глубина от поверхности грунта, на которой вычисляется σ_H

Геометрия на глубине z

ТЕОРИЯ

На глубине z ниже приведены длины двух лучей от точки на стене до **начала** и **конца** трапециевидной нагрузки и углы между ними

В уравнении давления углы принимаются в **радианах**; значения в градусах для наглядности могут отображаться в интерфейсе и в отчёте о расчёте

$$R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \qquad R_2 = \sqrt{(x + c)^2 + z^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x + c}{z} - \tan^{-1}\frac{x}{z} \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{x + c}{z}$$

Суперпозиция линейных нагрузок

ТЕОРИЯ

Трапециевидная нагрузка — непрерывный ряд линейных нагрузок интенсивностью **w(s)·ds** каждая (возрастающих на участке нарастания, постоянных на плато); суммируются упругие горизонтальные напряжения (Flamant)

Нарастающая рампа и плато порождают дополнительные алгебраические слагаемые; они полностью взаимно уничтожаются, и остаются **углы и логарифм**

$$\sigma_H = \psi \frac{2}{\pi} \int w(s) \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} ds$$

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{\pi c} \left[c\beta - x\alpha + 2z \ln \frac{R_2}{R_1} \right]$$

ψ = 1 — полубесконечная среда (стены нет); **ψ = 2** — жёсткая неподвижная стена, удваивающая горизонтальное напряжение: значение модуля по умолчанию. σ_H на поверхности грунта равно нулю

Площадь эпюры и первый момент

ТЕОРИЯ

Равнодействующая сила от пригрузки на единицу длины стены и её глубина от поверхности грунта — это площадь и первый момент эпюры; модуль вычисляет оба интеграла численно с полной точностью

$$P_H = \int_0^H \sigma_H(z)\,dz$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z\,\sigma_H(z)\,dz}{P_H}$$

В примере **P_H = 443.49 kN/m** (жёсткая стена) или **221.74 kN/m** (полубесконечная среда); в обоих случаях **z_R = 13.68 m** ниже уровня грунта

Шесть шагов и одна ордината

ТЕОРИЯ

1 · Задаются H, x, c, q и выбирается ψ

2 · Выбирается глубина **z** между поверхностью грунта и подошвой стены

3 · вычисляются R_1 и R_2; **4** · вычисляются α и β (в радианах)

5 · вычисляется σ_H: подставляются q, c, x, α, β, R_1, R_2

6 · Повторяется и интегрируется: эпюра давления, затем P_H и z_R

$$z = 5 \text{ m}: \quad R_1 = 5.385 \text{ m} \quad R_2 = 8.602 \text{ m} \qquad \alpha = 32.661^\circ \quad \beta = 35.538^\circ$$

$$\sigma_H = \frac{20}{5\pi}\left[5(0.62025) - 2(0.57004) + 10\ln\frac{8.6023}{5.3852}\right] = 8.461 \text{ kPa} \ (\psi = 1) \ \rightarrow \ 16.921 \text{ kPa} \ (\psi = 2)$$

Условие

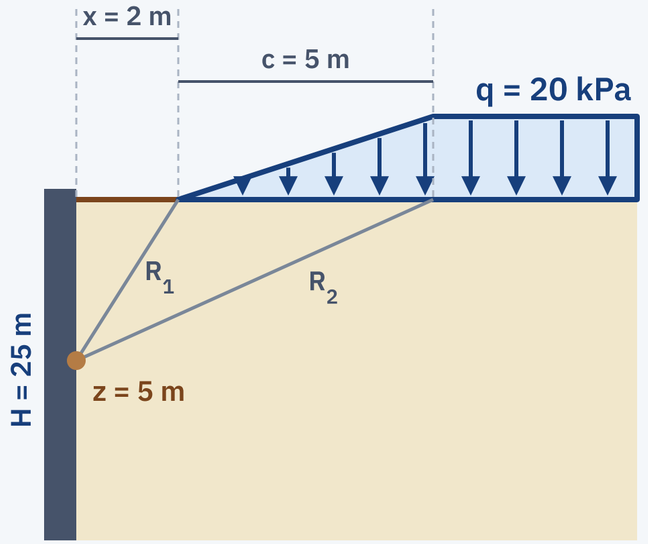
ПРИМЕР

Дано

Стена и нагрузка	$H = 25.0$ **m;** $x = 2.0$ **m;** $c = 5.0$ **m;** $q = 20.0$ **kPa**
Стена	**полубесконечная среда ($\psi = 1$) и жёсткая стена ($\psi = 2$)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

На глубине **z = 5 m**: **R_1, R_2, α, β** и горизонтальное давление **σ_H** (для двух значений ψ); сравнение с модулем.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Лучи из точки на стене к началу (x) и концу (x + c) трапециевидной нагрузки

$$R_1 = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = \mathbf{5.3852}\ \text{m}$$

$$R_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} = \mathbf{8.6023}\ \text{m}$$

2 Углы (в радианах)

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \tan^{-1}\frac{2}{5} = 0.95055 - 0.38051 = \mathbf{0.57004}\ \text{rad}\ \ (32.661^\circ)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{7}{5} = 1.57080 - 0.95055 = \mathbf{0.62025}\ \text{rad}\ \ (35.538^\circ)$$

Начало рампы видно из точки на стене под углом **32.66°**, конец — под углом **35.54°**; длины лучей равны 5.385 и 8.602 m.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

3 Полубесконечная среда (ψ = 1): три слагаемых в квадратных скобках

$$\sigma_H = \frac{q}{\pi c}\left[c\beta - x\alpha + 2z\ln\frac{R_2}{R_1}\right] = \frac{20}{5\pi}\left[5(0.62025) - 2(0.57004) + 10\ln\frac{8.6023}{5.3852}\right]$$

$$= 1.27324\,[3.1012 - 1.1401 + 4.6838] = 1.27324(6.6450) = \mathbf{8.461}\ \text{kPa}$$

4 Жёсткая стена (ψ = 2): вдвое больше значения для полубесконечной среды

$$\sigma_H = 2 \times 8.461 = \mathbf{16.921}\ \text{kPa}$$

При z = 5 m **σ_H = 16.921 kPa** (жёсткая стена; в полубесконечной среде 8.461). Модуль выдаёт то же значение. Слагаемое x·α входит со знаком минус: нарастающая рампа уменьшает нагрузку вблизи стены по сравнению с полной полосой, начинающейся в точке x.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

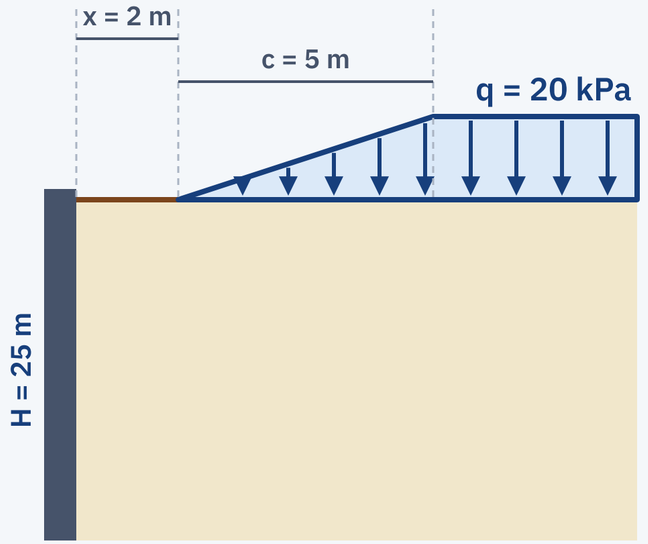
ПРИМЕР

Дано

Модель	**Нагрузка-рампа из примера 1; жёсткая стена; таблица через каждые $H/30 = 0.833$ m**
В каждой строке	**R_1, R_2, α, β и σ_H; значения для полубесконечной среды составляют половину значений для жёсткой стены**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Профиль давления и значение у основания стены; поведение давления на большой глубине (предел формулы при z → ∞).



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

z (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	α (°)	β (°)	σ_H (kPa)
0.00	2.000	7.000	0.00	0.00	0.000
0.83	2.167	7.049	15.83	6.79	5.109
1.67	2.603	7.196	26.41	13.39	9.258
2.50	3.202	7.433	31.69	19.65	12.275
3.33	3.887	7.753	33.57	25.46	14.395
4.17	4.622	8.146	33.60	30.76	15.877
5.00	**5.385**	**8.602**	**32.66**	**35.54**	**16.921**
5.83	6.167	9.112	31.27	39.81	17.665
6.67	6.960	9.667	29.70	43.60	18.202
7.50	7.762	10.259	28.09	46.97	18.596
8.33	8.570	10.883	26.53	49.97	18.887
9.17	9.382	11.534	25.06	52.63	19.107
10.00	10.198	12.207	23.68	55.01	19.275
10.83	11.016	12.898	22.41	57.13	19.405
11.67	11.837	13.606	21.24	59.04	19.506
12.50	12.659	14.327	20.16	60.75	19.586
13.33	13.482	15.059	19.17	62.30	19.651
14.17	14.307	15.802	18.26	63.71	19.703
15.00	15.133	16.553	17.42	64.98	19.745
15.83	15.959	17.312	16.65	66.15	19.780
16.67	16.786	18.077	15.94	67.22	19.809
17.50	17.614	18.848	15.28	68.20	19.833
18.33	18.442	19.624	14.67	69.10	19.853
19.17	19.271	20.405	14.11	69.94	19.870
20.00	20.100	21.190	13.58	70.71	19.885
20.83	20.929	21.978	13.09	71.43	19.897
21.67	21.759	22.769	12.63	72.10	19.908
22.50	22.589	23.564	12.20	72.72	19.918
23.33	23.419	24.361	11.80	73.30	19.926
24.17	24.249	25.160	11.42	73.85	19.933
25.00	25.080	25.962	11.07	74.36	19.939

Решение (2/2)

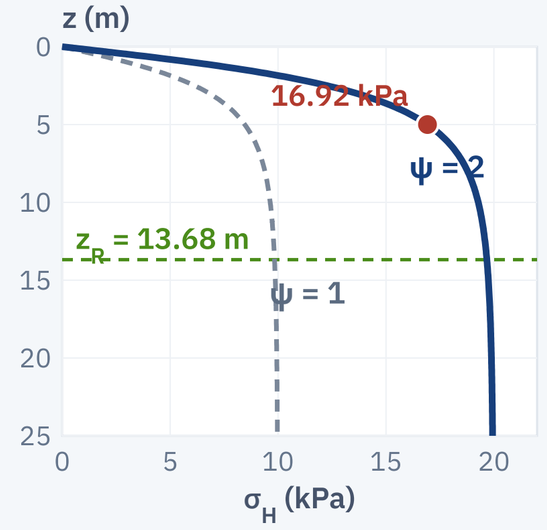
РЕШЕНИЕ

1 На поверхности и на глубине

$$z = 0: \quad \sigma_H = 0 \qquad z = H = 25\ \text{m}: \quad \sigma_H = \mathbf{19.94}\ \text{kPa}$$

$$z \to \infty: \quad \alpha \to 0,\ \beta \to \frac{\pi}{2},\ 2z \ln \frac{R_2}{R_1} \to 0 \ \Rightarrow\ \sigma_H \to \psi \frac{q}{2}$$

Давление на поверхности равно нулю и **возрастает с глубиной**: наибольшее значение — у основания стены (19.94 kPa). На большой глубине $\sigma_H \to \psi q/2 = \mathbf{q}$: 19.99 при z = 50 m, 20.00 kPa при z = 1000 m (жёсткая стена). Ордината при z = 5 m равна 16.921 kPa (строка, выделенная жирным шрифтом, Пример 1).



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

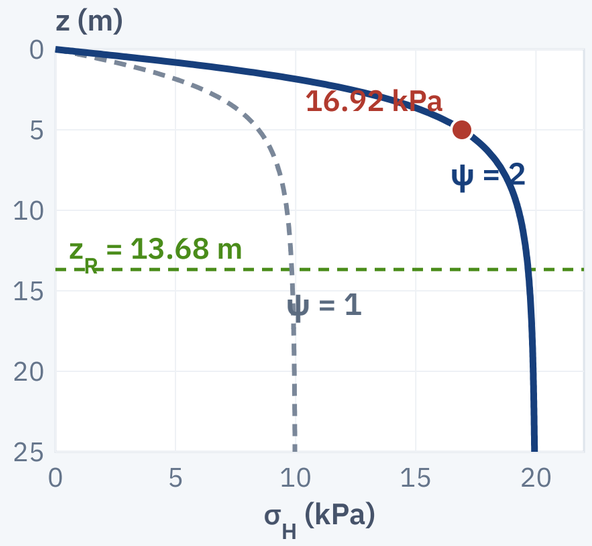
ПРИМЕР

Дано

Модель	**Трапециевидная нагрузка из Примера 1; жёсткая стена; таблица $H/30$ из Примера 2 ($n = 30$, $h = H/30 = 0.8333$ m)**
Метод	**Правило Simpson;** $z_R = \int z\,\sigma\,dz \,/\, P_H$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

P_H и **z_R** (вручную, по таблице); значения для полубесконечной среды; сравнение с результатом модуля.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

	σ_0	Σ нечётных (i = 1, 3, …, 29)	Σ чётных (i = 2, 4, …, 28)	σ_{30}
σ_H (kPa)	0.000	266.553	255.220	19.939

1 Сумма Симпсона и площадь

$$\Sigma = \sigma_0 + 4(266.553) + 2(255.220) + \sigma_{30} = 1{,}596.59$$

$$P_H \approx \frac{h}{3}\,\Sigma = \frac{0.8333}{3}(1{,}596.59) = \mathbf{443.50}\ \text{kN/m}$$

Вручную **443.50 kN/m**; точный интеграл модуля **443.49 kN/m** (разница 0.002%). В упругом полупространстве — половина: **221.74 kN/m**.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

	$z_0\sigma_0$	Σ одинарный	Σ двойной	$z_{30}\sigma_{30}$
$z\sigma_H$ (kPa·m)	0.000	3,638.41	3,393.35	498.48

2 Первый момент и глубина

$$\int z\,\sigma\,dz \approx \frac{0.8333}{3}\left[0 + 4(3{,}638.41) + 2(3{,}393.35) + 498.48\right] = 6{,}066.3 \text{ kN}$$

$$z_R = \frac{6{,}066.3}{443.50} = \mathbf{13.68}\text{ m} \quad \text{(от поверхности грунта)} \qquad H - z_R = 11.32\text{ m (от подошвы)}$$

Вручную **z_R = 13.68 m**; модуль даёт 13.68 m. Равнодействующая 443.49 kN/m действует **на 13.68 m ниже поверхности грунта** (на 11.32 m выше основания); при изменении ψ значение z_R не меняется.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

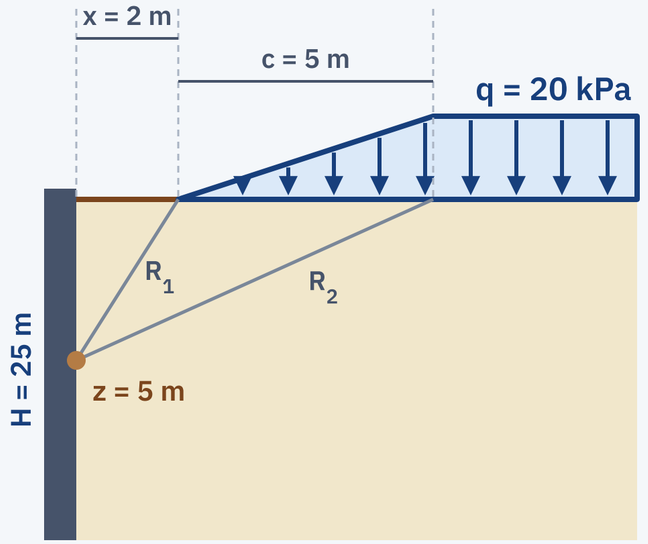
ПРИМЕР

Дано

Модель	**Пример 1:** $z = 5$ **m; полубесконечная среда** $(\psi = 1)$
Метод	$\sigma_H = \frac{2}{\pi} \int w(s) \, \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} \, ds$**; на рампе** $w = q(s - x)/c$**, на плато** $w = q$
Расчёт	**рампа: Simpson (**$n = 10$**,** $h = 0.5$ **m); плато: интеграл в замкнутом виде**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

σ_H путём отдельного определения и суммирования вкладов рампы и плато; сравнение с замкнутой формой Примера 1.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

i	s (m)	w(s) (kPa)	f(s) = s²z/(s²+z²)² (1/m)	c	c·w·f
0	2.0	0.00	0.02378	1	0.00000
1	2.5	2.00	0.03200	4	0.25600
2	3.0	4.00	0.03893	2	0.31142
3	3.5	6.00	0.04414	4	1.05941
4	4.0	8.00	0.04759	2	0.76145
5	4.5	10.00	0.04945	4	1.97796
6	5.0	12.00	0.05000	2	1.20000
7	5.5	14.00	0.04955	4	2.77472
8	6.0	16.00	0.04837	2	1.54797
9	6.5	18.00	0.04671	4	3.36314
10	7.0	20.00	0.04474	1	0.89481
			Σ c·w·f =		**14.14688**

1 Интеграл линейных нагрузок на наклонном участке (рампе)

$$I_{ramp} = \frac{h}{3}\sum c_i\, w_i f_i = \frac{0.5}{3}(14.14688) = \mathbf{2.3578}$$

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

2 Плато (s ≥ x + c = 7 m): интеграл в замкнутом виде с A(s) = ½[tan⁻¹(s/z) − sz/(s² + z²)]

$$A(7) = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{7}{5} - \frac{7(5)}{74}\right] = 0.23879 \qquad A(\infty) = \frac{\pi}{4} = 0.78540$$

$$I_{plateau} = q\,[A(\infty) - A(7)] = 20(0.78540 - 0.23879) = 10.9322$$

3 Итого и ψ

$$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\,(I_{ramp} + I_{plateau}) = \frac{2}{\pi}(2.3578 + 10.9322) = \mathbf{8.4607}\ \text{kPa} \quad (\psi = 1)$$

$$\psi = 2: \quad \sigma_H = \mathbf{16.921}\ \text{kPa}$$

Суперпозиция даёт **8.4607 kPa**; решение в замкнутом виде (пример 1) — **8.4607 kPa**. Оба пути совпадают: слагаемые в квадратных скобках — сумма интегралов по наклонному участку и по плато.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

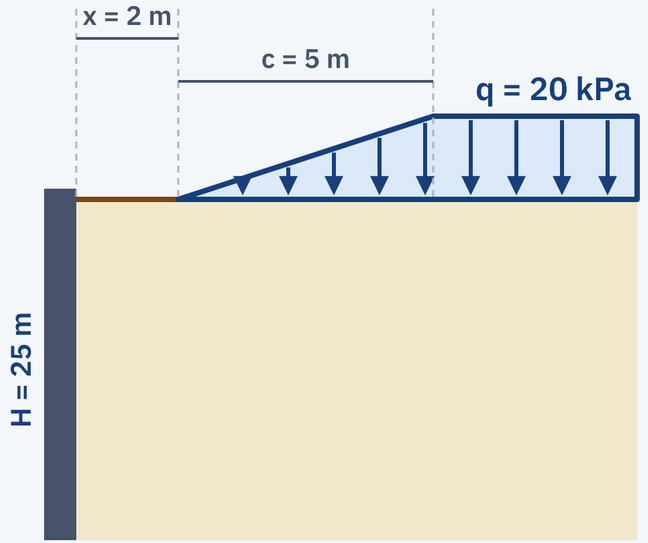
ПРИМЕР

Дано

Модель	$H = 25.0$ **m;** $q = 20$ **kPa; жёсткая стена; за один раз изменяется только один из них**
Переменные	**начальное расстояние** $x = 0; 2; 5; 10$ **m (** $c = 5$ **m) и ширина** $c = 1; 5; 10; 20$ **m (**$x = 2$ **m)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Для каждого случая — P_H, z_R, давление у основания стены; значения для полупространства; верхняя граница (равномерная нагрузка).



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

x (m), c = 5	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	H − z_R (m)	σ_H(H) (kPa)
0	468.38	234.19	13.19	11.81	19.98
2	443.49	221.74	13.68	11.32	19.94
5	407.49	203.75	14.28	10.72	19.78
10	352.75	176.38	15.00	10.00	19.17

c (m), x = 2	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	H − z_R (m)	σ_H(H) (kPa)
1	468.28	234.14	13.22	11.78	19.99
5	443.49	221.74	13.68	11.32	19.94
10	414.10	207.05	14.11	10.89	19.76
20	362.68	181.34	14.67	10.33	19.02

По мере удаления трапециевидной нагрузки от стены (x ↑) или более медленного её нарастания (c ↑) **равнодействующая уменьшается, z_R опускается глубже**; давление у основания всегда близко к q = 20 kPa. Значения при ψ = 1 составляют половину значений для жёсткой стены.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 Верхняя граница: нагрузка начинается от грани стены (x = 0) и сразу достигает q (c → 0): равномерная пригрузка

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{2} = q \quad \text{(при любом z)} \;\Rightarrow\; P_H = qH = 20 \times 25 = \mathbf{500}\ \text{kN/m}, \quad z_R = \frac{H}{2} = 12.5\ \text{m}$$

2 Ширина рампы c → 0: ступенчатая нагрузка, начинающаяся с x = 2 m

$$c = 0.001\ \text{m}: \quad P_H = 474.58\ \text{kN/m}, \quad z_R = 13.09\ \text{m}$$

$$\text{формула для полосы } (x_2 \to \infty): \quad P_H = 474.59\ \text{kN/m}, \quad z_R = 13.09\ \text{m}$$

Рампа Примера 1 находится между этими двумя пределами: **443.49 kN/m**, то есть 88.7% от верхнего предела 500 kN/m. По мере того как рампа становится круче, результат приближается к полосовому решению для ступенчатой нагрузки: та же суперпозиция. (Для x = 0, c = 0.001 m модуль выдаёт 499.99 kN/m.)

Проверить решение в GeoTerva ↗

Резюме

Главное

$\sigma_H = \psi\, q/(\pi c)\,[c\beta - x\alpha + 2z \ln(R_2/R_1)]$; $R_1 = \sqrt{(x^2 + z^2)}$, $R_2 = \sqrt{((x + c)^2 + z^2)}$, $\alpha = \tan^{-1}((x + c)/z) - \tan^{-1}(x/z)$, $\beta = \pi/2 - \tan^{-1}((x + c)/z)$ (в радианах); $\psi = 2$ для жёсткой стены, $\psi = 1$ для упругого полупространства

Пример (z = 5 m): R_1 5.385 m, R_2 8.602 m; α 32.661°, β 35.538°; σ_H = 8.461 kPa ($\psi = 1$), **16.921 kPa** ($\psi = 2$)

Профиль: на поверхности 0, с глубиной возрастает, на большой глубине приближается к $\psi q/2 = q$ (у основания 19.94 kPa)

Равнодействующая $P_H = \int \sigma_H dz$ = **443.49 kN/m**, $z_R = \int z\sigma_H dz / P_H$ = **13.68 m** (от поверхности грунта); при $\psi = 1$ P_H = 221.74 kN/m, z_R та же

Сопоставление: по мере удаления трапециевидной нагрузки от стены и увеличения её ширины равнодействующая уменьшается; верхняя граница — равномерная нагрузка (q H = 500 kN/m), нижний предельный случай — ступенчатая нагрузка, когда нагрузка становится круче

Список литературы

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; эта страница основана на данном источнике.

ПРИМЕЧАНИЕ

Все числовые примеры получены с помощью собственного расчётного ядра модуля; модуль даёт те же значения. Начальный пример модуля — стена с H = 25 m, x = 2 m, c = 5 m, q = 20 kPa.

GeoTerva

Геотехнические расчёты онлайн

От теории к практике

В GeoTerva вводятся собственная трапециевидная нагрузка, начальное расстояние, ширина и высота стены; модуль выдаёт эпюру давления, равнодействующую и глубину её приложения, три вида, пошаговое решение и отчёт.

Открыть модуль →

Страница теории →

Открыть на телефоне
Для пробных модулей регистрация не требуется.

Для использования на лекциях: info@geoterva.com