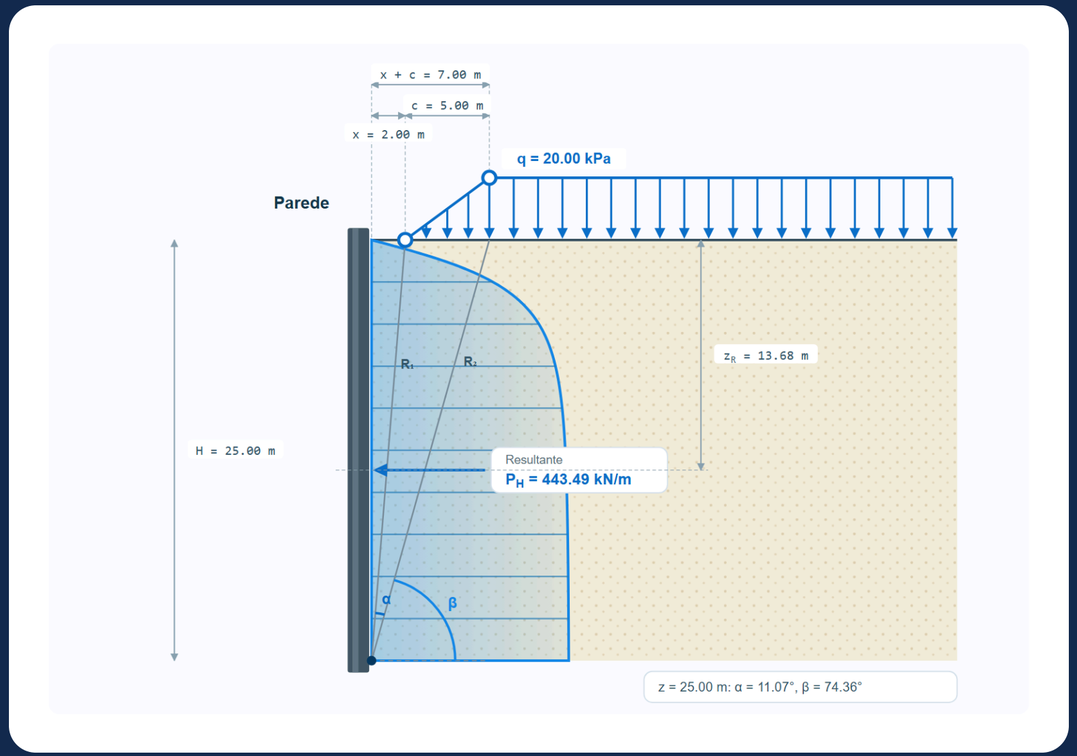
Apresentação de aula de geotecnia · Sobrecargas

Sobrecarga em rampa

Aula: carga em rampa que parte de zero e atinge um patamar; a ordenada em uma profundidade é resolvida à mão, e os perfis, a resultante e as variantes são apresentados em tabelas.

- Superposição de cargas lineares
- R_1, R_2, α, β
- Muro rígido ψ = 2
- Resultante e z_R
- Resolúvel à mão



Introdução

O que veremos nesta aula?

- A geometria da **carga em rampa**: começa em zero à distância **x** do muro, cresce até o valor q na largura **c** e prossegue, além disso, com q constante
- Determinar, em uma profundidade z, os raios $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$ e os ângulos **α, β** (em radianos)
- A forma fechada da pressão horizontal obtida pela **superposição de cargas lineares**: $\sigma_H = \psi\, q/(\pi c)\,[c\beta - x\alpha + 2z\,\ln(R_2/R_1)]$
- A diferença entre o **muro rígido** ($\psi = 2$) e o **meio semi-infinito** ($\psi = 1$)
- **Resultante P_H** e **profundidade de atuação z_R**: área e primeiro momento do diagrama; o efeito de x e de c

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: fórmula e justificativa

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Exemplo: H = 25 m, x = 2 m, c = 5 m, q = 20 kPa; muro rígido. Uma ordenada em z = 5 m é resolvida à mão.

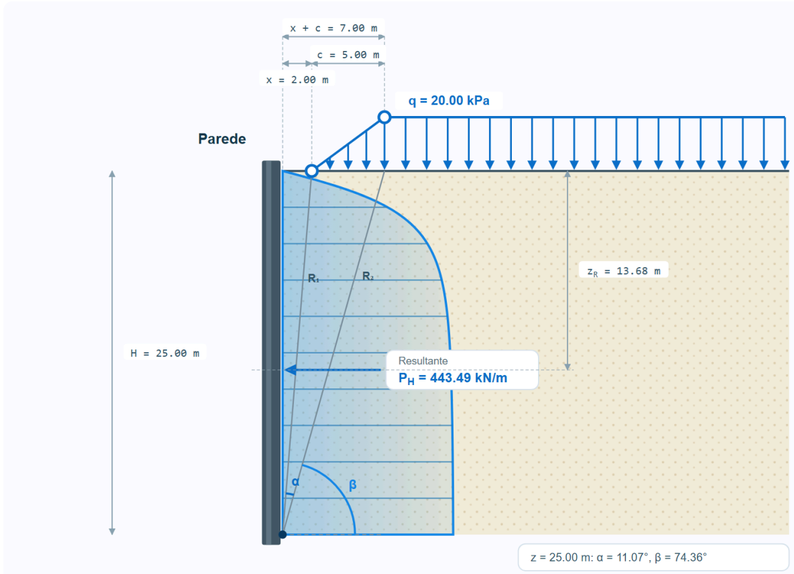
Sobrecarga em rampa atuando sobre o muro

TEORIA

A sobrecarga em rampa começa a uma distância horizontal **x** do muro

A pressão superficial cresce linearmente de zero até o valor pleno **q** ao longo da largura de rampa **c**; além de **x + c**, a sobrecarga prossegue com intensidade constante q

A carga é longa e paralela ao muro; a resultante é dada **por unidade de comprimento** do muro



H: altura total do muro

x: distância do muro ao início da rampa

c: largura horizontal ao longo da qual a carga cresce de 0 a q

q: intensidade da sobrecarga uniforme plena além da rampa

z: profundidade, a partir da superfície do solo, em que σ_H é calculado

Geometria na profundidade z

TEORIA

Na profundidade z, os comprimentos dos dois raios que vão do ponto no muro ao **início** e ao **fim** da rampa e os ângulos entre eles são apresentados a seguir

Na equação da pressão, os ângulos são tomados em **radianos**; os valores em graus podem ser exibidos na interface e no relatório de cálculo para facilitar a leitura

$$R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \qquad R_2 = \sqrt{(x + c)^2 + z^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x + c}{z} - \tan^{-1}\frac{x}{z} \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{x + c}{z}$$

Superposição de cargas lineares

TEORIA

A carga em rampa é uma série contínua de cargas lineares, cada uma de intensidade **w(s)·ds** (crescente na rampa, constante no patamar); somam-se as tensões horizontais elásticas (Flamant)

A rampa ascendente e o patamar produzem termos algébricos adicionais; estes se cancelam exatamente, restando **ângulos e um logaritmo**

$$\sigma_H = \psi \frac{2}{\pi} \int w(s) \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} ds$$

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{\pi c} \left[c\beta - x\alpha + 2z \ln \frac{R_2}{R_1} \right]$$

ψ = 1 corresponde a um meio semi-infinito (sem muro); **ψ = 2** é o muro rígido, indeslocável, que dobra a tensão horizontal: o padrão do módulo. σ_H é nula na superfície do terreno

Área e primeiro momento do diagrama

TEORIA

A **força resultante da sobrecarga** por unidade de comprimento do muro e a sua profundidade a partir da superfície do terreno correspondem à área e ao primeiro momento do diagrama; o módulo calcula numericamente ambas as integrais com precisão total

$$P_H = \int_0^H \sigma_H(z)\, dz$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z\, \sigma_H(z)\, dz}{P_H}$$

No exemplo, **P_H = 443.49 kN/m** (muro rígido) ou **221.74 kN/m** (meio semi-infinito); em ambos, **z_R = 13.68 m**, abaixo do nível do terreno

Seis etapas e uma ordenada

TEORIA

1 · definem-se H, x, c, q e escolhe-se ψ

2 · Seleciona-se uma profundidade **z** entre a superfície do terreno e a base do muro

3 · calculam-se R_1 e R_2; **4** · calculam-se α e β (radianos)

5 · calcula-se σ_H: substituem-se q, c, x, α, β, R_1, R_2

6 · repete-se e integra-se: perfil de pressão, depois P_H e z_R

$$z = 5\ \text{m}: \quad R_1 = 5.385\ \text{m} \quad R_2 = 8.602\ \text{m} \qquad \alpha = 32.661^\circ \quad \beta = 35.538^\circ$$

$$\sigma_H = \frac{20}{5\pi}\left[5(0.62025) - 2(0.57004) + 10\ln\frac{8.6023}{5.3852}\right] = 8.461\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1) \ \ \rightarrow \ \ 16.921\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2)$$

Enunciado

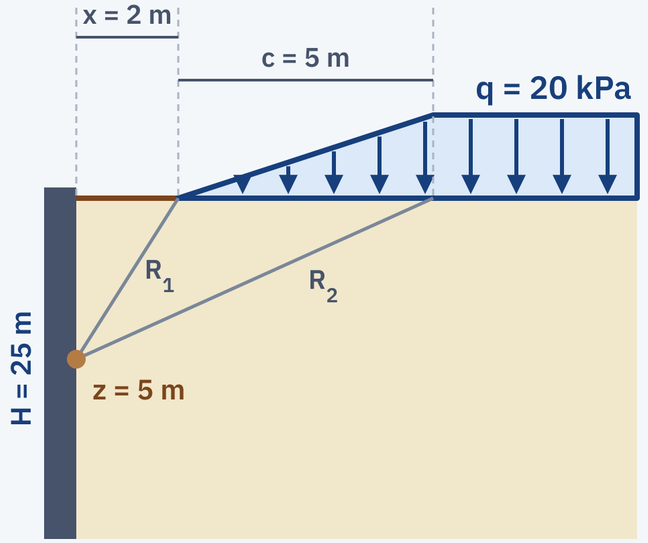
EXEMPLO

PEDE-SE

Na profundidade **z = 5 m**, **R_1**, **R_2**, **α**, **β** e a pressão horizontal **σ_H** (para dois valores de ψ); comparação com o módulo.

Dados

Muro e carga	$H = 25.0$ **m;** $x = 2.0$ **m;** $c = 5.0$ **m;** $q = 20.0$ **kPa**
Muro	**meio semi-infinito (**$\psi = 1$**) e muro rígido (**$\psi = 2$**)**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Raios que vão do ponto no muro ao início (x) e ao fim (x + c) da rampa

$$R_1 = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = \mathbf{5.3852}\ \mathrm{m}$$

$$R_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} = \mathbf{8.6023}\ \mathrm{m}$$

2 Ângulos (radianos)

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \tan^{-1}\frac{2}{5} = 0.95055 - 0.38051 = \mathbf{0.57004}\ \mathrm{rad}\ \ (32.661^\circ)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{7}{5} = 1.57080 - 0.95055 = \mathbf{0.62025}\ \mathrm{rad}\ \ (35.538^\circ)$$

O início da rampa é visto a partir do ponto no muro sob um ângulo de **32.66°** e o fim sob **35.54°**; os raios têm 5.385 m e 8.602 m de comprimento.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Meio semi-infinito (ψ = 1): os três termos entre colchetes

$$\sigma_H = \frac{q}{\pi c}\left[c\beta - x\alpha + 2z\ln\frac{R_2}{R_1}\right] = \frac{20}{5\pi}\left[5(0.62025) - 2(0.57004) + 10\ln\frac{8.6023}{5.3852}\right]$$

$$= 1.27324\,[3.1012 - 1.1401 + 4.6838] = 1.27324(6.6450) = \mathbf{8.461}\ \text{kPa}$$

4 Muro rígido (ψ = 2): o dobro do valor do meio semi-infinito

$$\sigma_H = 2 \times 8.461 = \mathbf{16.921}\ \text{kPa}$$

Em z = 5 m, **σ_H = 16.921 kPa** (muro rígido; 8.461 em meio semi-infinito). O módulo fornece o mesmo valor. O termo x·α entra com sinal negativo: uma rampa ascendente reduz a carga próxima ao muro em relação a uma faixa completa que começa em x.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

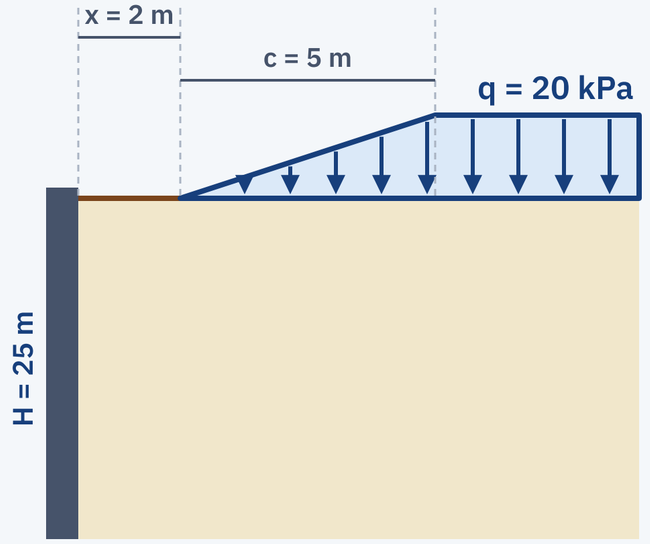
EXEMPLO

PEDE-SE

Perfil de pressões e o valor na base do muro; comportamento da pressão em grande profundidade (limite da fórmula quando z → ∞).

Dados

Modelo	**Rampa do Exemplo 1; muro rígido; tabela a cada $H/30 = 0.833$ m**
Em cada linha	**R_1, R_2, α, β e σ_H; os valores do meio semi-infinito são a metade dos valores do muro rígido**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

z (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	α (°)	β (°)	σ_H (kPa)
0.00	2.000	7.000	0.00	0.00	0.000
0.83	2.167	7.049	15.83	6.79	5.109
1.67	2.603	7.196	26.41	13.39	9.258
2.50	3.202	7.433	31.69	19.65	12.275
3.33	3.887	7.753	33.57	25.46	14.395
4.17	4.622	8.146	33.60	30.76	15.877
5.00	**5.385**	**8.602**	**32.66**	**35.54**	**16.921**
5.83	6.167	9.112	31.27	39.81	17.665
6.67	6.960	9.667	29.70	43.60	18.202
7.50	7.762	10.259	28.09	46.97	18.596
8.33	8.570	10.883	26.53	49.97	18.887
9.17	9.382	11.534	25.06	52.63	19.107
10.00	10.198	12.207	23.68	55.01	19.275
10.83	11.016	12.898	22.41	57.13	19.405
11.67	11.837	13.606	21.24	59.04	19.506
12.50	12.659	14.327	20.16	60.75	19.586
13.33	13.482	15.059	19.17	62.30	19.651
14.17	14.307	15.802	18.26	63.71	19.703
15.00	15.133	16.553	17.42	64.98	19.745
15.83	15.959	17.312	16.65	66.15	19.780
16.67	16.786	18.077	15.94	67.22	19.809
17.50	17.614	18.848	15.28	68.20	19.833
18.33	18.442	19.624	14.67	69.10	19.853
19.17	19.271	20.405	14.11	69.94	19.870
20.00	20.100	21.190	13.58	70.71	19.885
20.83	20.929	21.978	13.09	71.43	19.897
21.67	21.759	22.769	12.63	72.10	19.908
22.50	22.589	23.564	12.20	72.72	19.918
23.33	23.419	24.361	11.80	73.30	19.926
24.17	24.249	25.160	11.42	73.85	19.933
25.00	25.080	25.962	11.07	74.36	19.939

Solução (2/2)

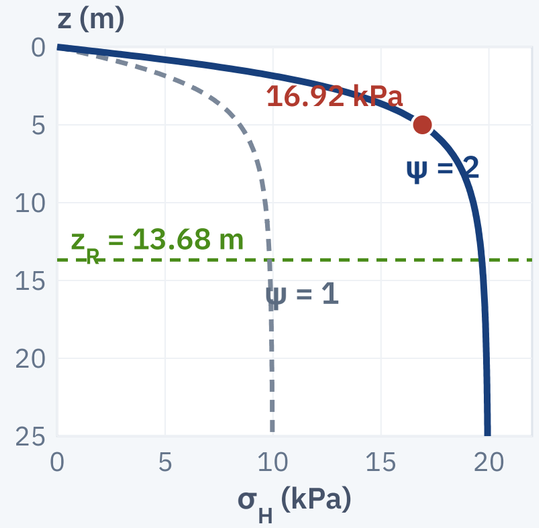
SOLUÇÃO

1 Na superfície e em profundidade

$$z = 0: \quad \sigma_H = 0 \qquad z = H = 25\ \text{m}: \quad \sigma_H = \mathbf{19.94}\ \text{kPa}$$

$$z \to \infty: \quad \alpha \to 0,\ \beta \to \tfrac{\pi}{2},\ 2z \ln \tfrac{R_2}{R_1} \to 0 \ \Rightarrow\ \sigma_H \to \psi\, \frac{q}{2}$$

A pressão é nula na superfície e **aumenta com a profundidade**: o valor máximo ocorre na base do muro (19.94 kPa). Em grande profundidade, $\sigma_H \to \psi q/2 =$ **q**: 19.99 em z = 50 m, 20.00 kPa em z = 1000 m (muro rígido). A ordenada em z = 5 m é 16.921 kPa (linha em negrito, Exemplo 1).



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

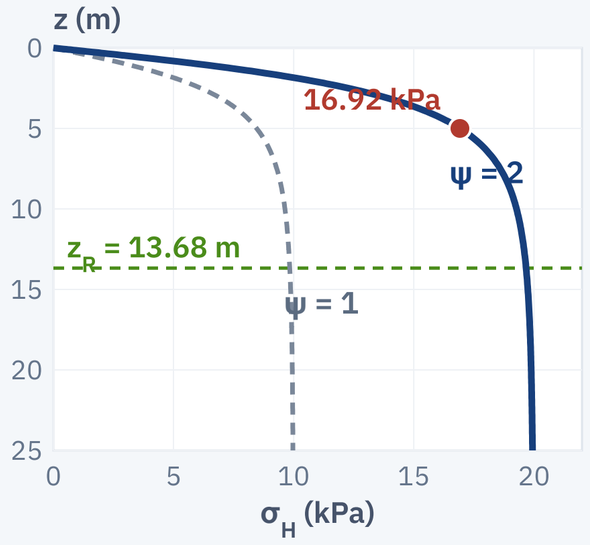
EXEMPLO

PEDE-SE

P_H e **z_R** (à mão, pela tabela); valores do meio semi-infinito; comparação com o resultado do módulo.

Dados

Modelo	**A rampa do Exemplo 1; muro rígido; a tabela $H/30$ do Exemplo 2 ($n = 30$, $h = H/30 = 0.8333$ m)**
Método	**Regra de Simpson; $z_R = \int z\,\sigma\,dz \,/\, P_H$**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

	σ_0	Σ ímpares (i = 1, 3, …, 29)	Σ pares (i = 2, 4, …, 28)	σ_{30}
σ_H (kPa)	0.000	266.553	255.220	19.939

1 Soma de Simpson e área

$$\Sigma = \sigma_0 + 4(266.553) + 2(255.220) + \sigma_{30} = 1{,}596.59$$

$$P_H \approx \frac{h}{3}\,\Sigma = \frac{0.8333}{3}(1{,}596.59) = \mathbf{443.50}\ \mathrm{kN/m}$$

Manualmente, **443.50 kN/m**; a integral precisa do módulo, **443.49 kN/m** (diferença de 0.002%). Em meio semi-infinito, a metade: **221.74 kN/m**.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

	$z_0\sigma_0$	Σ individual	Σ dupla	$z_{30}\sigma_{30}$
$z\sigma_H$ (kPa·m)	0.000	3,638.41	3,393.35	498.48

2 Primeiro momento e profundidade

$$\int z\,\sigma\,dz \approx \frac{0.8333}{3}\left[0 + 4(3{,}638.41) + 2(3{,}393.35) + 498.48\right] = 6{,}066.3\ \text{kN}$$

$$z_R = \frac{6{,}066.3}{443.50} = \mathbf{13.68}\ \text{m}\ \ (\text{a partir do terreno}) \qquad H - z_R = 11.32\ \text{m}\ (\text{a partir da base})$$

Manualmente, **z_R = 13.68 m**; o módulo fornece 13.68 m. A resultante de 443.49 kN/m atua a **13.68 m abaixo da superfície do terreno** (11.32 m acima da base); z_R não muda quando ψ muda.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

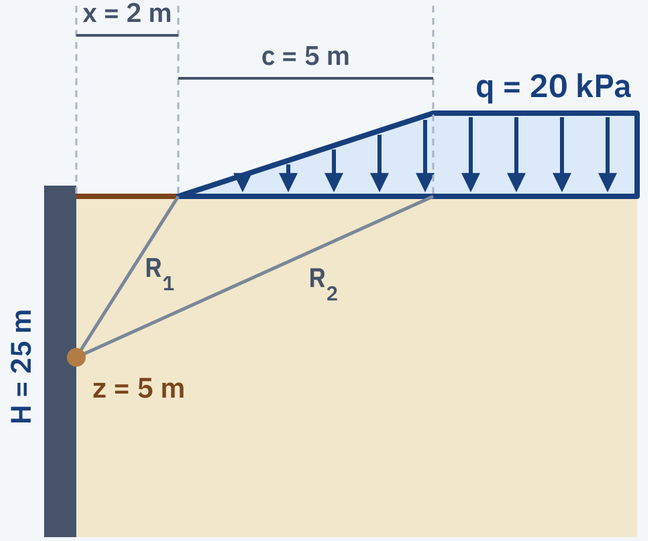
EXEMPLO

Dados

Modelo	**Exemplo 1: $z = 5$ m; meio semi-infinito ($\psi = 1$)**
Método	$\sigma_H = \frac{2}{\pi} \int w(s) \, \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} \, ds$**; na rampa** $w = q(s - x)/c$**, no platô** $w = q$
Cálculo	**rampa: Simpson ($n = 10$, $h = 0.5$ m); patamar: integral em forma fechada**

PEDE-SE

σ_H pela soma das contribuições da rampa e do platô, obtidas separadamente; comparação com a forma fechada do Exemplo 1.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

i	s (m)	w(s) (kPa)	f(s) = s²z/(s²+z²)² (1/m)	c	c·w·f
0	2.0	0.00	0.02378	1	0.00000
1	2.5	2.00	0.03200	4	0.25600
2	3.0	4.00	0.03893	2	0.31142
3	3.5	6.00	0.04414	4	1.05941
4	4.0	8.00	0.04759	2	0.76145
5	4.5	10.00	0.04945	4	1.97796
6	5.0	12.00	0.05000	2	1.20000
7	5.5	14.00	0.04955	4	2.77472
8	6.0	16.00	0.04837	2	1.54797
9	6.5	18.00	0.04671	4	3.36314
10	7.0	20.00	0.04474	1	0.89481
			Σ c·w·f =		**14.14688**

1 Integral das cargas lineares na rampa

$$I_{ramp} = \frac{h}{3}\sum c_i\, w_i f_i = \frac{0.5}{3}(14.14688) = \mathbf{2.3578}$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

2 Platô (s ≥ x + c = 7 m): integral em forma fechada com A(s) = ½[tan⁻¹(s/z) − sz/(s² + z²)]

$$A(7) = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{7}{5} - \frac{7(5)}{74}\right] = 0.23879 \qquad A(\infty) = \frac{\pi}{4} = 0.78540$$

$$I_{plateau} = q\,[A(\infty) - A(7)] = 20(0.78540 - 0.23879) = 10.9322$$

3 Total e ψ

$$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\,(I_{ramp} + I_{plateau}) = \frac{2}{\pi}(2.3578 + 10.9322) = \mathbf{8.4607}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1)$$

$$\psi = 2: \quad \sigma_H = \mathbf{16.921}\ \text{kPa}$$

A superposição fornece **8.4607 kPa**; a forma fechada (Exemplo 1), **8.4607 kPa**. Os dois caminhos são idênticos: os termos entre colchetes são a soma das integrais da rampa e do patamar.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

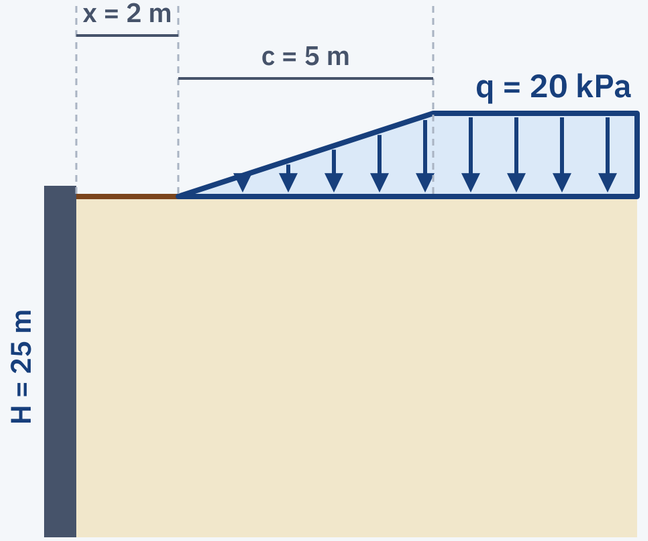
EXEMPLO

PEDE-SE

Para cada caso, **P_H**, **z_R** e a pressão na base; valores do meio semi-infinito; limite superior (carga uniforme).

Dados

Modelo	$H = 25.0$ **m;** $q = 20$ **kPa; muro rígido; apenas um parâmetro varia por vez**
Variáveis	**distância inicial** $x = 0; 2; 5; 10$ **m (**$c = 5$ **m) e largura** $c = 1; 5; 10; 20$ **m (**$x = 2$ **m)**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

x (m), c = 5	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	H − z_R (m)	$\sigma_H(H)$ (kPa)
0	468.38	234.19	13.19	11.81	19.98
2	443.49	221.74	13.68	11.32	19.94
5	407.49	203.75	14.28	10.72	19.78
10	352.75	176.38	15.00	10.00	19.17

c (m), x = 2	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	H − z_R (m)	$\sigma_H(H)$ (kPa)
1	468.28	234.14	13.22	11.78	19.99
5	443.49	221.74	13.68	11.32	19.94
10	414.10	207.05	14.11	10.89	19.76
20	362.68	181.34	14.67	10.33	19.02

À medida que a carga em rampa se afasta do muro (x ↑) ou cresce mais lentamente (c ↑), **a resultante diminui e z_R se aprofunda**; a pressão na base é sempre próxima de q = 20 kPa.

Os valores para ψ = 1 correspondem à metade dos do muro rígido.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

1 Limite superior: a carga começa na face do muro (x = 0) e passa imediatamente a q (c → 0): sobrecarga uniforme

$$\sigma_H = \psi\,\frac{q}{2} = q \quad (\text{em qualquer z}) \;\Rightarrow\; P_H = qH = 20 \times 25 = \mathbf{500}\ \text{kN/m}, \quad z_R = \frac{H}{2} = 12.5\ \text{m}$$

2 Largura da rampa c → 0: carga em degrau a partir de x = 2 m

$$c = 0.001\ \text{m}: \quad P_H = 474.58\ \text{kN/m}, \quad z_R = 13.09\ \text{m}$$

$$\text{fórmula da faixa } (x_2 \to \infty): \quad P_H = 474.59\ \text{kN/m}, \quad z_R = 13.09\ \text{m}$$

A rampa do Exemplo 1 situa-se entre esses dois limites: **443.49 kN/m**, isto é, 88.7% do limite superior de 500 kN/m. À medida que a rampa se torna mais íngreme, o resultado se aproxima da solução em faixa da carga em degrau: a mesma superposição. (O módulo fornece 499.99 kN/m para x = 0, c = 0.001 m.)

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Resumo

Pontos-chave

$\sigma_H = \psi\, q/(\pi c)\,[c\beta - x\alpha + 2z \ln(R_2/R_1)]$; $R_1 = \sqrt{(x^2 + z^2)}$, $R_2 = \sqrt{((x + c)^2 + z^2)}$, $\alpha = \tan^{-1}((x + c)/z) - \tan^{-1}(x/z)$, $\beta = \pi/2 - \tan^{-1}((x + c)/z)$ (radianos); $\psi = 2$ para muro rígido, $\psi = 1$ para meio semi-infinito

Exemplo (z = 5 m): R_1 5.385 m, R_2 8.602 m; α 32.661°, β 35.538°; σ_H = 8.461 kPa ($\psi = 1$), **16.921 kPa** ($\psi = 2$)

Perfil: 0 na superfície, aumenta com a profundidade e se aproxima de $\psi q/2 = q$ em profundidade (19.94 kPa na base)

Resultante $P_H = \int \sigma_H dz$ = **443.49 kN/m**, $z_R = \int z\sigma_H dz / P_H$ = **13.68 m** (a partir da superfície do terreno); para $\psi = 1$, P_H = 221.74 kN/m, z_R igual

Comparação: a resultante diminui à medida que a rampa se afasta do muro e se alarga; o limite superior é a carga uniforme (q H = 500 kN/m) e, no extremo inferior, quando a rampa se torna mais íngreme, a carga em degrau

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; esta página segue essa referência.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o mecanismo de cálculo do próprio módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O exemplo inicial do módulo é o muro com H = 25 m, x = 2 m, c = 5 m, q = 20 kPa.

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Informar a própria carga em rampa, a distância inicial, a largura e a altura do muro no GeoTerva; o módulo fornece, em conjunto, o diagrama de pressões, a resultante e a sua profundidade de atuação, as três vistas, a solução passo a passo e o relatório.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.