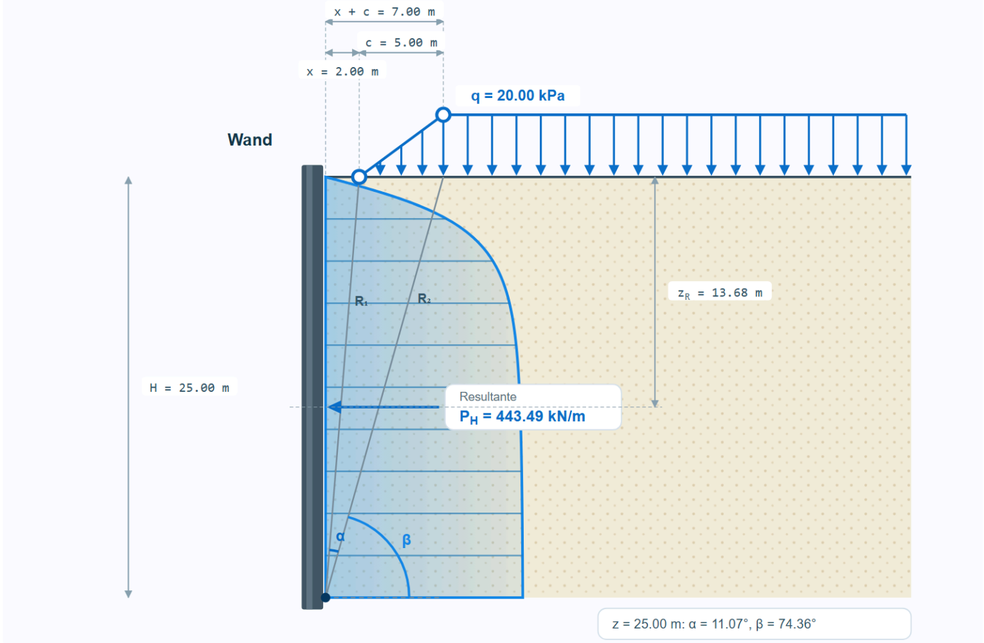
Geotechnisch college · Bovenbelastingen

Trapeziumbelasting als bovenbelasting

College: een rampenbelasting die van nul begint en een plateau bereikt; de ordinaat op een gegeven diepte wordt met de hand opgelost, met profielen, resultante en varianten in tabellen.

- Superpositie van lijnbelastingen
- R_1, R_2, α, β
- Rigide wand ψ = 2
- Resultante en z_R
- Handmatig oplosbaar



Inleiding

Wat leren we in dit college?

De geometrie van de **trapeziumbelasting**: begint bij nul op afstand **x** van de muur, stijgt over breedte **c** tot de waarde q en loopt daarna door met constante q

Het bepalen van de stralen $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$ en de hoeken **α, β** op een diepte z (radialen)

De gesloten vorm van de horizontale druk die uit de **superpositie van lijnlasten** volgt: $\sigma_H = \psi\, q/(\pi c)\, [c\beta - x\alpha + 2z \ln(R_2/R_1)]$

Het verschil tussen een **rigide wand** (ψ = 2) en een **half-oneindig medium** (ψ = 1)

Resultante P_H en **aangrijpingsdiepte z_R**: de oppervlakte en het eerste moment van het diagram; de invloed van x en c

COLLEGESTRUCTUUR

Elk onderwerp wordt in **drie stappen** behandeld:

1 · **Theorie**: formule en onderbouwing

2 · **Opgave**: gegeven en gevraagd

3 · **Oplossing**: stap voor stap, met getallen

Voorbeeld: H = 25 m, x = 2 m, c = 5 m, q = 20 kPa; rigide wand. Eén ordinaat bij z = 5 m wordt met de hand opgelost.

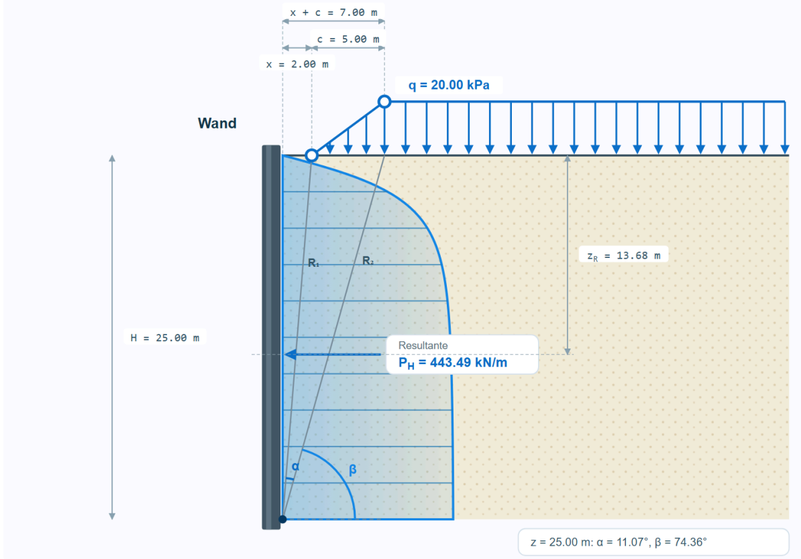
Trapeziumvormige bovenbelasting op de wand

THEORIE

De trapeziumbelasting begint op horizontale afstand **x** van de keermuur

De oppervlaktedruk neemt over de breedte **c** van de helling lineair toe van nul tot de volledige waarde **q**; voorbij **x + c** gaat de bovenbelasting door met een constante intensiteit q

De belasting is lang en evenwijdig aan de wand; de resultante wordt **per lengte-eenheid** van de wand gegeven



H: totale wandhoogte
x: afstand van de wand tot het begin van de ramp
c: horizontale breedte waarin de belasting van 0 tot q toeneemt
q: volledige gelijkmatig verdeelde bovenbelasting voorbij de ramp
z: diepte vanaf het maaiveld waarop σ_H wordt berekend

Geometrie op diepte z

THEORIE

Op diepte z zijn hieronder de lengten van de twee stralen vanaf het punt op de muur naar het **begin** en het **einde** van de ramp, en de hoeken daartussen, gegeven

In de drukvergelijking worden de hoeken in **radialen** genomen; waarden in graden kunnen voor de leesbaarheid in de interface en het berekeningsrapport worden getoond

$$R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \qquad R_2 = \sqrt{(x+c)^2 + z^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x+c}{z} - \tan^{-1}\frac{x}{z} \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{x+c}{z}$$

Superpositie van lijnbelastingen

THEORIE

De trapeziumbelasting is een continue reeks lijnlasten, elk met een intensiteit **w(s)·ds** (toenemend op de helling, constant op het plateau); de elastische horizontale spanningen (Flamant) worden gesommeerd

De stijgende helling en het plateau leveren extra algebraïsche termen op; deze heffen elkaar exact op, zodat **hoeken en een logaritme** overblijven

$$\sigma_H = \psi \frac{2}{\pi} \int w(s) \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} \, ds$$

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{\pi c} \left[c\beta - x\alpha + 2z \ln \frac{R_2}{R_1} \right]$$

ψ = 1 is een halfoneindig medium (geen wand); **ψ = 2** is een starre, niet-meegevende wand die de horizontale spanning verdubbelt: de standaardwaarde van de module. σ_H is nul aan het grondoppervlak

Oppervlakte en eerste moment van het diagram

THEORIE

De **resulterende bovenbelastingskracht** per eenheidslengte van de wand en de diepte daarvan onder het maaiveld zijn de oppervlakte en het eerste moment van het diagram; de module berekent beide integralen numeriek met volledige precisie

$$P_H = \int_0^H \sigma_H(z)\,dz$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z\,\sigma_H(z)\,dz}{P_H}$$

In het voorbeeld **P_H = 443.49 kN/m** (rigide wand) of **221.74 kN/m** (halfoneindig medium); in beide gevallen **z_R = 13.68 m**, onder het maaiveld

Zes stappen en één ordinaat

THEORIE

1 · H, x, c, q worden gedefinieerd en ψ wordt gekozen

2 · Kies een **diepte z** tussen het maaiveld en de voet van de muur

3 · R_1 en R_2 worden berekend; **4** · α en β worden berekend (radialen)

5 · σ_H wordt berekend: q, c, x, α, β, R_1, R_2 worden ingevuld

6 · Itereren en integreren: druksprofiel, vervolgens P_H en z_R

$$z = 5\ \text{m}: \quad R_1 = 5.385\ \text{m} \quad R_2 = 8.602\ \text{m} \qquad \alpha = 32.661^\circ \quad \beta = 35.538^\circ$$

$$\sigma_H = \frac{20}{5\pi}\left[5(0.62025) - 2(0.57004) + 10\ln\frac{8.6023}{5.3852}\right] = 8.461\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1) \ \ \rightarrow \ \ 16.921\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2)$$

Opgave

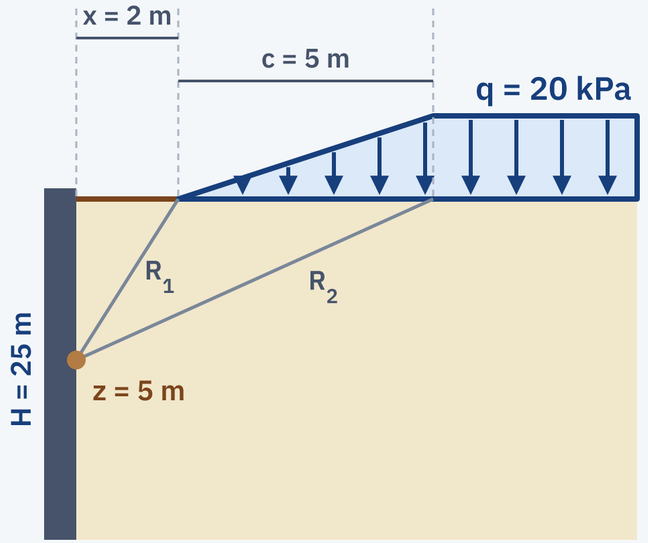
VOORBEELD

Gegeven

Keermuur en belasting	$H = 25.0$ **m;** $x = 2.0$ **m;** $c = 5.0$ **m;** $q = 20.0$ **kPa**
Wand	**half-oneindig medium ($\psi = 1$) en starre wand ($\psi = 2$)**

GEVRAAGD

Op diepte **z = 5 m** de waarden **R_1, R_2, α, β** en de horizontale druk **σ_H** (voor twee waarden van ψ); vergelijking met de module.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Stralen vanaf het punt op de wand naar het begin (x) en het einde (x + c) van de trapeziumbelasting

$$R_1 = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = \mathbf{5.3852}\ \mathrm{m}$$

$$R_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} = \mathbf{8.6023}\ \mathrm{m}$$

2 Hoeken (radialen)

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \tan^{-1}\frac{2}{5} = 0.95055 - 0.38051 = \mathbf{0.57004}\ \mathrm{rad}\ \ (32.661^\circ)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{7}{5} = 1.57080 - 0.95055 = \mathbf{0.62025}\ \mathrm{rad}\ \ (35.538^\circ)$$

Het begin van de ramp wordt vanuit het punt op de muur onder een hoek van **32.66°** gezien, het einde onder **35.54°**; de stralen zijn 5.385 en 8.602 m lang.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

3 Half-oneindig medium (ψ = 1): de drie termen tussen de haken

$$\sigma_H = \frac{q}{\pi c}\left[c\beta - x\alpha + 2z\ln\frac{R_2}{R_1}\right] = \frac{20}{5\pi}\left[5(0.62025) - 2(0.57004) + 10\ln\frac{8.6023}{5.3852}\right]$$

$$= 1.27324\,[3.1012 - 1.1401 + 4.6838] = 1.27324(6.6450) = \mathbf{8.461}\ \text{kPa}$$

4 Rigide wand (ψ = 2): tweemaal de waarde van het halfoneindig medium

$$\sigma_H = 2 \times 8.461 = \mathbf{16.921}\ \text{kPa}$$

Op z = 5 m is **σ_H = 16.921 kPa** (starre wand; 8.461 in een half-oneindig medium). De module geeft dezelfde waarde. De term x·α komt met een minteken binnen: een stijgende ramp vermindert de belasting nabij de wand ten opzichte van een volledige strook vanaf x.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

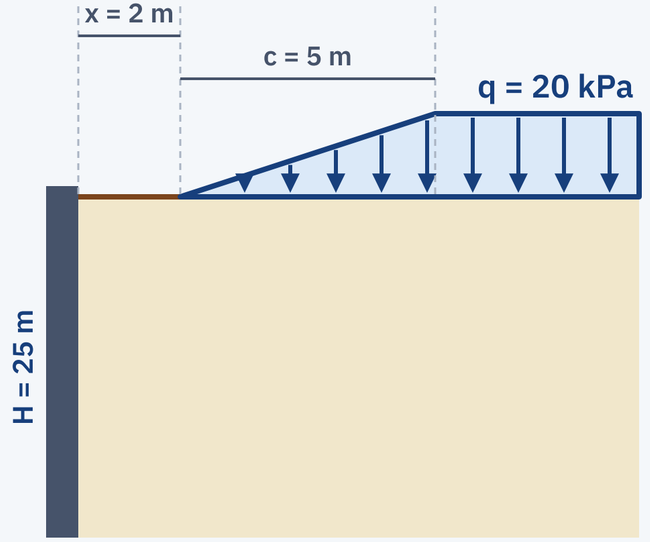
VOORBEELD

Gegeven

Model	**Trapeziumbelasting uit Voorbeeld 1; stijve wand; tabel bij elke $H/30 = 0.833$ m**
Op elke rij	**R_1, R_2, α, β en σ_H; de waarden voor het half-oneindige medium zijn de helft van die voor de starre wand**

GEVRAAGD

Drukprofiel en de waarde aan de voet van de muur; het gedrag van de druk op diepte (de z → ∞-limiet van de formule).



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

z (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	α (°)	β (°)	σ_H (kPa)
0.00	2.000	7.000	0.00	0.00	0.000
0.83	2.167	7.049	15.83	6.79	5.109
1.67	2.603	7.196	26.41	13.39	9.258
2.50	3.202	7.433	31.69	19.65	12.275
3.33	3.887	7.753	33.57	25.46	14.395
4.17	4.622	8.146	33.60	30.76	15.877
5.00	**5.385**	**8.602**	**32.66**	**35.54**	**16.921**
5.83	6.167	9.112	31.27	39.81	17.665
6.67	6.960	9.667	29.70	43.60	18.202
7.50	7.762	10.259	28.09	46.97	18.596
8.33	8.570	10.883	26.53	49.97	18.887
9.17	9.382	11.534	25.06	52.63	19.107
10.00	10.198	12.207	23.68	55.01	19.275
10.83	11.016	12.898	22.41	57.13	19.405
11.67	11.837	13.606	21.24	59.04	19.506
12.50	12.659	14.327	20.16	60.75	19.586
13.33	13.482	15.059	19.17	62.30	19.651
14.17	14.307	15.802	18.26	63.71	19.703
15.00	15.133	16.553	17.42	64.98	19.745
15.83	15.959	17.312	16.65	66.15	19.780
16.67	16.786	18.077	15.94	67.22	19.809
17.50	17.614	18.848	15.28	68.20	19.833
18.33	18.442	19.624	14.67	69.10	19.853
19.17	19.271	20.405	14.11	69.94	19.870
20.00	20.100	21.190	13.58	70.71	19.885
20.83	20.929	21.978	13.09	71.43	19.897
21.67	21.759	22.769	12.63	72.10	19.908
22.50	22.589	23.564	12.20	72.72	19.918
23.33	23.419	24.361	11.80	73.30	19.926
24.17	24.249	25.160	11.42	73.85	19.933
25.00	25.080	25.962	11.07	74.36	19.939

Oplossing (2/2)

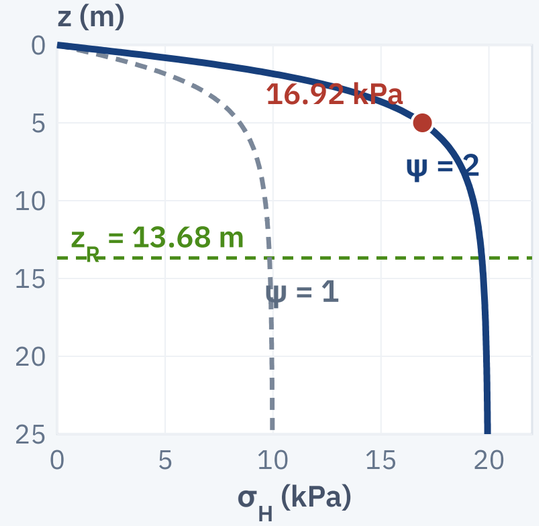
OPLOSSING

1 Aan het oppervlak en op diepte

$$z = 0: \quad \sigma_H = 0 \qquad z = H = 25\ \text{m}: \quad \sigma_H = \mathbf{19.94}\ \text{kPa}$$

$$z \to \infty: \quad \alpha \to 0,\ \beta \to \tfrac{\pi}{2},\ 2z \ln \tfrac{R_2}{R_1} \to 0 \ \Rightarrow\ \sigma_H \to \psi\, \frac{q}{2}$$

De druk is nul aan het oppervlak en **neemt toe met de diepte**: de grootste waarde ligt aan de voet van de wand (19.94 kPa). Op diepte geldt $\sigma_H \to \psi q/2 =$ **q**: 19.99 bij z = 50 m, 20.00 kPa bij z = 1000 m (rigide wand). De ordinaat bij z = 5 m is 16.921 kPa (vette rij, Voorbeeld 1).



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

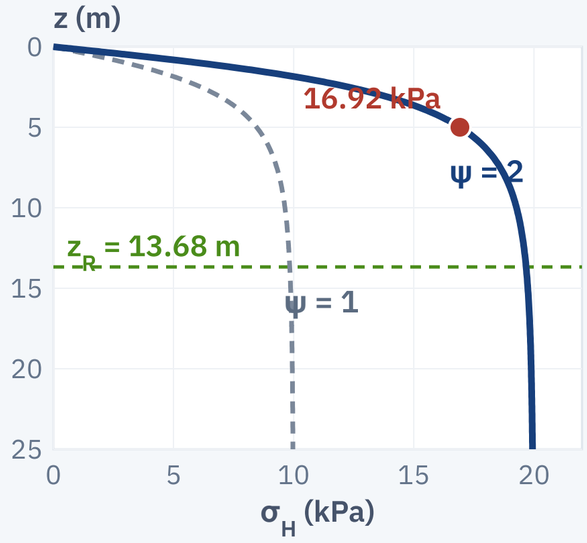
VOORBEELD

Gegeven

Model	**De ramp uit Voorbeeld 1; starre wand; de $H/30$-tabel van Voorbeeld 2 ($n = 30$, $h = H/30 = 0.8333$ m)**
Methode	**Regel van Simpson; $z_R = \int z\,\sigma\,dz \,/\, P_H$**

GEVRAAGD

P_H en **z_R** (handmatig, uit de tabel); waarden voor een halfoneindig medium; vergelijking met het resultaat van de module.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

	σ_0	Σ oneven (i = 1, 3, …, 29)	Σ even (i = 2, 4, …, 28)	σ_{30}
σ_H (kPa)	0.000	266.553	255.220	19.939

1 Simpson-som en oppervlak

$$\Sigma = \sigma_0 + 4(266.553) + 2(255.220) + \sigma_{30} = 1{,}596.59$$

$$P_H \approx \frac{h}{3}\,\Sigma = \frac{0.8333}{3}(1{,}596.59) = \mathbf{443.50}\ \mathrm{kN/m}$$

Handmatig **443.50 kN/m**; de nauwkeurige integraal van de module **443.49 kN/m** (verschil 0.002%). In een half-oneindig medium de helft daarvan: **221.74 kN/m**.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

	$z_0\sigma_0$	Σ enkel	Σ dubbel	$z_{30}\sigma_{30}$
$z\sigma_H$ (kPa·m)	0.000	3,638.41	3,393.35	498.48

2 Eerste moment en diepte

$$\int z\,\sigma\,dz \approx \frac{0.8333}{3}\left[0 + 4(3{,}638.41) + 2(3{,}393.35) + 498.48\right] = 6{,}066.3\ \text{kN}$$

$$z_R = \frac{6{,}066.3}{443.50} = \mathbf{13.68}\ \text{m}\ \ (\text{vanaf het maaiveld}) \qquad H - z_R = 11.32\ \text{m}\ (\text{vanaf de zool})$$

Met de hand **z_R = 13.68 m**; de module 13.68 m. De resultante 443.49 kN/m grijpt aan **13.68 m onder het maaiveld** (11.32 m boven de basis); bij verandering van ψ verandert z_R niet.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

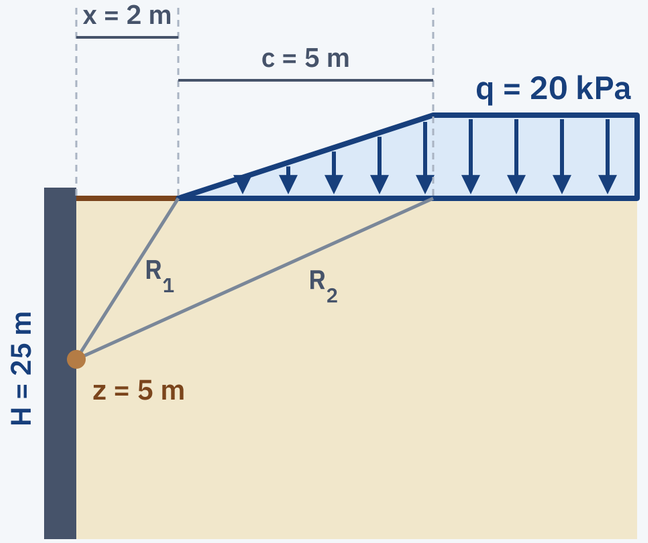
VOORBEELD

Gegeven

Model	**Voorbeeld 1: $z = 5$ m; halfoneindig medium ($\psi = 1$)**
Methode	$\sigma_H = \frac{2}{\pi} \int w(s) \, \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} \, ds$**; $w = q(s - x)/c$ op de helling, $w = q$ op het plateau**
Berekening	**helling: Simpson ($n = 10$, $h = 0.5$ m); plateau: gesloten integraal**

GEVRAAGD

σ_H door de bijdragen van de helling en het plateau afzonderlijk te bepalen en op te tellen; vergelijking met de gesloten vorm van Voorbeeld 1.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

i	s (m)	w(s) (kPa)	f(s) = s²z/(s²+z²)² (1/m)	c	c·w·f
0	2.0	0.00	0.02378	1	0.00000
1	2.5	2.00	0.03200	4	0.25600
2	3.0	4.00	0.03893	2	0.31142
3	3.5	6.00	0.04414	4	1.05941
4	4.0	8.00	0.04759	2	0.76145
5	4.5	10.00	0.04945	4	1.97796
6	5.0	12.00	0.05000	2	1.20000
7	5.5	14.00	0.04955	4	2.77472
8	6.0	16.00	0.04837	2	1.54797
9	6.5	18.00	0.04671	4	3.36314
10	7.0	20.00	0.04474	1	0.89481
			Σ c·w·f =		**14.14688**

1 Integraal van de lijnbelastingen op de helling

$$I_{ramp} = \frac{h}{3}\sum c_i\, w_i f_i = \frac{0.5}{3}(14.14688) = \mathbf{2.3578}$$

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

2 Plateau (s ≥ x + c = 7 m): gesloten integraal met A(s) = ½[tan⁻¹(s/z) − sz/(s² + z²)]

$$A(7) = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{7}{5} - \frac{7(5)}{74}\right] = 0.23879 \qquad A(\infty) = \frac{\pi}{4} = 0.78540$$

$$I_{plateau} = q\,[A(\infty) - A(7)] = 20(0.78540 - 0.23879) = 10.9322$$

3 Totaal en ψ

$$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\,(I_{ramp} + I_{plateau}) = \frac{2}{\pi}(2.3578 + 10.9322) = \mathbf{8.4607}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1)$$

$$\psi = 2: \quad \sigma_H = \mathbf{16.921}\ \text{kPa}$$

Superpositie geeft **8.4607 kPa**; de gesloten vorm (Voorbeeld 1) geeft **8.4607 kPa**. Beide wegen zijn identiek: de termen tussen de vierkante haken zijn de som van de integralen van de helling en het plateau.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

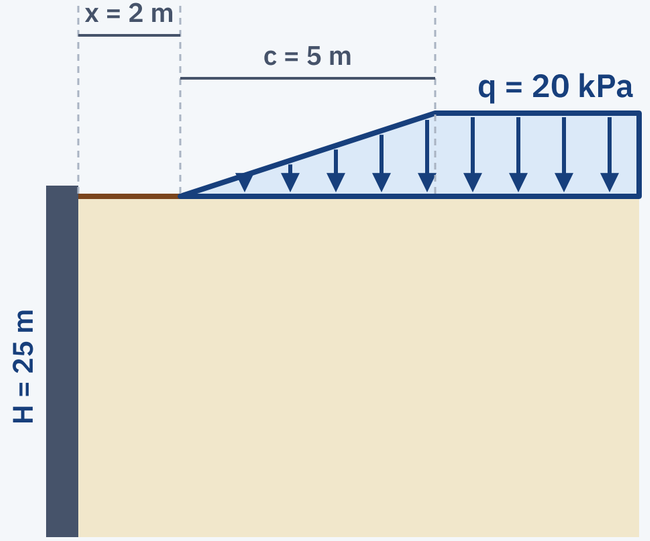
VOORBEELD

Gegeven

Model	$H = 25.0$ **m;** $q = 20$ **kPa; starre wand; telkens verandert slechts één grootheid**
Variabelen	**beginafstand** $x = 0;\ 2;\ 5;\ 10$ **m (**$c = 5$ **m) en breedte** $c = 1;\ 5;\ 10;\ 20$ **m (**$x = 2$ **m)**

GEVRAAGD

Voor elke situatie $\mathbf{P_H}$, $\mathbf{z_R}$, de druk aan de voet; waarden voor het half-oneindige medium; bovengrens (gelijkmatig verdeelde belasting).



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

x (m), c = 5	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	H − z_R (m)	σ_H(H) (kPa)
0	468.38	234.19	13.19	11.81	19.98
2	443.49	221.74	13.68	11.32	19.94
5	407.49	203.75	14.28	10.72	19.78
10	352.75	176.38	15.00	10.00	19.17

c (m), x = 2	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	H − z_R (m)	σ_H(H) (kPa)
1	468.28	234.14	13.22	11.78	19.99
5	443.49	221.74	13.68	11.32	19.94
10	414.10	207.05	14.11	10.89	19.76
20	362.68	181.34	14.67	10.33	19.02

Naarmate de rampe zich van de wand verwijdert (x ↑) of langzaam stijgt (c ↑), **neemt de resultante af en wordt z_R dieper**; de druk aan de basis ligt steeds dicht bij q = 20 kPa. De waarden voor ψ = 1 zijn de helft van die voor een starre wand.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

1 Bovengrens: de belasting begint bij het wandvlak (x = 0) en wordt onmiddellijk q (c → 0): gelijkmatig verdeelde bovenbelasting

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{2} = q \quad (\text{bij elke z}) \;\Rightarrow\; P_H = qH = 20 \times 25 = \mathbf{500}\ \text{kN/m}, \quad z_R = \frac{H}{2} = 12.5\ \text{m}$$

2 Rampbreedte c → 0: stapbelasting beginnend bij x = 2 m

$$c = 0.001\ \text{m}: \quad P_H = 474.58\ \text{kN/m}, \quad z_R = 13.09\ \text{m}$$

$$\text{strookformule } (x_2 \to \infty): \quad P_H = 474.59\ \text{kN/m}, \quad z_R = 13.09\ \text{m}$$

De trapeziumbelasting van Voorbeeld 1 ligt tussen deze twee grenzen: **443.49 kN/m**, dat is 88.7% van de bovengrens van 500 kN/m. Naarmate de trapeziumbelasting steiler wordt, nadert het resultaat van de stapsgewijze belasting de strookoplossing: dezelfde superpositie. (De module geeft 499.99 kN/m voor x = 0, c = 0.001 m.)

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Samenvatting

Belangrijkste punten

$\sigma_H = \psi\, q/(\pi c)\,[c\beta - x\alpha + 2z \ln(R_2/R_1)]$; $R_1 = \sqrt{(x^2 + z^2)}$, $R_2 = \sqrt{((x + c)^2 + z^2)}$, $\alpha = \tan^{-1}((x + c)/z) - \tan^{-1}(x/z)$, $\beta = \pi/2 - \tan^{-1}((x + c)/z)$ (radialen); $\psi = 2$ voor een rigide wand, $\psi = 1$ voor een half-oneindig medium

Voorbeeld (z = 5 m): R_1 5.385 m, R_2 8.602 m; α 32.661°, β 35.538°; σ_H = 8.461 kPa ($\psi = 1$), **16.921 kPa** ($\psi = 2$)

Profiel: 0 aan het oppervlak, neemt toe met de diepte, nadert op grote diepte $\psi q/2 = q$ (19.94 kPa aan de basis)

Resultante $P_H = \int \sigma_H dz$ = **443.49 kN/m**, $z_R = \int z\sigma_H dz / P_H$ = **13.68 m** (vanaf het maaiveld); voor $\psi = 1$: P_H = 221.74 kN/m, z_R gelijk

Vergelijking: de resultante neemt af naarmate de trapeziumbelasting zich van de muur verwijdert en breder wordt; de bovengrens is de gelijkmatig verdeelde belasting (q H = 500 kN/m), de ondergrens is de stapbelasting wanneer de trapeziumbelasting steiler wordt

Literatuur

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; deze pagina volgt deze methode.

OPMERKING

Alle numerieke voorbeelden zijn geproduceerd met de eigen berekeningsmodule van de software; de module geeft dezelfde waarden. Het openingsvoorbeeld van de module is de wand met H = 25 m, x = 2 m, c = 5 m, q = 20 kPa.

GeoTerva

Online geotechnische berekeningen

Van theorie naar praktijk

Voer uw eigen trapeziumbelasting, beginafstand, breedte en wandhoogte in GeoTerva in; de module geeft samen het drukdiagram, de resultante en de aangrijpingsdiepte, drie weergaven, de stapsgewijze oplossing en het rapport.

Module openen →

Theoriepagina →

Openen op de smartphone

Proefmodules vereisen geen registratie.

Wilt u ze in uw colleges gebruiken: info@geoterva.com