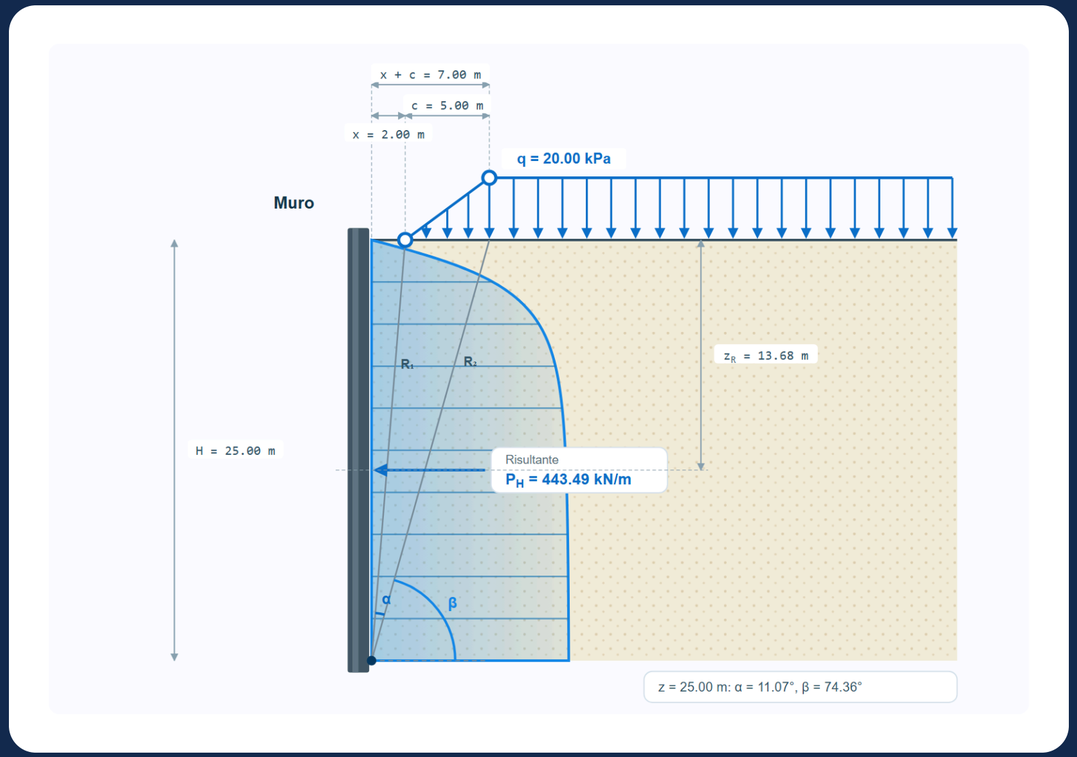
Lezione di geotecnica · Sovraccarichi

Carico a rampa

Lezione: carico a rampa che parte da zero e raggiunge un plateau; l'ordinata a una data profondità si risolve a mano, con profili, risultante e varianti presentati in tabelle.

- Sovrapposizione dei carichi lineari
- R_1, R_2, α, β
- Muro rigido ψ = 2
- Risultante e z_R
- Risolvibile a mano



Introduzione

Che cosa si impara in questa lezione?

- La geometria del **carico a rampa**: inizia da zero alla distanza **x** dal muro, cresce fino al valore q sulla larghezza **c** e oltre continua con q costante
- Determinare i raggi $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$ e gli angoli **α, β** a una profondità z (radianti)
- La forma chiusa della spinta laterale derivante dalla **sovrapposizione dei carichi lineari**: $\sigma_H = \psi\, q/(\pi c)\, [c\beta - x\alpha + 2z \ln(R_2/R_1)]$
- La differenza tra **muro rigido** (ψ = 2) e **mezzo semi-infinito** (ψ = 1)
- **Risultante P_H** e **profondità di applicazione z_R**: l'area e il momento del primo ordine del diagramma; l'effetto di x e c

SVOLGIMENTO DELLA LEZIONE

Ogni argomento è trattato in **tre passaggi**:

1 · **Teoria**: formula e relativa motivazione

2 · **Traccia**: dati e richiesto

3 · **Soluzione**: passo per passo, con i numeri

Esempio: H = 25 m, x = 2 m, c = 5 m, q = 20 kPa; muro rigido. Un'ordinata a z = 5 m è risolta manualmente.

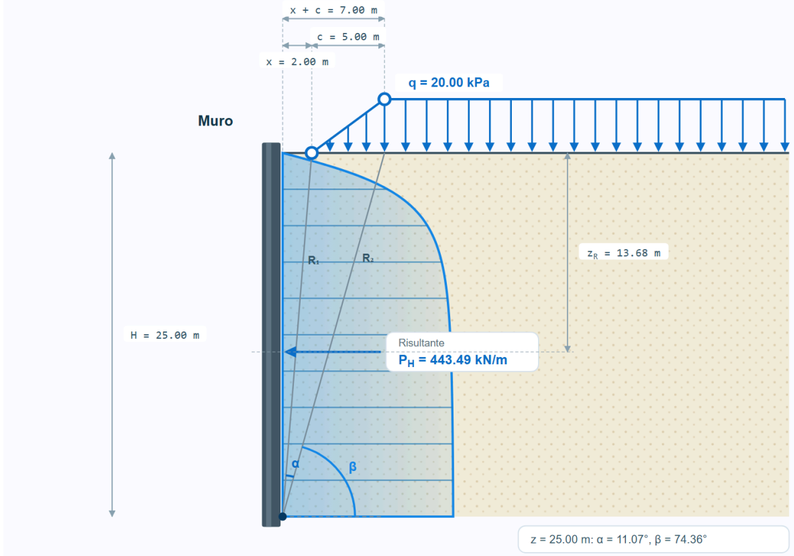
Carico a rampa agente sul muro

TEORIA

Il sovraccarico a rampa inizia a una distanza orizzontale **x** dal muro

La pressione superficiale cresce linearmente da zero al valore pieno **q** lungo la larghezza della rampa **c**; oltre **x + c** il sovraccarico prosegue con intensità costante q

Il carico è lungo e parallelo al muro; la risultante è riferita all'**unità di lunghezza** del muro



H: altezza totale del muro
x: distanza dal muro all'inizio della rampa
c: larghezza orizzontale su cui il carico passa da 0 a q
q: intensità del sovraccarico uniforme a valle della rampa
z: profondità dalla superficie del terreno alla quale si calcola σ_H

Geometria alla profondità z

TEORIA

Alla profondità z, sono riportate di seguito le lunghezze dei due raggi che dal punto sul muro vanno all'**inizio** e alla **fine** della rampa, e gli angoli tra essi compresi

Nell'equazione delle pressioni gli angoli sono espressi in **radianti**; i valori in gradi possono essere mostrati nell'interfaccia e nella relazione di calcolo per maggiore leggibilità

$$R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \qquad R_2 = \sqrt{(x+c)^2 + z^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x+c}{z} - \tan^{-1}\frac{x}{z} \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{x+c}{z}$$

Sovrapposizione di carichi lineari

TEORIA

Il carico a rampa è una serie continua di carichi lineari, ciascuno di intensità **w(s)·ds** (crescente sulla rampa, costante sulla platea); le tensioni orizzontali elastiche (Flamant) si sommano

La rampa crescente e il plateau generano termini algebrici aggiuntivi; questi si elidono esattamente e restano **angoli e un logaritmo**

$$\sigma_H = \psi \frac{2}{\pi} \int w(s) \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} ds$$

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{\pi c} \left[c\beta - x\alpha + 2z \ln \frac{R_2}{R_1} \right]$$

ψ = 1 corrisponde a un semispazio (assenza di muro); **ψ = 2** corrisponde a un muro rigido che non si deforma e raddoppia la tensione orizzontale: è il valore predefinito del modulo. σ_H è nulla in corrispondenza del piano di campagna

Area e momento statico del diagramma

TEORIA

La **forza risultante del sovraccarico** per unità di lunghezza del muro e la sua profondità dalla superficie del terreno sono l'area e il momento del primo ordine del diagramma; il modulo calcola entrambi gli integrali numericamente con piena precisione

$$P_H = \int_0^H \sigma_H(z)\, dz$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z\, \sigma_H(z)\, dz}{P_H}$$

Nell'esempio $\mathbf{P_H = 443.49\ kN/m}$ (muro rigido) oppure **221.74 kN/m** (mezzo seminfinito); in entrambi i casi $\mathbf{z_R = 13.68\ m}$, al di sotto del piano di campagna

Sei passaggi e un'ordinata

TEORIA

1 · Si definiscono H, x, c, q e si sceglie ψ

2 · Si sceglie una profondità **z** compresa tra il piano di campagna e la base del muro

3 · si calcolano R_1 e R_2; **4** · si calcolano α e β (radianti)

5 · si calcola σ_H: si sostituiscono q, c, x, α, β, R_1, R_2

6 · Iterare e integrare: profilo di pressione, poi P_H e z_R

$$z = 5\ \text{m}: \quad R_1 = 5.385\ \text{m} \quad R_2 = 8.602\ \text{m} \qquad \alpha = 32.661^\circ \quad \beta = 35.538^\circ$$

$$\sigma_H = \frac{20}{5\pi}\left[5(0.62025) - 2(0.57004) + 10\ln\frac{8.6023}{5.3852}\right] = 8.461\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1) \ \ \rightarrow \ \ 16.921\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2)$$

Traccia

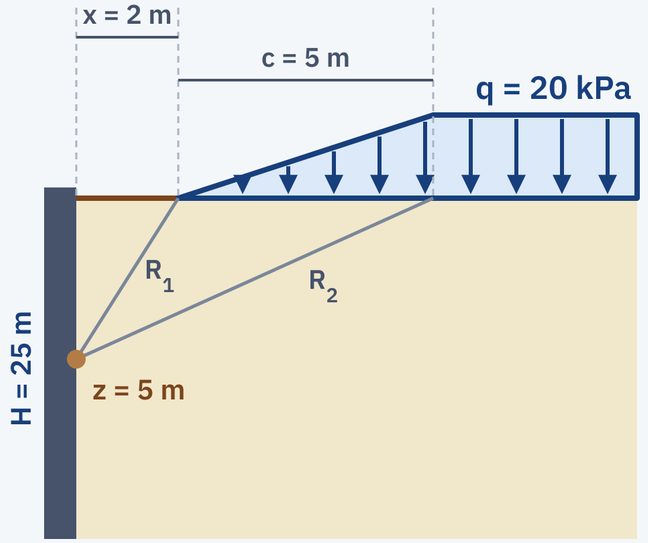
ESEMPIO

RICHIESTO

Alla profondità **z = 5 m**, **R_1**, **R_2**, **α**, **β** e la pressione orizzontale **σ_H** (per due valori di ψ); confronto con il modulo.

Dati

Muro e carico	$H = 25.0$ **m;** $x = 2.0$ **m;** $c = 5.0$ **m;** $q = 20.0$ **kPa**
Muro	**mezzo seminfinito (**$\psi = 1$**) e parete rigida (** $\psi = 2$**)**



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Raggi dal punto sul muro all'inizio (x) e alla fine (x + c) della rampa

$$R_1 = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = \mathbf{5.3852}\ \mathrm{m}$$

$$R_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} = \mathbf{8.6023}\ \mathrm{m}$$

2 Angoli (radianti)

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \tan^{-1}\frac{2}{5} = 0.95055 - 0.38051 = \mathbf{0.57004}\ \mathrm{rad}\ \ (32.661^\circ)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{7}{5} = 1.57080 - 0.95055 = \mathbf{0.62025}\ \mathrm{rad}\ \ (35.538^\circ)$$

L'inizio della rampa è visto dal punto sul muro con un angolo di **32.66°**, la fine con un angolo di **35.54°**; i raggi misurano 5.385 e 8.602 m.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

3 Mezzo seminfinito (ψ = 1): i tre termini nella parentesi

$$\sigma_H = \frac{q}{\pi c}\left[c\beta - x\alpha + 2z\ln\frac{R_2}{R_1}\right] = \frac{20}{5\pi}\left[5(0.62025) - 2(0.57004) + 10\ln\frac{8.6023}{5.3852}\right]$$

$$= 1.27324\left[3.1012 - 1.1401 + 4.6838\right] = 1.27324(6.6450) = \mathbf{8.461}\ \text{kPa}$$

4 Muro rigido (ψ = 2): il doppio del valore del semispazio indefinito

$$\sigma_H = 2 \times 8.461 = \mathbf{16.921}\ \text{kPa}$$

A z = 5 m, **σ_H = 16.921 kPa** (muro rigido; 8.461 in un mezzo seminfinito). Il modulo fornisce lo stesso valore. Il termine x·α entra con segno negativo: una rampa ascendente riduce il carico in prossimità del muro rispetto a un carico a striscia completo che inizia da x.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

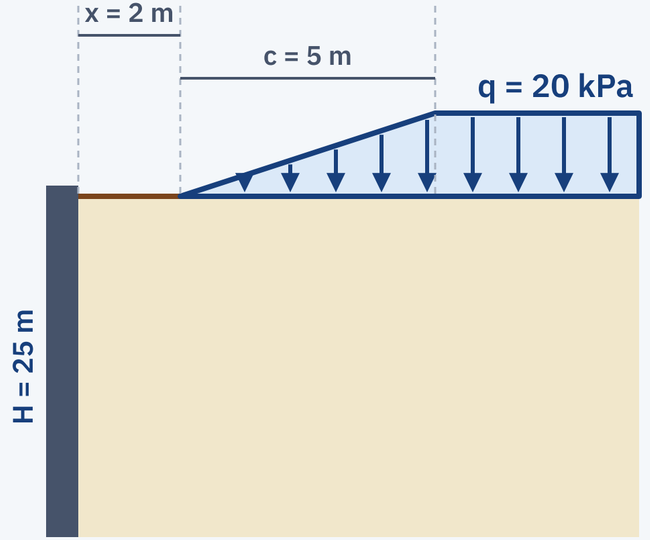
ESEMPIO

Dati

Modello	**Rampa dell'Esempio 1; muro rigido; tabella ogni $H/30 = 0.833$ m**
Su ogni riga	**R_1, R_2, α, β e σ_H; i valori del mezzo seminfinito sono la metà di quelli del muro rigido**

RICHIESTO

Profilo di pressione e valore alla base del muro; comportamento della pressione in profondità (limite della formula per z → ∞).



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

z (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	α (°)	β (°)	σ_H (kPa)
0.00	2.000	7.000	0.00	0.00	0.000
0.83	2.167	7.049	15.83	6.79	5.109
1.67	2.603	7.196	26.41	13.39	9.258
2.50	3.202	7.433	31.69	19.65	12.275
3.33	3.887	7.753	33.57	25.46	14.395
4.17	4.622	8.146	33.60	30.76	15.877
5.00	**5.385**	**8.602**	**32.66**	**35.54**	**16.921**
5.83	6.167	9.112	31.27	39.81	17.665
6.67	6.960	9.667	29.70	43.60	18.202
7.50	7.762	10.259	28.09	46.97	18.596
8.33	8.570	10.883	26.53	49.97	18.887
9.17	9.382	11.534	25.06	52.63	19.107
10.00	10.198	12.207	23.68	55.01	19.275
10.83	11.016	12.898	22.41	57.13	19.405
11.67	11.837	13.606	21.24	59.04	19.506
12.50	12.659	14.327	20.16	60.75	19.586
13.33	13.482	15.059	19.17	62.30	19.651
14.17	14.307	15.802	18.26	63.71	19.703
15.00	15.133	16.553	17.42	64.98	19.745
15.83	15.959	17.312	16.65	66.15	19.780
16.67	16.786	18.077	15.94	67.22	19.809
17.50	17.614	18.848	15.28	68.20	19.833
18.33	18.442	19.624	14.67	69.10	19.853
19.17	19.271	20.405	14.11	69.94	19.870
20.00	20.100	21.190	13.58	70.71	19.885
20.83	20.929	21.978	13.09	71.43	19.897
21.67	21.759	22.769	12.63	72.10	19.908
22.50	22.589	23.564	12.20	72.72	19.918
23.33	23.419	24.361	11.80	73.30	19.926
24.17	24.249	25.160	11.42	73.85	19.933
25.00	25.080	25.962	11.07	74.36	19.939

Soluzione (2/2)

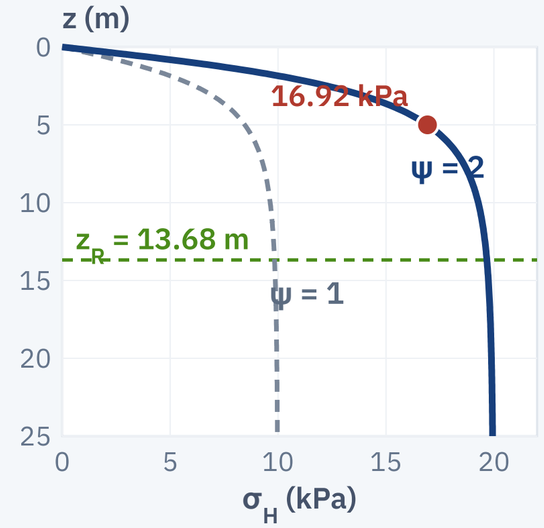
SOLUZIONE

1 In superficie e in profondità

$$z = 0: \quad \sigma_H = 0 \qquad z = H = 25\ \text{m}: \quad \sigma_H = \mathbf{19.94}\ \text{kPa}$$

$$z \to \infty: \quad \alpha \to 0,\ \beta \to \tfrac{\pi}{2},\ 2z \ln \tfrac{R_2}{R_1} \to 0 \ \Rightarrow\ \sigma_H \to \psi\, \frac{q}{2}$$

La pressione è nulla in superficie e **aumenta con la profondità**: il valore massimo si ha alla base del muro (19.94 kPa). In profondità $\sigma_H \to \psi q/2 = \mathbf{q}$: 19.99 a z = 50 m, 20.00 kPa a z = 1000 m (muro rigido). L'ordinata a z = 5 m è 16.921 kPa (riga in grassetto, Esempio 1).



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

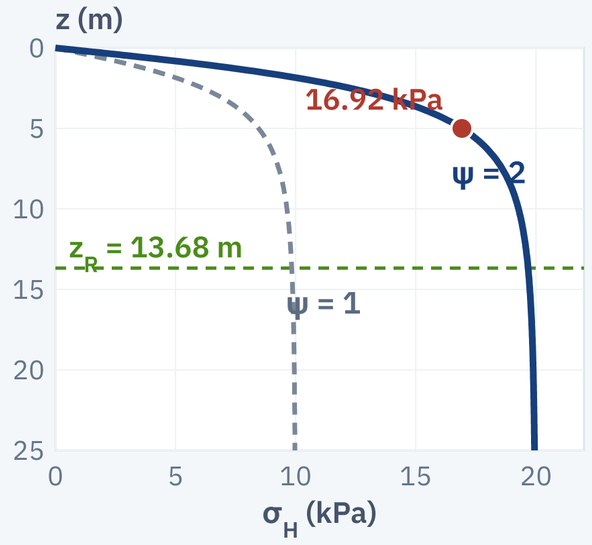
ESEMPIO

Dati

Modello	**Il carico a rampa dell'Esempio 1; muro rigido; la tabella $H/30$ dell'Esempio 2 ($n = 30$, $h = H/30 = 0.8333$ m)**
Metodo	**Regola di Simpson; $z_R = \int z\,\sigma\,dz \,/\, P_H$**

RICHIESTO

P_H e **z_R** (a mano, dalla tabella); valori per mezzo seminfinito; confronto con il risultato del modulo.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

	σ_0	Σ dispari (i = 1, 3, …, 29)	Σ pari (i = 2, 4, …, 28)	σ_{30}
σ_H (kPa)	0.000	266.553	255.220	19.939

1 Somma di Simpson e area

$$\Sigma = \sigma_0 + 4(266.553) + 2(255.220) + \sigma_{30} = 1{,}596.59$$

$$P_H \approx \frac{h}{3}\,\Sigma = \frac{0.8333}{3}(1{,}596.59) = \mathbf{443.50}\ \mathrm{kN/m}$$

A mano **443.50 kN/m**; l'integrale preciso del modulo **443.49 kN/m** (differenza 0.002%). Nel semispazio indefinito, la metà: **221.74 kN/m**.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

	$z_0\sigma_0$	Σ singolo	Σ doppio	$z_{30}\sigma_{30}$
$z\sigma_H$ (kPa·m)	0.000	3,638.41	3,393.35	498.48

2 Momento del primo ordine e profondità

$$\int z\,\sigma\,dz \approx \frac{0.8333}{3}\left[0 + 4(3{,}638.41) + 2(3{,}393.35) + 498.48\right] = 6{,}066.3\ \text{kN}$$

$$z_R = \frac{6{,}066.3}{443.50} = \mathbf{13.68}\ \text{m}\ \ (\text{dal terreno}) \qquad H - z_R = 11.32\ \text{m}\ (\text{dalla base})$$

A mano **z_R = 13.68 m**; il modulo 13.68 m. La risultante 443.49 kN/m agisce **13.68 m sotto la superficie del terreno** (11.32 m sopra la base); al variare di ψ, z_R non cambia.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

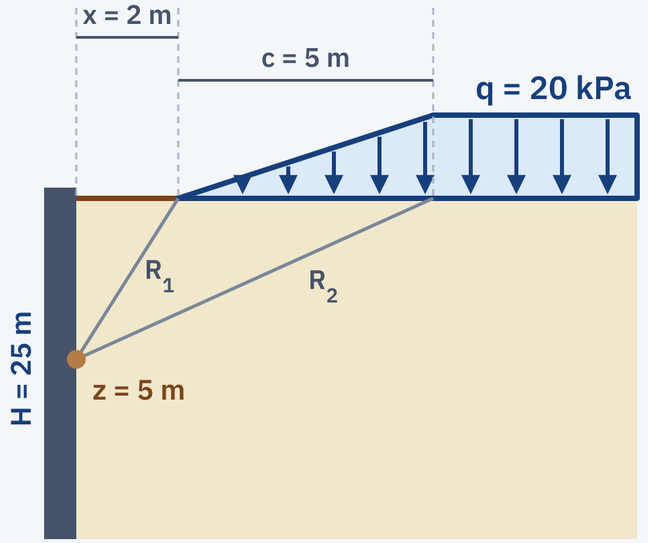
ESEMPIO

Dati

Modello	**Esempio 1: $z = 5$ m; mezzo seminfinito ($\psi = 1$)**
Metodo	$\sigma_H = \frac{2}{\pi} \int w(s) \, \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} \, ds$**;** $w = q(s - x)/c$ **sulla rampa,** $w = q$ **sul pianoro**
Calcolo	**rampa: Simpson (**$n = 10$**,** $h = 0.5$ **m); plateau: integrale in forma chiusa**

RICHIESTO

σ_H calcolando e sommando separatamente i contributi della rampa e del plateau; confronto con la forma chiusa dell'Esempio 1.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

i	s (m)	w(s) (kPa)	f(s) = s²z/(s²+z²)² (1/m)	c	c·w·f
0	2.0	0.00	0.02378	1	0.00000
1	2.5	2.00	0.03200	4	0.25600
2	3.0	4.00	0.03893	2	0.31142
3	3.5	6.00	0.04414	4	1.05941
4	4.0	8.00	0.04759	2	0.76145
5	4.5	10.00	0.04945	4	1.97796
6	5.0	12.00	0.05000	2	1.20000
7	5.5	14.00	0.04955	4	2.77472
8	6.0	16.00	0.04837	2	1.54797
9	6.5	18.00	0.04671	4	3.36314
10	7.0	20.00	0.04474	1	0.89481
			Σ c·w·f =		**14.14688**

1 Integrale dei carichi lineari sulla rampa

$$I_{ramp} = \frac{h}{3}\sum c_i\, w_i f_i = \frac{0.5}{3}(14.14688) = \mathbf{2.3578}$$

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

2 Platea (s ≥ x + c = 7 m): integrale in forma chiusa con A(s) = ½[tan⁻¹(s/z) − sz/(s² + z²)]

$$A(7) = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{7}{5} - \frac{7(5)}{74}\right] = 0.23879 \qquad A(\infty) = \frac{\pi}{4} = 0.78540$$

$$I_{plateau} = q\,[A(\infty) - A(7)] = 20(0.78540 - 0.23879) = 10.9322$$

3 Totale e ψ

$$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\,(I_{ramp} + I_{plateau}) = \frac{2}{\pi}(2.3578 + 10.9322) = \mathbf{8.4607}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1)$$

$$\psi = 2: \quad \sigma_H = \mathbf{16.921}\ \text{kPa}$$

La sovrapposizione dà **8.4607 kPa**; la forma chiusa (Esempio 1) dà **8.4607 kPa**. I due procedimenti coincidono: i termini tra parentesi quadre sono la somma degli integrali della rampa e del plateau.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

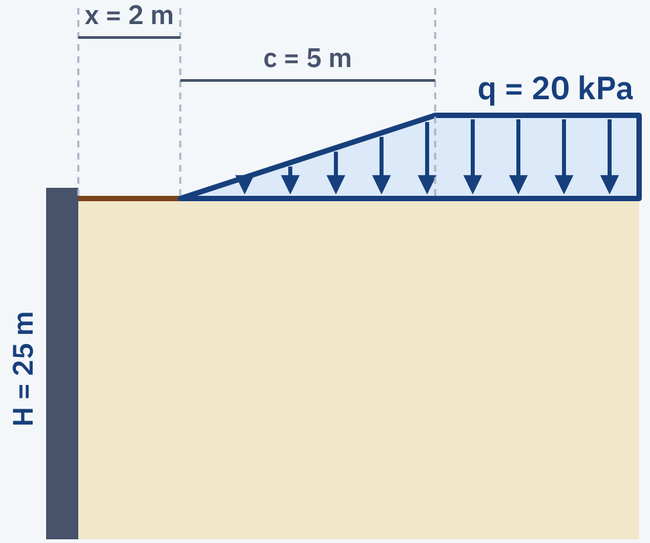
ESEMPIO

Dati

Modello	$H = 25.0$ **m;** $q = 20$ **kPa; muro rigido; si varia un solo parametro alla volta**
Variabili	**distanza iniziale** $x = 0; 2; 5; 10$ **m (**$c = 5$ **m) e larghezza** $c = 1; 5; 10; 20$ **m (**$x = 2$ **m)**

RICHIESTO

Per ciascun caso P_H, z_R, la pressione alla base; valori per semispazio infinito; limite superiore (carico uniforme).



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

x (m), c = 5	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	H − z_R (m)	σ_H(H) (kPa)
0	468.38	234.19	13.19	11.81	19.98
2	443.49	221.74	13.68	11.32	19.94
5	407.49	203.75	14.28	10.72	19.78
10	352.75	176.38	15.00	10.00	19.17

c (m), x = 2	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	H − z_R (m)	σ_H(H) (kPa)
1	468.28	234.14	13.22	11.78	19.99
5	443.49	221.74	13.68	11.32	19.94
10	414.10	207.05	14.11	10.89	19.76
20	362.68	181.34	14.67	10.33	19.02

Man mano che la rampa si allontana dal muro (x ↑) o sale lentamente (c ↑) **la risultante diminuisce e z_R si approfondisce**; la pressione alla base è sempre prossima a q = 20 kPa. I valori con ψ = 1 sono la metà di quelli del muro rigido.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

1 Limite superiore: il carico inizia dal paramento del muro (x = 0) e diventa subito q (c → 0): sovraccarico uniforme

$$\sigma_H = \psi\,\frac{q}{2} = q \quad (\text{qualsiasi z}) \;\Rightarrow\; P_H = qH = 20 \times 25 = \mathbf{500}\ \text{kN/m}, \quad z_R = \frac{H}{2} = 12.5\ \text{m}$$

2 Larghezza della rampa c → 0: carico a gradino che inizia da x = 2 m

$$c = 0.001\ \text{m}: \quad P_H = 474.58\ \text{kN/m}, \quad z_R = 13.09\ \text{m}$$

$$\text{formula della striscia } (x_2 \to \infty): \quad P_H = 474.59\ \text{kN/m}, \quad z_R = 13.09\ \text{m}$$

La rampa dell'Esempio 1 è compresa tra questi due limiti: **443.49 kN/m**, pari all'88.7% del limite superiore di 500 kN/m. Man mano che la rampa diventa più ripida, il risultato del carico a gradino si avvicina alla soluzione per il carico a striscia: la stessa sovrapposizione. (Il modulo fornisce 499.99 kN/m per x = 0, c = 0.001 m.)

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Sintesi

Punti chiave

$\sigma_H = \psi\, q/(\pi c)\,[c\beta - x\alpha + 2z \ln(R_2/R_1)]$; $R_1 = \sqrt{(x^2 + z^2)}$, $R_2 = \sqrt{((x + c)^2 + z^2)}$, $\alpha = \tan^{-1}((x + c)/z) - \tan^{-1}(x/z)$, $\beta = \pi/2 - \tan^{-1}((x + c)/z)$ (radianti); $\psi = 2$ per muro rigido, $\psi = 1$ per mezzo seminfinito

Esempio (z = 5 m): R_1 5.385 m, R_2 8.602 m; α 32.661°, β 35.538°; σ_H = 8.461 kPa ($\psi = 1$), **16.921 kPa** ($\psi = 2$)

Profilo: 0 in superficie, aumenta con la profondità, in profondità si avvicina al valore $\psi q/2 = q$ (alla base 19.94 kPa)

Risultante $P_H = \int \sigma_H dz$ = **443.49 kN/m**, $z_R = \int z\sigma_H dz / P_H$ = **13.68 m** (dal piano di campagna); per $\psi = 1$, P_H = 221.74 kN/m, z_R invariato

Confronto: la risultante diminuisce man mano che la rampa si allontana dal muro e si allarga; il limite superiore è il carico uniforme (q H = 500 kN/m), il limite inferiore è il carico a gradino quando la rampa diventa più ripida

Bibliografia

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; questa pagina fa riferimento a tale testo.

NOTA

Tutti gli esempi numerici sono stati prodotti con il motore di calcolo del modulo; il modulo restituisce gli stessi valori. L'esempio iniziale del modulo è il muro con H = 25 m, x = 2 m, c = 5 m, q = 20 kPa.

GeoTerva

Calcoli geotecnici online

Dalla teoria alla pratica

Inserire in GeoTerva il proprio carico a rampa, la distanza iniziale, la larghezza e l'altezza del muro; il modulo fornisce insieme il diagramma delle pressioni, la risultante e la sua profondità di applicazione, tre viste, la soluzione passo per passo e la relazione.

Aprire il modulo →

Pagina di teoria →

Aprire dallo smartphone

I moduli di prova non richiedono registrazione.

Se si desidera utilizzarli nelle proprie lezioni: info@geoterva.com