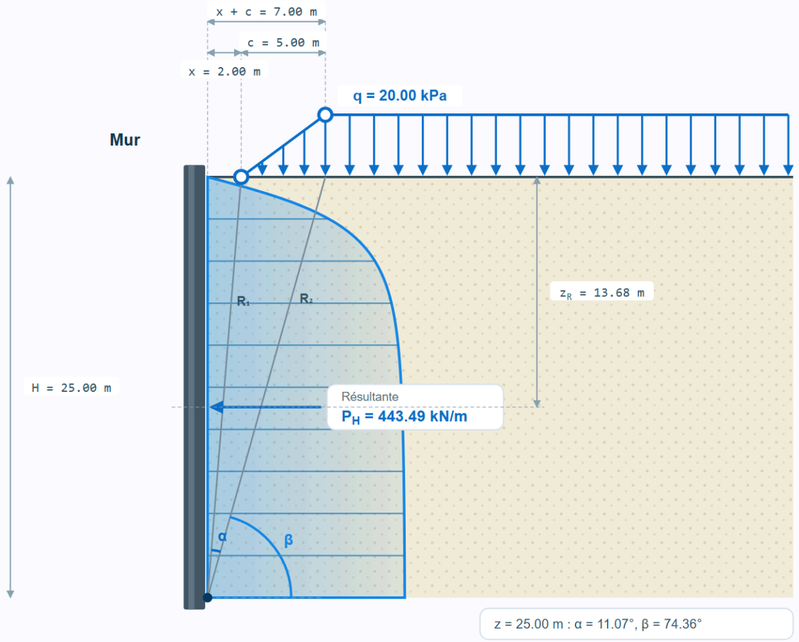
Présentation de cours de géotechnique · Surcharges

Surcharge trapézoïdale

Cours : charge trapézoïdale (rampe) partant de zéro et atteignant un palier ; l'ordonnée à une profondeur donnée est résolue à la main, le profil, la résultante et les variantes étant présentés dans des tableaux.

- Superposition des charges linéiques
- R_1, R_2, α, β
- Mur rigide ψ = 2
- Résultante et z_R
- Résolvable à la main



Que verrons-nous dans ce cours ?

La géométrie de la **charge trapézoïdale (en rampe)** : elle commence à zéro à la distance **x** du mur, atteint la valeur q sur la largeur **c**, puis se poursuit avec q constant au-delà

Déterminer les rayons $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$ et les angles **α, β** à une profondeur z (en radians)

La forme fermée de la pression horizontale obtenue par **superposition de charges linéiques** : $\sigma_H = \psi\, q/(\pi c)\,[c\beta - x\alpha + 2z\,\ln(R_2/R_1)]$

La différence entre un **mur rigide** ($\psi = 2$) et un **milieu semi-infini** ($\psi = 1$)

Résultante P_H et **profondeur d'action z_R** : aire du diagramme et son premier moment ; l'effet de x et de c

DÉROULÉ DU COURS

Chaque thème est traité en **trois étapes** :

1 · **Théorie** : formule et justification

2 · **Énoncé** : données et à déterminer

3 · **Solution** : étape par étape, avec les valeurs numériques

Exemple : H = 25 m, x = 2 m, c = 5 m, q = 20 kPa ; mur rigide. Une ordonnée en z = 5 m est résolue à la main.

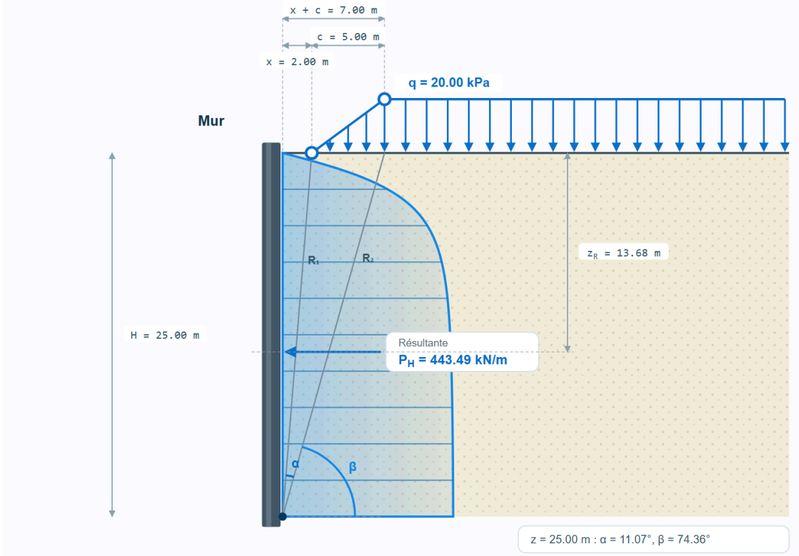
Surcharge de rampe agissant sur le mur

THÉORIE

La surcharge trapézoïdale commence à une distance horizontale **x** du mur

La pression en surface croît linéairement de zéro à la valeur complète **q** sur la largeur de rampe **c** ; au-delà de **x + c**, la surcharge se poursuit avec une intensité q constante

La charge est longue et parallèle au mur ; la résultante est donnée **par unité de longueur** du mur



H : hauteur totale du mur

x : distance du mur au début de la rampe

c : largeur horizontale sur laquelle la charge passe de 0 à q

q : intensité de la surcharge uniforme complète au-delà de la rampe

z : profondeur, à partir de la surface du sol, à laquelle σ_H est calculée

Géométrie à la profondeur z

THÉORIE

À la profondeur z, les longueurs des deux rayons allant du point du mur au **début** et à la **fin** de la rampe, ainsi que les angles entre eux, sont donnés ci-dessous

Dans l'équation de la pression, les angles sont pris en **radians** ; les valeurs en degrés peuvent être affichées dans l'interface et dans le rapport de calcul pour faciliter la lecture

$$R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \qquad R_2 = \sqrt{(x+c)^2 + z^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x+c}{z} - \tan^{-1}\frac{x}{z} \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{x+c}{z}$$

Superposition de charges linéiques

THÉORIE

La charge trapézoïdale (en rampe) est une série continue de charges linéiques, chacune d'intensité **w(s)·ds** (croissante sur la rampe, constante sur le palier) ; les contraintes horizontales élastiques (Flamant) sont sommées

La rampe montante et le palier produisent des termes algébriques supplémentaires ; ceux-ci s'annulent exactement, ne laissant que des **angles et un logarithme**

$$\sigma_H = \psi \frac{2}{\pi} \int w(s) \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} ds$$

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{\pi c} \left[c\beta - x\alpha + 2z \ln \frac{R_2}{R_1} \right]$$

ψ = 1 correspond à un milieu semi-infini (pas de mur) ; **ψ = 2** correspond à un mur rigide, sans déplacement, qui double la contrainte horizontale : valeur par défaut du module. σ_H est nulle à la surface du sol

Aire et moment statique du diagramme

THÉORIE

La **force de surcharge résultante** par unité de longueur du mur et sa profondeur depuis la surface du sol correspondent à l'aire et au moment statique du diagramme ; le module calcule numériquement les deux intégrales à pleine précision

$$P_H = \int_0^H \sigma_H(z)\, dz$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z\, \sigma_H(z)\, dz}{P_H}$$

Dans l'exemple, **P_H = 443.49 kN/m** (mur rigide) ou **221.74 kN/m** (milieu semi-infini) ; dans les deux cas, **z_R = 13.68 m**, sous le niveau du sol

Six étapes et une ordonnée

THÉORIE

1 · H, x, c, q sont définis et ψ est choisi

2 · On choisit une profondeur **z** entre la surface du terrain et la base du mur

3 · calcul de R_1 et R_2 ; **4** · calcul de α et β (en radians)

5 · calcul de σ_H : substitution de q, c, x, α, β, R_1, R_2

6 · itération et intégration : profil de pression, puis P_H et z_R

$$z = 5\ \text{m}: \quad R_1 = 5.385\ \text{m} \quad R_2 = 8.602\ \text{m} \qquad \alpha = 32.661^\circ \quad \beta = 35.538^\circ$$

$$\sigma_H = \frac{20}{5\pi}\left[5(0.62025) - 2(0.57004) + 10\ln\frac{8.6023}{5.3852}\right] = 8.461\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1) \ \ \rightarrow \ \ 16.921\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2)$$

Énoncé

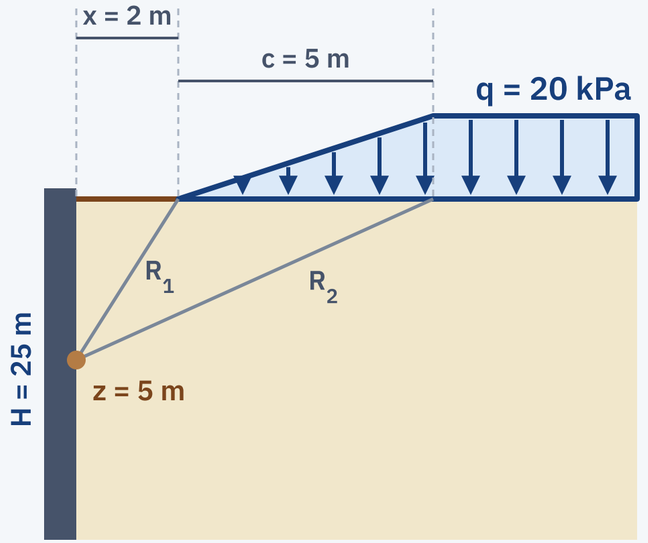
EXEMPLE

Données

Mur et charge	$H = 25.0$ **m;** $x = 2.0$ **m;** $c = 5.0$ **m;** $q = 20.0$ **kPa**
Mur	**milieu semi-infini (**$\psi = 1$**) et mur rigide (**$\psi = 2$**)**

À DÉTERMINER

À la profondeur **z = 5 m** : **R_1, R_2, α, β** et la pression horizontale **σ_H** (pour deux valeurs de ψ) ; comparaison avec le module.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Rayons allant du point situé sur le mur au début (x) et à la fin (x + c) de la rampe

$$R_1 = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = \mathbf{5.3852}\ \mathrm{m}$$

$$R_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} = \mathbf{8.6023}\ \mathrm{m}$$

2 Angles (radians)

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \tan^{-1}\frac{2}{5} = 0.95055 - 0.38051 = \mathbf{0.57004}\ \mathrm{rad}\ \ (32.661^\circ)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{7}{5} = 1.57080 - 0.95055 = \mathbf{0.62025}\ \mathrm{rad}\ \ (35.538^\circ)$$

Le début de la rampe de charge est vu depuis le point du mur sous un angle de **32.66°** et sa fin sous **35.54°** ; les rayons mesurent 5.385 et 8.602 m.

Solution (2/2)

SOLUTION

3 Milieu semi-infini (ψ = 1) : les trois termes entre crochets

$$\sigma_H = \frac{q}{\pi c}\left[c\beta - x\alpha + 2z\ln\frac{R_2}{R_1}\right] = \frac{20}{5\pi}\left[5(0.62025) - 2(0.57004) + 10\ln\frac{8.6023}{5.3852}\right]$$

$$= 1.27324\left[3.1012 - 1.1401 + 4.6838\right] = 1.27324(6.6450) = \mathbf{8.461}\ \text{kPa}$$

4 Mur rigide (ψ = 2) : le double de la valeur du milieu semi-infini

$$\sigma_H = 2 \times 8.461 = \mathbf{16.921}\ \text{kPa}$$

À z = 5 m, **σ_H = 16.921 kPa** (mur rigide ; 8.461 en milieu semi-infini). Le module donne la même valeur. Le terme x·α entre avec un signe moins : une rampe ascendante réduit la charge près du mur par rapport à une bande pleine commençant en x.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

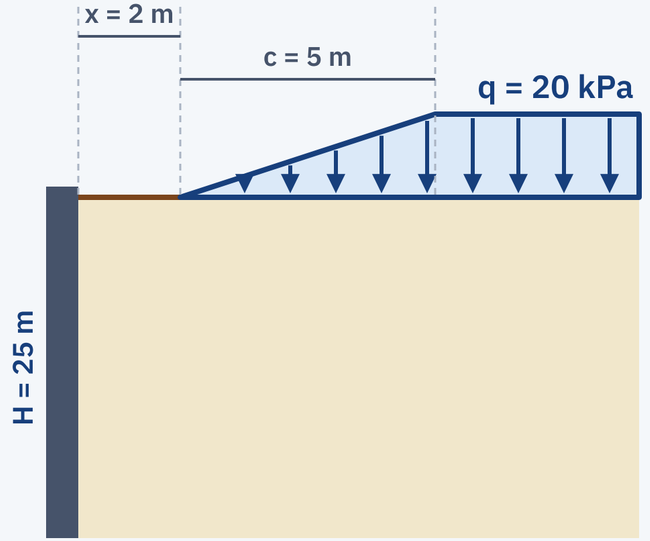
EXEMPLE

Données

Modèle	**Rampé de l'exemple 1 ; mur rigide ; tableau tous les $H/30 = 0.833$ m**
Sur chaque ligne	**R_1, R_2, α, β et σ_H ; les valeurs du milieu semi-infini valent la moitié de celles du mur rigide**

À DÉTERMINER

Profil de pression et valeur à la base du mur ; comportement de la pression en profondeur (limite de la formule pour z → ∞).



Solution (1/2)

SOLUTION

z (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	α (°)	β (°)	σ_H (kPa)
0.00	2.000	7.000	0.00	0.00	0.000
0.83	2.167	7.049	15.83	6.79	5.109
1.67	2.603	7.196	26.41	13.39	9.258
2.50	3.202	7.433	31.69	19.65	12.275
3.33	3.887	7.753	33.57	25.46	14.395
4.17	4.622	8.146	33.60	30.76	15.877
5.00	**5.385**	**8.602**	**32.66**	**35.54**	**16.921**
5.83	6.167	9.112	31.27	39.81	17.665
6.67	6.960	9.667	29.70	43.60	18.202
7.50	7.762	10.259	28.09	46.97	18.596
8.33	8.570	10.883	26.53	49.97	18.887
9.17	9.382	11.534	25.06	52.63	19.107
10.00	10.198	12.207	23.68	55.01	19.275
10.83	11.016	12.898	22.41	57.13	19.405
11.67	11.837	13.606	21.24	59.04	19.506
12.50	12.659	14.327	20.16	60.75	19.586
13.33	13.482	15.059	19.17	62.30	19.651
14.17	14.307	15.802	18.26	63.71	19.703
15.00	15.133	16.553	17.42	64.98	19.745
15.83	15.959	17.312	16.65	66.15	19.780
16.67	16.786	18.077	15.94	67.22	19.809
17.50	17.614	18.848	15.28	68.20	19.833
18.33	18.442	19.624	14.67	69.10	19.853
19.17	19.271	20.405	14.11	69.94	19.870
20.00	20.100	21.190	13.58	70.71	19.885
20.83	20.929	21.978	13.09	71.43	19.897
21.67	21.759	22.769	12.63	72.10	19.908
22.50	22.589	23.564	12.20	72.72	19.918
23.33	23.419	24.361	11.80	73.30	19.926
24.17	24.249	25.160	11.42	73.85	19.933
25.00	25.080	25.962	11.07	74.36	19.939

Solution (2/2)

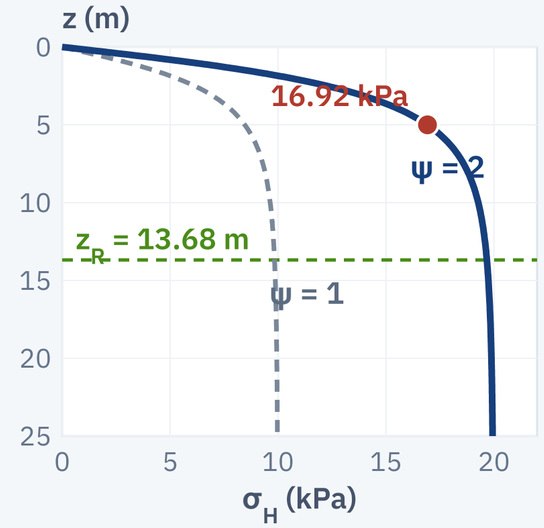
SOLUTION

1 À la surface et en profondeur

$$z = 0 : \quad \sigma_H = 0 \qquad z = H = 25\ \text{m} : \quad \sigma_H = \mathbf{19.94}\ \text{kPa}$$

$$z \to \infty : \quad \alpha \to 0,\ \beta \to \tfrac{\pi}{2},\ 2z \ln \tfrac{R_2}{R_1} \to 0 \ \Rightarrow\ \sigma_H \to \psi\, \frac{q}{2}$$

La pression est nulle en surface et **augmente avec la profondeur** : la valeur maximale est à la base du mur (19.94 kPa). En profondeur, $\sigma_H \to \psi q/2 =$ **q** : 19.99 à z = 50 m, 20.00 kPa à z = 1000 m (mur rigide). L'ordonnée à z = 5 m est de 16.921 kPa (ligne en gras, Exemple 1).



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

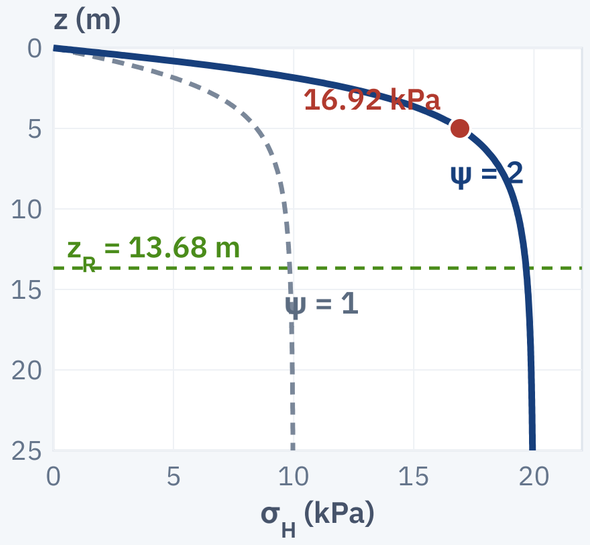
EXEMPLE

Données

Modèle	**La rampe de l'exemple 1 ; mur rigide ; le tableau $H/30$ de l'exemple 2 ($n = 30$, $h = H/30 = 0.8333$ m)**
Méthode	**Règle de Simpson ;** $z_R = \int z\,\sigma\,dz \,/\, P_H$

À DÉTERMINER

P_H et **z_R** (à la main, d'après le tableau) ; valeurs en milieu semi-infini ; comparaison avec le résultat du module.



Solution (1/2)

SOLUTION

	σ_0	Σ impair (i = 1, 3, …, 29)	Σ pairs (i = 2, 4, …, 28)	σ_{30}
σ_H (kPa)	0.000	266.553	255.220	19.939

1 Somme de Simpson et aire

$$\Sigma = \sigma_0 + 4(266.553) + 2(255.220) + \sigma_{30} = 1{,}596.59$$

$$P_H \approx \frac{h}{3}\,\Sigma = \frac{0.8333}{3}(1{,}596.59) = \mathbf{443.50}\ \mathrm{kN/m}$$

À la main : **443.50 kN/m** ; l'intégrale précise du module : **443.49 kN/m** (écart de 0.002 %). Dans un milieu semi-infini, la moitié : **221.74 kN/m**.

Solution (2/2)

SOLUTION

	$z_0\sigma_0$	Σ simple	Σ double	$z_{30}\sigma_{30}$
$z\sigma_H$ (kPa·m)	0.000	3,638.41	3,393.35	498.48

2 Moment statique et profondeur

$$\int z\,\sigma\,dz \approx \frac{0.8333}{3}\left[0 + 4(3{,}638.41) + 2(3{,}393.35) + 498.48\right] = 6{,}066.3 \text{ kN}$$

$$z_R = \frac{6{,}066.3}{443.50} = \mathbf{13.68}\text{ m} \;\; (\text{à partir du terrain}) \qquad H - z_R = 11.32\text{ m}\;(\text{à partir de la base})$$

Par calcul manuel, **z_R = 13.68 m** ; le module donne 13.68 m. La résultante de 443.49 kN/m agit **à 13.68 m sous la surface du sol** (à 11.32 m au-dessus de la base) ; z_R ne change pas lorsque ψ varie.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

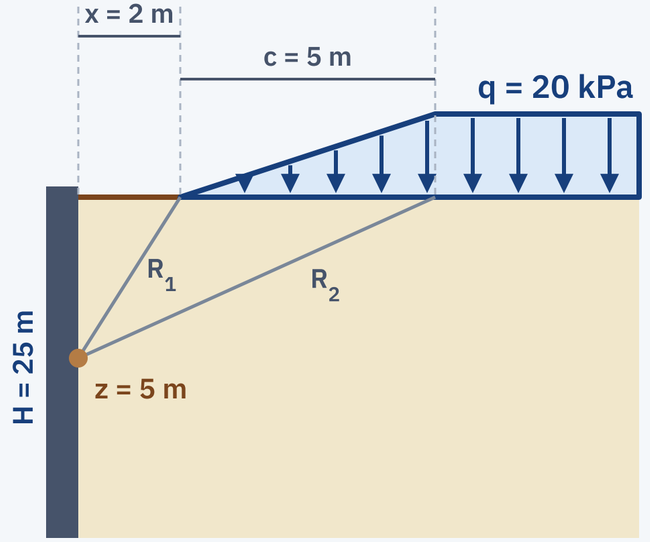
EXEMPLE

Données

Modèle	**Exemple 1 :** $z = 5$ **m ; milieu semi-infini (** $\psi = 1$**)**
Méthode	$\sigma_H = \frac{2}{\pi} \int w(s) \, \frac{s^2 z}{(s^2 + z^2)^2} \, ds$ **;** $w = q(s - x)/c$ **sur la rampe,** $w = q$ **sur le plateau**
Calcul	**rampe : Simpson (**$n = 10$**,** $h = 0.5$ **m) ; plateau : intégrale en forme fermée**

À DÉTERMINER

σ_H obtenu en déterminant séparément les contributions de la partie en rampe et de la partie en palier, puis en les sommant ; comparaison avec la forme analytique de l'Exemple 1.



Solution (1/2)

SOLUTION

i	s (m)	w(s) (kPa)	f(s) = s²z/(s²+z²)² (1/m)	c	c·w·f
0	2.0	0.00	0.02378	1	0.00000
1	2.5	2.00	0.03200	4	0.25600
2	3.0	4.00	0.03893	2	0.31142
3	3.5	6.00	0.04414	4	1.05941
4	4.0	8.00	0.04759	2	0.76145
5	4.5	10.00	0.04945	4	1.97796
6	5.0	12.00	0.05000	2	1.20000
7	5.5	14.00	0.04955	4	2.77472
8	6.0	16.00	0.04837	2	1.54797
9	6.5	18.00	0.04671	4	3.36314
10	7.0	20.00	0.04474	1	0.89481
			Σ c·w·f =		**14.14688**

1 Intégrale des charges linéiques sur la rampe

$$I_{ramp} = \frac{h}{3}\sum c_i\, w_i f_i = \frac{0.5}{3}(14.14688) = \mathbf{2.3578}$$

Solution (2/2)

SOLUTION

2 Plateau (s ≥ x + c = 7 m) : intégrale sous forme analytique avec A(s) = ½[tan⁻¹(s/z) − sz/(s² + z²)]

$$A(7) = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{7}{5} - \frac{7(5)}{74}\right] = 0.23879 \qquad A(\infty) = \frac{\pi}{4} = 0.78540$$

$$I_{plateau} = q\,[A(\infty) - A(7)] = 20(0.78540 - 0.23879) = 10.9322$$

3 Total et ψ

$$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\,(I_{ramp} + I_{plateau}) = \frac{2}{\pi}(2.3578 + 10.9322) = \mathbf{8.4607}\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1)$$

$$\psi = 2 : \quad \sigma_H = \mathbf{16.921}\ \text{kPa}$$

La superposition donne **8.4607 kPa** ; la forme fermée (Exemple 1) donne **8.4607 kPa**. Les deux voies sont identiques : les termes entre crochets sont la somme des intégrales de la rampe et du plateau.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

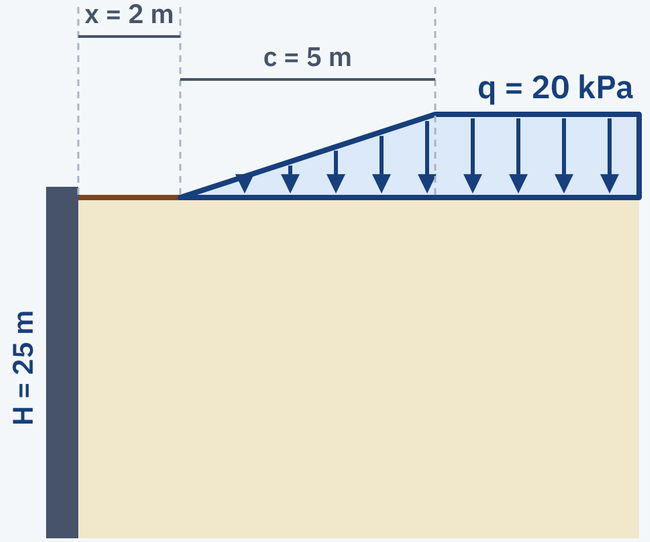
EXEMPLE

Données

Modèle	$H = 25.0$ **m ; $q = 20$ kPa ; mur rigide ; une seule valeur varie à la fois**
Variables	**distance de départ $x = 0$; 2 ; 5 ; 10 m ($c = 5$ m) et largeur $c = 1$; 5 ; 10 ; 20 m ($x = 2$ m)**

À DÉTERMINER

Pour chaque cas **P_H**, **z_R**, la pression à la base ; valeurs en milieu semi-infini ; borne supérieure (charge uniforme).



Solution (1/2)

SOLUTION

x (m), c = 5	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	H − z_R (m)	σ_H(H) (kPa)
0	468.38	234.19	13.19	11.81	19.98
2	443.49	221.74	13.68	11.32	19.94
5	407.49	203.75	14.28	10.72	19.78
10	352.75	176.38	15.00	10.00	19.17

c (m), x = 2	P_H (kN/m), ψ = 2	P_H (kN/m), ψ = 1	z_R (m)	H − z_R (m)	σ_H(H) (kPa)
1	468.28	234.14	13.22	11.78	19.99
5	443.49	221.74	13.68	11.32	19.94
10	414.10	207.05	14.11	10.89	19.76
20	362.68	181.34	14.67	10.33	19.02

Lorsque la charge trapézoïdale s'éloigne du mur (x ↑) ou monte plus lentement (c ↑), **la résultante diminue et z_R s'approfondit** ; la pression à la base reste toujours voisine de q = 20 kPa. Les valeurs pour ψ = 1 valent la moitié de celles du mur rigide.

Solution (2/2)

SOLUTION

1 Borne supérieure : la charge commence à la face du mur (x = 0) et vaut aussitôt q (c → 0) : surcharge uniforme

$$\sigma_H = \psi\,\frac{q}{2} = q \quad (\text{pour tout z}) \;\Rightarrow\; P_H = qH = 20 \times 25 = \mathbf{500}\ \text{kN/m}, \quad z_R = \frac{H}{2} = 12.5\ \text{m}$$

2 Largeur de rampe c → 0 : charge en marche débutant à x = 2 m

$$c = 0.001\ \text{m} : \quad P_H = 474.58\ \text{kN/m}, \quad z_R = 13.09\ \text{m}$$

$$\text{formule de la bande } (x_2 \to \infty) : \quad P_H = 474.59\ \text{kN/m}, \quad z_R = 13.09\ \text{m}$$

La rampe de l'Exemple 1 se situe entre ces deux limites : **443.49 kN/m**, soit 88.7 % de la limite supérieure de 500 kN/m. À mesure que la rampe se raidit, le résultat tend vers la solution en bande de la charge en échelon : c'est la même superposition. (Le module donne 499.99 kN/m pour x = 0, c = 0.001 m.)

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Synthèse

Points à retenir

$\sigma_H = \psi\, q/(\pi c)\,[c\beta - x\alpha + 2z \ln(R_2/R_1)]$; $R_1 = \sqrt{(x^2 + z^2)}$, $R_2 = \sqrt{((x + c)^2 + z^2)}$, $\alpha = \tan^{-1}((x + c)/z) - \tan^{-1}(x/z)$, $\beta = \pi/2 - \tan^{-1}((x + c)/z)$ (en radians) ; $\psi = 2$ pour un mur rigide, $\psi = 1$ pour un milieu semi-infini

Exemple (z = 5 m) : R_1 5.385 m, R_2 8.602 m ; α 32.661°, β 35.538° ; σ_H = 8.461 kPa ($\psi = 1$), **16.921 kPa** ($\psi = 2$)

Profil : 0 en surface, croissant avec la profondeur, tendant en profondeur vers $\psi q/2 = q$ (19.94 kPa à la base)

Résultante $P_H = \int \sigma_H dz$ = **443.49 kN/m**, $z_R = \int z\sigma_H dz / P_H$ = **13.68 m** (depuis la surface du sol) ; pour $\psi = 1$, P_H = 221.74 kN/m, z_R inchangé

Comparaison : la résultante diminue lorsque la rampe s'éloigne du mur et s'élargit ; la borne supérieure est la charge uniforme (q H = 500 kN/m), et l'extrémité inférieure est la charge en échelon, lorsque la rampe devient plus raide

Références bibliographiques

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning ; la présente page s’y conforme.

REMARQUE

Tous les exemples numériques ont été produits avec le moteur de calcul propre du module ; le module donne les mêmes valeurs. L'exemple initial du module est le mur avec H = 25 m, x = 2 m, c = 5 m, q = 20 kPa.

GeoTerva

Calculs géotechniques en ligne

De la théorie à la pratique

Saisir dans GeoTerva la charge en rampe, la distance de départ, la largeur et la hauteur du mur ; le module fournit ensemble le diagramme de pression, la résultante et sa profondeur d'application, les trois vues, la solution pas à pas et le rapport.

Ouvrir le module →

Page de théorie →

Ouvrir sur smartphone
Les modules d'essai ne nécessitent pas d'inscription.

Si vous souhaitez les utiliser dans vos cours : info@geoterva.com