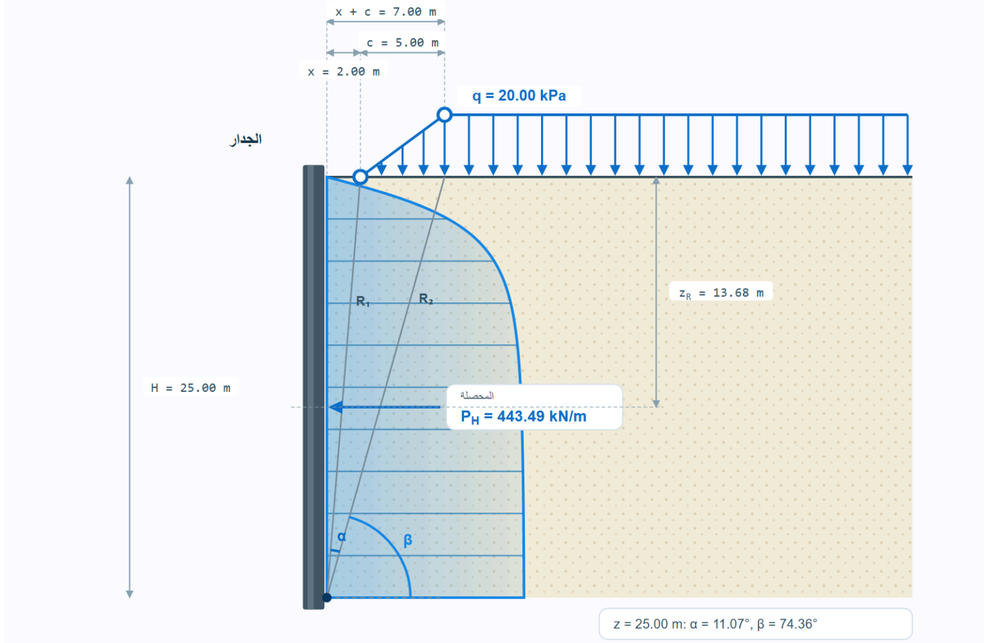


شرائح محاضرات الجيوتكنيك · الأحمال الإضافية

حمل إضافي متدرج

المحاضرة: الحمل المتدرج الذي يبدأ من الصفر ويبلغ قيمة ثابتة (هضبة)؛ يحل الإحداثي عند عمق معين يدوياً، ويعرض التوزيع والمحصلة والحالات المتغيرة بالجداول.

- تراكب الأحمال الخطية
- R_1, R_2, α, β
- جدار جاسئ $\psi = 2$
- المحصلة و z_R
- قابل للحل يدوياً

ماذا سنتعلم في هذه المحاضرة؟

هندسة **الحمل المتدرج**: يبدأ من الصفر على بعد **x** من الجدار، ويرتفع إلى القيمة q على عرض **c**، ثم يستمر بعد ذلك بقيمة q ثابتة

إيجاد نصفي القطر R_1, R_2 والزاويتين α, β عند عمق z (بالراديان)

الصيغة المغلقة للضغط الأفقي الناتجة من **تراكب الأحمال الخطية**: $\sigma_H = \psi\, q/(\pi c)\,[c\beta - x\alpha + 2z\,\ln(R_2/R_1)]$

الفرق بين **الجدار الجاسئ** ($\psi = 2$) و**الوسط شبه اللانهائي** ($\psi = 1$)

المحصلة P_H و **عمق التأثير z_R**: مساحة المخطط وعزمه الأول؛ وأثر x و c

تسلسل المحاضرة

يعالج كل موضوع في **ثلاث خطوات**:

1 · **النظرية**: المعادلة ومبرراتها

2 · **المسألة**: المعطيات والمطلوب

3 · **الحل**: خطوة بخطوة، بالأرقام

مثال: $H = 25$ m، $x = 2$ m، $c = 5$ m، $q = 20$ kPa؛ جدار جاسئ. يُحل أحد الإحداثيات عند $z = 5$ m يدوياً.

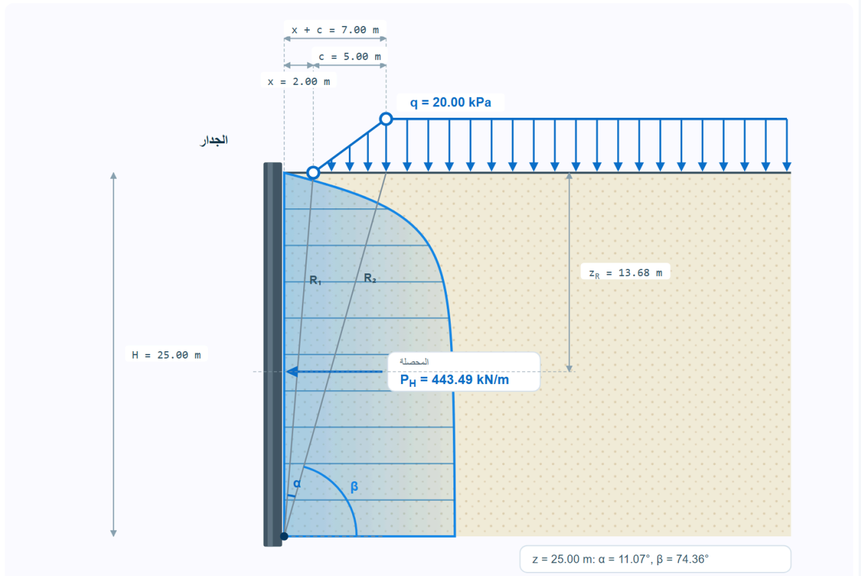
الحمل الإضافي المتدرج المؤثر على الجدار

النظرية

يبدأ الحمل الإضافي المتدرج على مسافة أفقية **x** من الجدار

يزداد ضغط السطح خطياً من الصفر إلى القيمة الكاملة **q** على عرض الحمل المتدرج **c**؛ وبعد **x + c** يستمر الحمل الإضافي بشدة ثابتة q

الحمل طويل وموازٍ للجدار؛ وتعطى المحصلة **لكل وحدة طول** من الجدار



H: الارتفاع الكلي للجدار

x: المسافة من الجدار إلى بداية الحمل المتدرج

c: العرض الأفقي الذي يرتفع عبره الحمل من 0 إلى q

q: شدة الحمل الإضافي المنتظم الكاملة بعد منطقة التدرج

z: العمق عن سطح التربة الذي تحسب عنده σ_H

الهندسة عند العمق z

النظرية

عند العمق z، يرد فيما يلي طولا الشعاعين الواصلين من النقطة الواقعة على الجدار إلى **بداية** الحمل المتدرج وإلى **نهايته**، والزوايا الواقعة بينهما

تؤخذ الزوايا في معادلة الضغط بـ **الراديان**؛ ويمكن عرض قيم الدرجات في واجهة البرنامج وفي تقرير الحساب لسهولة القراءة

$$R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \qquad R_2 = \sqrt{(x + c)^2 + z^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x + c}{z} - \tan^{-1}\frac{x}{z} \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{x + c}{z}$$

تراكب الأحمال الخطية

النظرية

الحمل المتدرج هو سلسلة متصلة من الأحمال الخطية، شدة كل منها **w(s)·ds** (تتزايد على الجزء المتدرج وتثبت على الجزء المستوي)؛ وتجمع الإجهادات الأفقية المرنة (Flamant)

ينتج عن الجزء المتدرج الصاعد والهضبة حدود جبرية إضافية؛ وهي تلغي بعضها بعضاً تماماً فتبقى **الزوايا واللوغاريتم**

$$\sigma_H = \psi \frac{2}{\pi} \int w(s) \frac{s^2 z}{(s^2+z^2)^2}\, ds$$

$$\sigma_H = \psi \frac{q}{\pi c} \left[c\beta - x\alpha + 2z \ln \frac{R_2}{R_1} \right]$$

Ψ = 1 يمثل وسطاً شبه لانهائي (بلا جدار)؛ **Ψ = 2** يمثل الجدار الجاسئ غير المتحرك الذي يضاعف الإجهاد الأفقي: وهو الافتراضي في الوحدة. σ_H تساوي صفراً عند سطح الأرض

النظرية

مساحة المخطط وعزمه الأول

محصلة قوة الحمل الإضافي لوحدة الطول من الجدار وعمقها من سطح الأرض هما مساحة المخطط وعزمه الأول؛ وتحسب الوحدة التكاملين كليهما عددياً بدقة كاملة

$$P_H = \int_0^H \sigma_H(z)\, dz$$

$$z_R = \frac{\int_0^H z\, \sigma_H(z)\, dz}{P_H}$$

في المثال P_H = **443.49 kN/m** (جدار جاسئ) أو **221.74 kN/m** (وسط شبه لانهائي)؛ وفي الحالتين z_R = **13.68 m** تحت منسوب سطح الأرض

النظرية

ست خطوات وإحداثي رأسي واحد

1 · تحديد H و x و c و q واختيار ψ

2 · يختار عمق **z** بين مستوى سطح الأرض وقاع الجدار

3 · يحسب R_1 وR_2؛ **4** · يحسب α وβ (بالراديان)

5 · يحسب σ_H: يعوض عن R_2، R_1، β، α، x، c، q

6 · يُكرَّر ويُكامَل: مخطط الضغط، ثم P_H وz_R

$$z = 5\ \text{m}: \quad R_1 = 5.385\ \text{m} \quad R_2 = 8.602\ \text{m} \qquad \alpha = 32.661^\circ \quad \beta = 35.538^\circ$$

$$\sigma_H = \frac{20}{5\pi}\left[5(0.62025) - 2(0.57004) + 10\ln\frac{8.6023}{5.3852}\right] = 8.461\ \text{kPa}\ \ (\psi = 1) \ \rightarrow\ 16.921\ \text{kPa}\ \ (\psi = 2)$$

المسألة

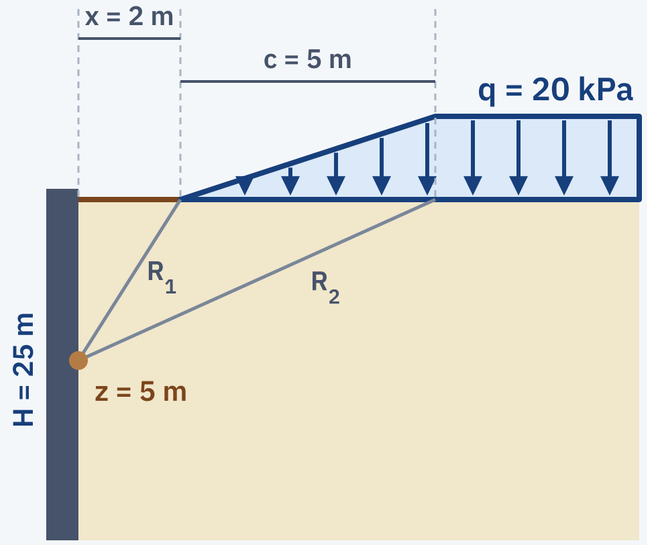
مثال

المعطيات

الجدار والحمل	$H = 25.0\ \text{m}$; $x = 2.0\ \text{m}$; $c = 5.0\ \text{m}$; $q = 20.0\ \text{kPa}$
الجدار	**وسط نصف لانهائي** ($\psi = 1$) **وجدار جاسئ** ($\psi = 2$)

المطلوب

عند العمق $z = 5\ \text{m}$: R_1, R_2 و α, β والضغط الأفقي σ_H (لقيمتين من ψ)؛ ومقارنة مع الوحدة.



الحل (1/2)

الحل

1 الأشعة من النقطة على الجدار إلى بداية الحمل المتدرج (x) ونهايته (x + c)

$$R_1 = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = \mathbf{5.3852}\ \text{m}$$

$$R_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} = \mathbf{8.6023}\ \text{m}$$

2 الزوايا (راديان)

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \tan^{-1}\frac{2}{5} = 0.95055 - 0.38051 = \mathbf{0.57004}\ \text{rad}\ \ (32.661^\circ)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{7}{5} = 1.57080 - 0.95055 = \mathbf{0.62025}\ \text{rad}\ \ (35.538^\circ)$$

تظهر بداية الحمل المتدرج للنقطة على الجدار بزاوية **32.66°** ونهايته بزاوية **35.54°**؛ ويبلغ طولا الشعاعين 5.385 و 8.602 m.

الحل (2/2)

الحل

3 الوسط نصف اللانهائي (ψ = 1): الحدود الثلاثة داخل القوس

$$\sigma_H = \frac{q}{\pi c}\left[c\beta - x\alpha + 2z\ln\frac{R_2}{R_1}\right] = \frac{20}{5\pi}\left[5(0.62025) - 2(0.57004) + 10\ln\frac{8.6023}{5.3852}\right]$$

$$= 1.27324\,[3.1012 - 1.1401 + 4.6838] = 1.27324(6.6450) = \mathbf{8.461}\ \text{kPa}$$

4 الجدار الجاسئ (ψ = 2): ضعف قيمة الوسط شبه اللانهائي

$$\sigma_H = 2 \times 8.461 = \mathbf{16.921}\ \text{kPa}$$

عند z = 5 m تكون **σ_H = 16.921 kPa** (جدار جاسئ؛ و 8.461 في الوسط شبه اللانهائي). وتعطي الوحدة القيمة نفسها. يدخل الحد x·α بإشارة سالبة: فالحمل المتدرج المتزايد يقلل الحمل القريب من الجدار قياساً إلى شريط كامل يبدأ من x.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

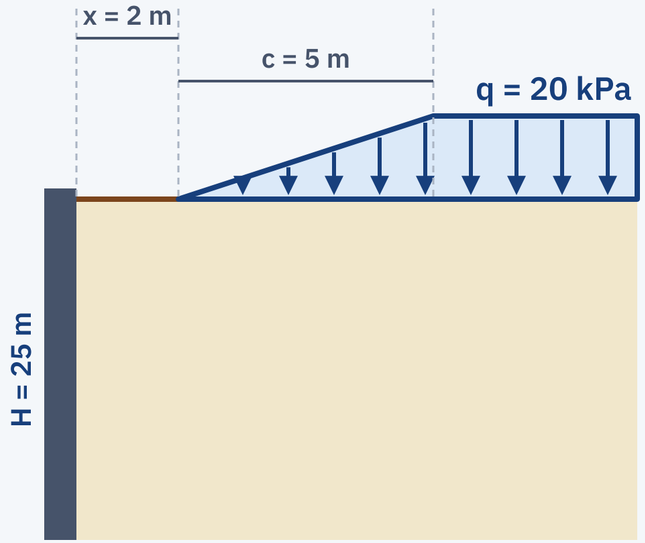
مثال

المعطيات

النموذج	**الحمل المتدرج في المثال 1؛ جدار جاسئ؛ الجدول كل $H/30 = 0.833$ m**
في كل صف	**R_1، R_2، α، β و σ_H؛ قيم الوسط شبه اللانهائي تساوي نصف قيم الجدار الجاسئ**

المطلوب

مخطط الضغط والقيمة عند قاع الجدار؛ وسلوك الضغط في الأعماق (نهاية الصيغة عندما z → ∞).



الحل (1/2)

الحل

σ_H (kPa)	β (°)	α (°)	R_2 (m)	R_1 (m)	z (m)
0.000	0.00	0.00	7.000	2.000	0.00
5.109	6.79	15.83	7.049	2.167	0.83
9.258	13.39	26.41	7.196	2.603	1.67
12.275	19.65	31.69	7.433	3.202	2.50
14.395	25.46	33.57	7.753	3.887	3.33
15.877	30.76	33.60	8.146	4.622	4.17
16.921	**35.54**	**32.66**	**8.602**	**5.385**	**5.00**
17.665	39.81	31.27	9.112	6.167	5.83
18.202	43.60	29.70	9.667	6.960	6.67
18.596	46.97	28.09	10.259	7.762	7.50
18.887	49.97	26.53	10.883	8.570	8.33
19.107	52.63	25.06	11.534	9.382	9.17
19.275	55.01	23.68	12.207	10.198	10.00
19.405	57.13	22.41	12.898	11.016	10.83
19.506	59.04	21.24	13.606	11.837	11.67
19.586	60.75	20.16	14.327	12.659	12.50
19.651	62.30	19.17	15.059	13.482	13.33
19.703	63.71	18.26	15.802	14.307	14.17
19.745	64.98	17.42	16.553	15.133	15.00
19.780	66.15	16.65	17.312	15.959	15.83
19.809	67.22	15.94	18.077	16.786	16.67
19.833	68.20	15.28	18.848	17.614	17.50
19.853	69.10	14.67	19.624	18.442	18.33
19.870	69.94	14.11	20.405	19.271	19.17
19.885	70.71	13.58	21.190	20.100	20.00
19.897	71.43	13.09	21.978	20.929	20.83
19.908	72.10	12.63	22.769	21.759	21.67
19.918	72.72	12.20	23.564	22.589	22.50
19.926	73.30	11.80	24.361	23.419	23.33
19.933	73.85	11.42	25.160	24.249	24.17
19.939	74.36	11.07	25.962	25.080	25.00

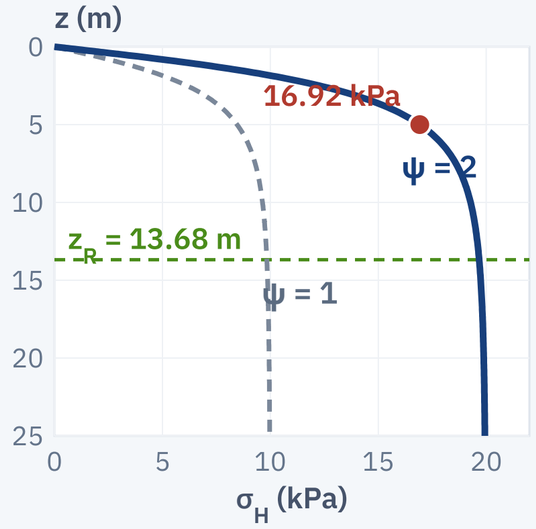
الحل (2/2)

الحل

1 عند السطح وعلى العمق

$$z = 0: \quad \sigma_H = 0 \qquad z = H = 25\ \text{m}: \quad \sigma_H = \mathbf{19.94}\ \text{kPa}$$

$$z \to \infty: \quad \alpha \to 0,\ \beta \to \tfrac{\pi}{2},\ 2z \ln \tfrac{R_2}{R_1} \to 0 \ \Rightarrow\ \sigma_H \to \psi\, \frac{q}{2}$$



الضغط معدوم عند السطح و**يزداد مع العمق**: وتوجد القيمة العظمى عند أسفل الجدار (19.94 kPa). وفي الأعماق الكبيرة $\sigma_H \to \psi q/2 = \mathbf{q}$: ففي $z = 50$ m تبلغ 19.99، وفي $z = 1000$ m تبلغ 20.00 kPa (جدار صلب). وتبلغ الإحداثية الرأسية عند $z = 5$ m القيمة 16.921 kPa (السطر بالخط الغامق، المثال 1).

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

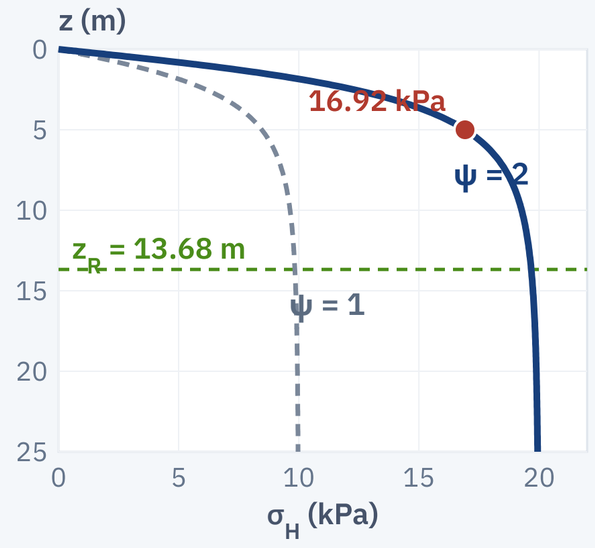
مثال

المعطيات

النموذج	**الحمل المتدرج في المثال 1؛ الجدار الصلب؛ جدول $H/30$ في المثال 2 ($n = 30$، $h = H/30 = 0.8333$ m)**
الطريقة	**قاعدة Simpson؛** $z_R = \int z\,\sigma\,dz \,/\, P_H$

المطلوب

P_H و z_R (يدوياً، من الجدول)؛ وقيم الوسط شبه اللانهائي؛ والمقارنة مع نتيجة الوحدة.



الحل (1/2)

الحل

	σ_0	Σ tek (i = 1, 3, …, 29)	Σ الزوجية (i = 2, 4, …, 28)	σ_{30}
σ_H (kPa)	0.000	266.553	255.220	19.939

1 مجموع Simpson والمساحة

$$\Sigma = \sigma_0 + 4(266.553) + 2(255.220) + \sigma_{30} = 1{,}596.59$$

$$P_H \approx \frac{h}{3}\,\Sigma = \frac{0.8333}{3}(1{,}596.59) = \mathbf{443.50}\ \text{kN/m}$$

يدوياً **443.50 kN/m**؛ والتكامل الدقيق في الوحدة **443.49 kN/m** (الفرق 0.002%). وفي الوسط نصف اللانهائي يكون النصف: **221.74 kN/m**.

النظرية · القسم 4 ←

الحل (2/2)

الحل

	$z_0\sigma_0$	Σ منفرد	Σ مزدوج	$z_{30}\sigma_{30}$
$z\sigma_H$ (kPa·m)	0.000	3,638.41	3,393.35	498.48

2 العزم الأول والعمق

$$\int z\,\sigma\,dz \approx \frac{0.8333}{3}\left[0 + 4(3{,}638.41) + 2(3{,}393.35) + 498.48\right] = 6{,}066.3 \text{ kN}$$

$$z_R = \frac{6{,}066.3}{443.50} = \mathbf{13.68}\text{ m} \quad \text{(من سطح الأرض)} \qquad H - z_R = 11.32\text{ m} \quad \text{(من القاعدة)}$$

يدوياً **z_R = 13.68 m**؛ والوحدة 13.68 m. وتؤثر المحصلة 443.49 kN/m على عمق **13.68 m تحت سطح الأرض** (وعلى ارتفاع 11.32 m فوق القاعدة)؛ ولا تتغير z_R بتغير ψ.

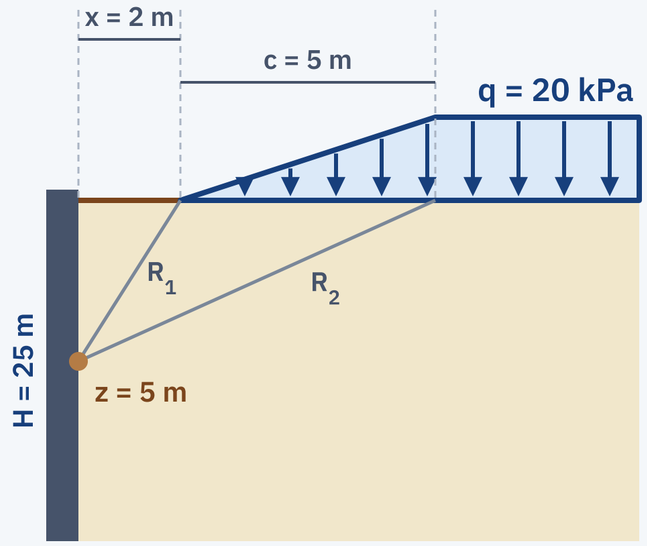
تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

مثال

المطلوب

إيجاد مساهمتي الحمل المتدرج والهضبة كل على حدة وجمعهما للحصول على σ_H؛ ثم المقارنة مع الصيغة المغلقة للمثال 1.



المعطيات

النموذج	**مثال 1:** $z = 5$ m؛ **وسط شبه لانهائي** ($\psi = 1$)
الطريقة	$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\int w(s)\,\frac{s^2 z}{(s^2+z^2)^2}\,ds$؛ **في الجزء المتدرج** $w = q(s-x)/c$، **وفي الجزء المستوي** $w = q$
الحساب	**حمل متدرج: Simpson** ($n = 10$، $h = 0.5$ m)؛ **هضبة: تكامل مغلق**

الحل (1/2)

الحل

i	s (m)	w(s) (kPa)	f(s) = s²z/(s²+z²)² (1/m)	c	c·w·f
0	2.0	0.00	0.02378	1	0.00000
1	2.5	2.00	0.03200	4	0.25600
2	3.0	4.00	0.03893	2	0.31142
3	3.5	6.00	0.04414	4	1.05941
4	4.0	8.00	0.04759	2	0.76145
5	4.5	10.00	0.04945	4	1.97796
6	5.0	12.00	0.05000	2	1.20000
7	5.5	14.00	0.04955	4	2.77472
8	6.0	16.00	0.04837	2	1.54797
9	6.5	18.00	0.04671	4	3.36314
10	7.0	20.00	0.04474	1	0.89481
			= Σ c·w·f		**14.14688**

1 تكامل الأحمال الخطية على المنحدر

$$I_{ramp} = \frac{h}{3}\sum c_i\, w_i\, f_i = \frac{0.5}{3}(14.14688) = \mathbf{2.3578}$$

الحل (2/2)

الحل

2 المنطقة المستوية ($s \geq x + c = 7$ m): تكامل بصيغة مغلقة مع $A(s) = \tfrac{1}{2}[\tan^{-1}(s/z) - sz/(s^2+z^2)]$

$$A(7) = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{7}{5} - \frac{7(5)}{74}\right] = 0.23879 \qquad A(\infty) = \frac{\pi}{4} = 0.78540$$

$$I_{plateau} = q\,[A(\infty) - A(7)] = 20(0.78540 - 0.23879) = 10.9322$$

3 المجموع و ψ

$$\sigma_H = \frac{2}{\pi}\,(I_{ramp} + I_{plateau}) = \frac{2}{\pi}(2.3578 + 10.9322) = \mathbf{8.4607}\ \text{kPa} \quad (\psi = 1)$$

$$\psi = 2: \quad \sigma_H = \mathbf{16.921}\ \text{kPa}$$

يعطي التراكب **8.4607 kPa**؛ وتعطي الصيغة المغلقة (المثال 1) **8.4607 kPa**. الطريقتان متطابقتان: فالحدود الواردة بين القوسين المربعين هي مجموع تكاملي القسم المتدرج والقسم المنتظم.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

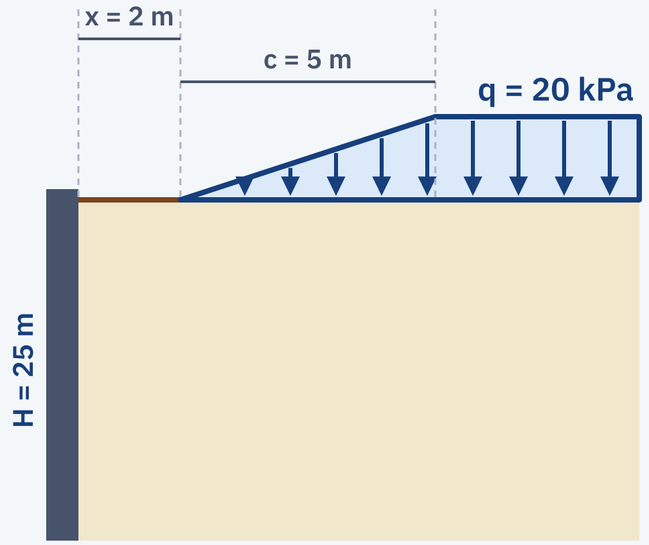
مثال

المعطيات

النموذج	$H = 25.0$ m؛ $q = 20$ kPa؛ جدار جاسئ؛ يتغير أحدها فقط في كل مرة
المتغيرات	مسافة البداية $x = 0$؛ 2؛ 5؛ $c = 5$ m) 10 m؛ والعرض $c = 1$؛ 5؛ 10؛ $x = 2$ m) 20 m؛

المطلوب

لكل حالة: P_H وz_R والضغط عند القاعدة؛ قيم الوسط نصف اللانهائي؛ الحد الأعلى (الحمل المنتظم).



الحل (1/2)

الحل

$\sigma_H(H)$ (kPa)	$H - z_R$ (m)	z_R (m)	P_H (kN/m), $\psi = 1$	P_H (kN/m), $\psi = 2$	x (m), c = 5
19.98	11.81	13.19	234.19	468.38	0
19.94	11.32	13.68	221.74	443.49	**2**
19.78	10.72	14.28	203.75	407.49	5
19.17	10.00	15.00	176.38	352.75	10

$\sigma_H(H)$ (kPa)	$H - z_R$ (m)	z_R (m)	P_H (kN/m), $\psi = 1$	P_H (kN/m), $\psi = 2$	c (m), x = 2
19.99	11.78	13.22	234.14	468.28	1
19.94	11.32	13.68	221.74	443.49	**5**
19.76	10.89	14.11	207.05	414.10	10
19.02	10.33	14.67	181.34	362.68	20

كلما ابتعد الحمل المتدرج عن الجدار (x ↑) أو ارتفع ببطء (c ↑) **تنقص المحصلة ويزداد عمق z_R**؛ ويظل الضغط عند القاعدة قريباً من $q = 20$ kPa. وقيم $\psi = 1$ هي نصف قيم الجدار الجاسئ.

الحل (2/2)

الحل

1 الحد الأعلى: يبدأ الحمل من وجه الجدار (x = 0) ويصبح q فوراً (c → 0): حمل إضافي منتظم

$$\sigma_H = \psi\,\frac{q}{2} = q \quad \text{(أي عند z)} \;\Rightarrow\; P_H = qH = 20 \times 25 = \mathbf{500}\ \text{kN/m}, \quad z_R = \frac{H}{2} = 12.5\ \text{m}$$

2 عرض الحمل المتدرج c ← 0: حمل مدرج يبدأ عند x = 2 m

$$c = 0.001\ \text{m}: \quad P_H = 474.58\ \text{kN/m}, \quad z_R = 13.09\ \text{m}$$

$$\text{صيغة الشريط } (x_2 \to \infty): \quad P_H = 474.59\ \text{kN/m}, \quad z_R = 13.09\ \text{m}$$

الحمل المتدرج في المثال 1 يقع بين هذين الحدين: **443.49 kN/m**، أي 88.7% من الحد الأعلى 500 kN/m. وكلما زاد انحدار الحمل المتدرج اقتربت النتيجة من حل الشريط للحمل الدرجي: وهو التراكب نفسه. (تعطي الوحدة 499.99 kN/m عند c = 0.001 m، x = 0.)

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

النقاط الرئيسية

$\sigma_H = \psi\, q/(\pi c)\,[c\beta - x\alpha + 2z\ln(R_2/R_1)]$؛ $R_1 = \sqrt{(x^2 + z^2)}$، $R_2 = \sqrt{((x + c)^2 + z^2)}$، $\alpha = \tan^{-1}((x + c)/z) - \tan^{-1}(x/z)$، $\beta = \pi/2 - \tan^{-1}((x + c)/z)$ (بالراديان)؛ $\psi = 2$ للجدار الصلب، $\psi = 1$ للوسط شبه اللانهائي

مثال ($z = 5$ m): $R_1 = 5.385$ m، $R_2 = 8.602$ m؛ $\beta = 35.538°$، $\alpha = 32.661°$؛ $\sigma_H = 8.461$ kPa ($\psi = 1$)، **16.921 kPa** ($\psi = 2$)

المخطط: صفر عند السطح، ويزداد مع العمق، ويقترب في الأعماق من القيمة $\psi q/2 = q$ (19.94 kPa عند القاع)

المحصلة $z_R = \int z\sigma_H dz/P_H =$ **13.68 m**، $P_H = \int \sigma_H dz =$ **443.49 kN/m** (من سطح الأرض)؛ وعند $\psi = 1$ تكون $P_H = 221.74$ kN/m ويبقى z_R نفسه

المقارنة: تتناقص المحصلة كلما ابتعد الحمل المتدرج عن الجدار واتسع؛ والحد الأعلى هو الحمل المنتظم ($q\ H = 500$ kN/m)، وعند الطرف الأدنى يؤول إلى حمل درجي عندما يزداد انحدار الحمل المتدرج

المراجع

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning؛ تتبع هذه الصفحة هذا المرجع.

ملاحظة

جميع الأمثلة العددية مستخرجة بمحرك الحساب الخاص بالوحدة؛ وتعطي الوحدة القيم نفسها. والمثال الابتدائي للوحدة هو الجدار الذي تبلغ فيه $H = 25\ m$، $x = 2$ m، $c = 5\ m$، $q = 20\ kPa$.

حسابات الجيوتكنيك عبر الإنترنت

من النظرية إلى التطبيق

أدخل في GeoTerva الحمل المتدرج الخاص بك ومسافة البداية والعرض وارتفاع الجدار؛ وتعطي الوحدة مخطط الضغط والمحصلة وعمق تأثيرها والمناظر الثلاثة والحل خطوة بخطوة والتقرير معاً.

افتح الوحدة ←

صفحة النظرية ←

افتح على الهاتف

لا تتطلب الوحدات التجريبية تسجيلاً.

إذا رغبت في استخدامها في محاضراتك: info@geoterva.com