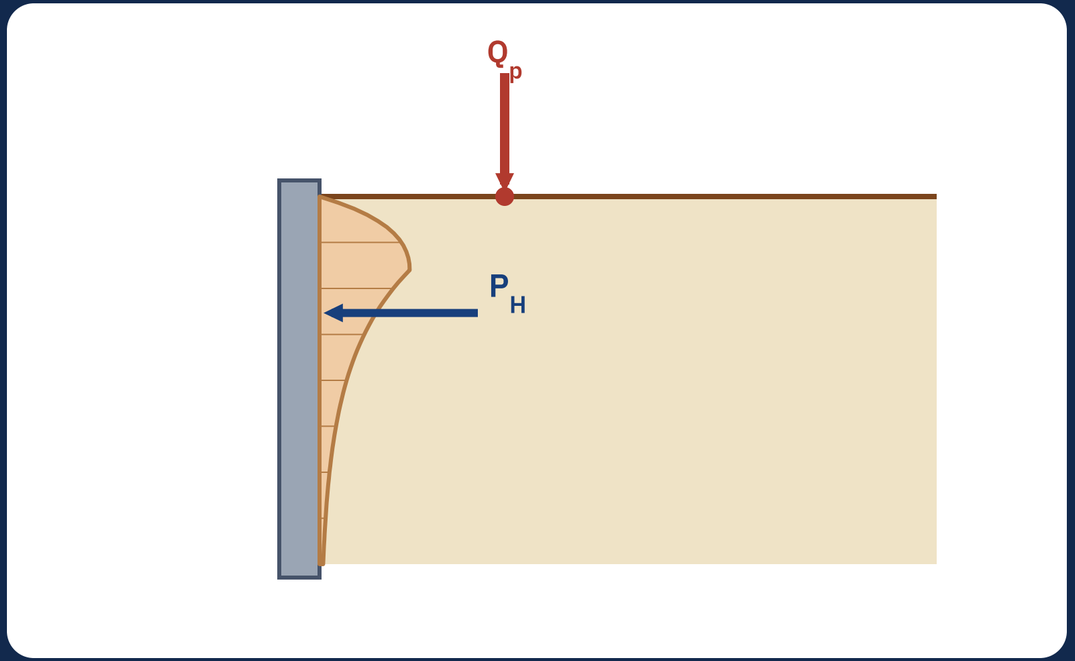
Apresentação de aula de geotecnia · Sobrecargas

Sobrecarga pontual

Aula: pressão lateral produzida em um muro por uma carga pontual na superfície; dois métodos, resultante, distribuição em planta e cargas múltiplas, exemplos resolvidos.

- $m = x/H \cdot n = z/H$
- $\sigma_H = (3Q_p/\pi)\, x^2 z/R^5$
- Ábaco de Terzaghi–NAVFAC
- P_H e L
- Distribuição em planta



Introdução

O que veremos nesta aula?

- A geometria da carga pontual: **x**, **y**, **z**, **R** e os adimensionais **m = x/H**, **n = z/H**
- Solução **elástica (muro rígido)**: o dobro da tensão de Boussinesq, com pressão máxima em **z = x/2**; $\mathbf{x_{min} = 0.30\ m}$
- **Ábaco de Terzaghi–NAVFAC**: Caso 1 ($m \le 0.4$) e Caso 2 ($m > 0.4$)
- Resultante $\mathbf{P_H = (Q_p/H)\cdot I_0}$ e altura $\mathbf{L = H\cdot I_1/I_0}$; expressões fechadas de I_0, I_1
- Distribuição **em planta** ao longo do muro ($\cos^2(1.1\theta)$) e **no máximo três cargas na mesma reta**

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: fórmula e justificativa

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Muro do exemplo: H = 15 m, carga pontual Q_p = 38 kN a x = 5 m de distância do muro. P_H é a força por unidade de comprimento do muro na seção da carga (kN/m).

Carga pontual atuante no muro

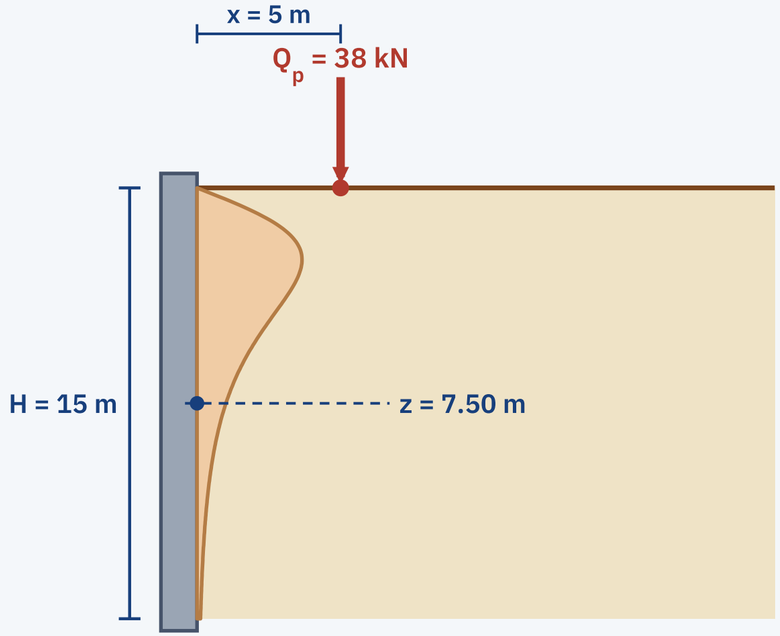
TEORIA

A carga concentrada Q_p na superfície cria no solo um campo de tensões tridimensional; se a carga estiver dentro da zona de influência de um muro vertical, parte do acréscimo de tensão é transmitida ao muro como **pressão horizontal**

O módulo fornece a variação da pressão com a profundidade ao longo da reta da carga perpendicular ao muro, sua **resultante** e sua **linha de ação**, bem como sua distribuição ao longo do muro em planta

$$m = \frac{x}{H}, \qquad n = \frac{z}{H}$$

H — altura do muro; **x** — distância horizontal do muro à carga; **z** — profundidade a partir da superfície
y — distância, ao longo do muro, a partir da perpendicular ao muro que passa pela carga; **R = √(x² + y² + z²)**
σ_H — tensão horizontal na reta do eixo; **σ'_H** — em planta; **P_H** — resultante; **L** — distância da base à linha de ação
θ — ângulo em planta no ábaco; **x_{min}** — menor distância de cálculo no método elástico (0.30 m)



Solução elástica e ábaco de Terzaghi–NAVFAC

TEORIA

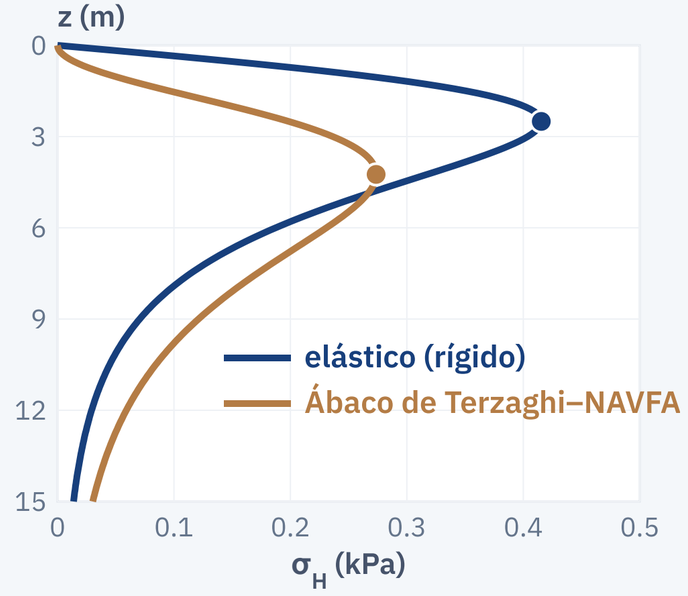
Ambos descrevem o **muro indeslocável**; diferem mais em **uma carga próxima ao muro**

Elástico: o **dobro** da tensão de Boussinesq: a carga-imagem espelhada do lado oposto do muro anula o movimento lateral na face (Mindlin 1936); coeficiente de Poisson 0.5

Ábaco (Terzaghi 1954): o efeito da distância cessa em **m = 0.4**; uma carga situada dentro de 0.4H é desenhada como se estivesse a uma distância de 0.4H

Para uma carga dentro de 0.4H, a solução elástica concentra **pressão crescente** perto da parte superior do muro, enquanto o ábaco mantém um único diagrama; mais longe, ambos fornecem a mesma ordem de grandeza

Perfil (H = 15 m, x = 5 m, Q_p = 38 kN)



Muro rígido: pressão, valor de pico e resultante em forma fechada

TEORIA

Na reta da carga perpendicular ao muro (y = 0): **$\sigma_H = (3Q_p/\pi)\, x^2 z/R^5$**; o pico ocorre em **$z = x/2$**, **$\sigma_{H,max} = 0.2733\, Q_p/x^2$**

À medida que a carga se aproxima do muro, a solução torna-se **singular**: P_H aumenta como ≈ $Q_p/(\pi x)$; por isso, para **$x < x_{min} = 0.30$ m**, a carga é calculada em 0.30 m

Dentro da distância crítica de cerca de **0.4H**, as equações elásticas deixam de ser confiáveis: exige-se julgamento de engenharia, e o ábaco fornece uma comparação

$$\sigma_H = \frac{3}{\pi}\,\frac{Q_p}{H^2}\,\frac{m^2\, n}{\left(m^2+n^2\right)^{5/2}}$$

$$I_0 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{m} - \frac{m^2}{\left(1+m^2\right)^{3/2}}\right] \qquad I_1 = I_0 - \frac{1}{\pi\left(1+m^2\right)^{3/2}}$$

Terzaghi–NAVFAC: Caso 1 e Caso 2

TEORIA

Em cada profundidade calcula-se **n = z/H**, e a equação é escolhida em função de **m**

A equação do Caso 1 não contém m: é o valor do Caso 2 para m = 0.4 (1.77 × 0.16 = 0.2832, escrito como **0.28**); uma carga dentro de 0.4H, onde quer que esteja, fornece **o mesmo diagrama, P_H e L**

Devido ao arredondamento, no limite m = 0.4, P_H apresenta um pequeno degrau (≈ 1.1%); L permanece contínuo

$$\sigma_H = 0.28\,\frac{Q_p}{H^2}\,\frac{n^2}{\left(0.16 + n^2\right)^3} \qquad m \le 0.4\ (\text{Caso 1})$$

$$\sigma_H = 1.77\,\frac{Q_p}{H^2}\,\frac{m^2\,n^2}{\left(m^2 + n^2\right)^3} \qquad m > 0.4\ (\text{Caso 2})$$

P_H, L e I_0, I_1

TEORIA

P_H é a área do diagrama de pressões; **L** é a altura do centro de gravidade acima da base do muro: a resultante atua à profundidade **H – L** a partir da superfície

P_H é a força na própria seção da carga (y = 0); como a pressão diminui ao longo do muro, ela **não é multiplicada pelo comprimento do muro**

Escrevendo $\sigma_H = (Q_p/H^2)\cdot f(n)$, restam dois números puros; na elasticidade, em forma fechada, e no ábaco, uma integral numérica (ou fechada). As constantes do ábaco são essa integral lida em um único valor de m: para **m = 0.4**, P_H = 0.787 Q_p/H, L = 0.587 H; para **m = 0.6**, 0.457 Q_p/H e 0.476 H

$$P_H = \frac{Q_p}{H}\, I_0 \qquad L = H\,\frac{I_1}{I_0}$$

$$I_0 = \int_0^1 f(n)\, dn \qquad I_1 = \int_0^1 f(n)\,(1-n)\, dn$$

Pressão ao longo do muro e múltiplas cargas

TEORIA

Elástico: a fórmula de σ_H é válida em todos os pontos do muro ($R^2 = x^2 + y^2 + z^2$); em profundidade constante, a pressão diminui ao longo do muro com $(R_0/R)^5$, com pico em $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}/2$

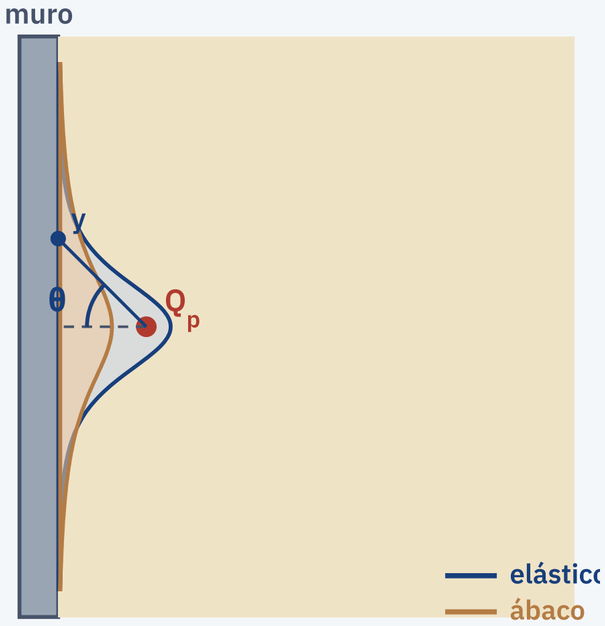
Ábaco: a pressão sobre a reta do eixo é reduzida pelo ângulo em planta; quando o ângulo 1.1θ atinge 90° (**$\theta \approx 81.8°$**), a redução é mantida em zero

Várias cargas (no máximo 3): cada uma tem os seus próprios valores x_i e $Q_{p,i}$; como as pressões são acréscimos de tensão, elas são **somadas**; a resultante atua no ponto em que os momentos em relação à base se equilibram

$$\sigma'_H = \sigma_H \cos^2(1.1\,\theta) \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}\ (\text{ábaco})$$

$$\sigma_H = \sum_i \sigma_{H,i} \qquad P_H = \sum_i \frac{Q_{p,i}}{H} I_{0,i} \qquad L = \frac{\sum_i P_{H,i}\, L_i}{P_H}$$

Planta: na profundidade z = 2.5 m



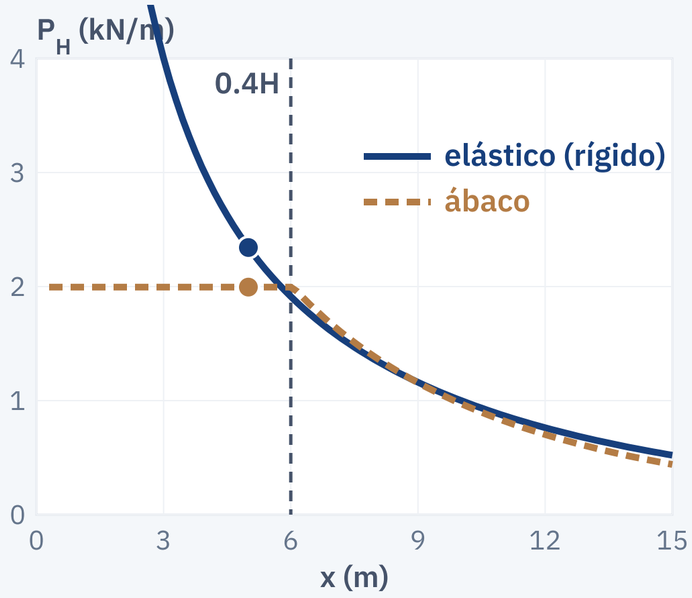
Resultante e sua posição, com a distância da carga

TEORIA

x (m)	m	P_H elástico	L elástico	ábaco de P_H	Ábaco de L	Situação
0.30	0.020	40.32	14.70	1.99	8.81	Caso 1
1.00	0.067	12.09	14.01	1.99	8.81	Caso 1
2.00	0.133	6.03	13.05	1.99	8.81	Caso 1
3.00	0.200	4.00	12.15	1.99	8.81	Caso 1
4.00	0.267	2.97	11.33	1.99	8.81	Caso 1
5.00	0.333	2.34	10.59	1.99	8.81	Caso 1
6.00	0.400	1.91	9.94	1.99	8.81	Caso 1
8.00	0.533	1.35	8.87	1.38	7.61	Caso 2
10.00	0.667	1.00	8.05	0.9755	6.74	Caso 2
15.00	1.000	0.5213	6.80	0.4402	5.45	Caso 2

m ≤ 0.4 (x ≤ 6 m): o ábaco fornece o mesmo P_H e L; o P_H elástico aumenta rapidamente à medida que a carga se aproxima

m > 0.4: a resultante elástica atua um pouco mais acima (L é maior)



Enunciado

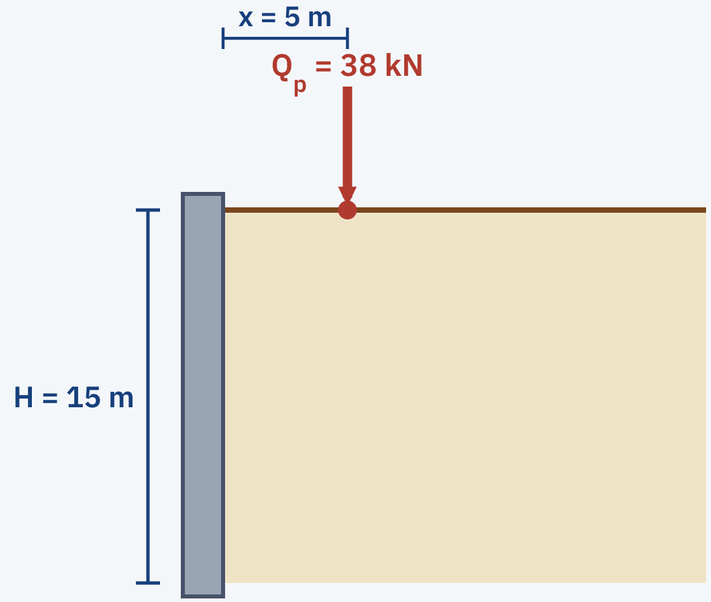
EXEMPLO

PEDE-SE

m, a pressão máxima $\sigma_{H,max}$ (z = x/2), I_0, I_1, P_H, **L** e a profundidade da resultante em relação à superfície.

Dados

Muro	$H = 15.00$ **m**
Carga	$Q_p = 38.0$ **kN, a** $x = 5.00$ **m do muro**
Método	**elástico (muro rígido);** $x \geq x_{min}$



Solução (1/3)

SOLUÇÃO

1 Razão de distância

$$m = \frac{x}{H} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = \mathbf{0.333} \quad (x \geq x_{min} = 0.30\ \text{m})$$

2 Profundidade do pico

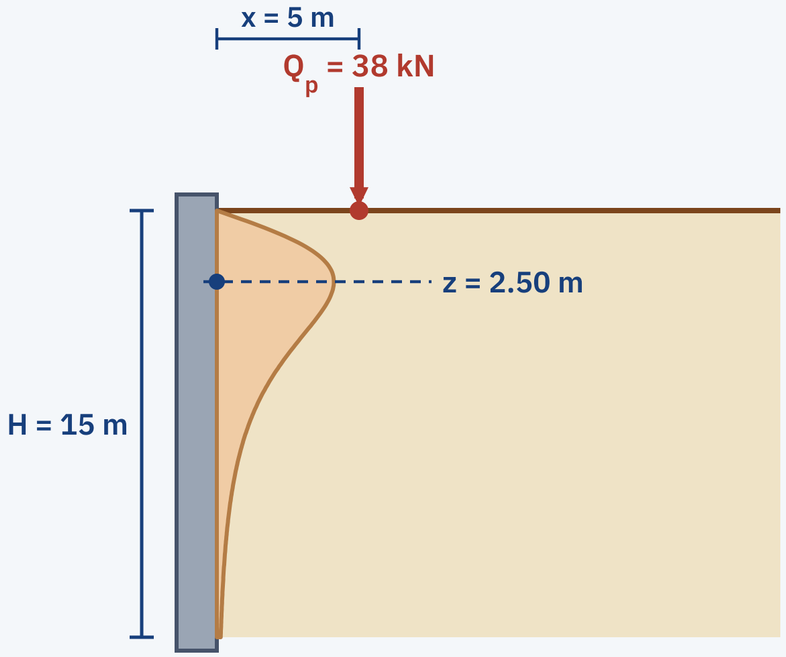
$$z = \frac{x}{2} = \mathbf{2.50}\ \text{m}$$

$$R = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{25.00 + 6.25} = \mathbf{5.5902}\ \text{m}$$

3 Pressão no topo

$$\sigma_{H,max} = \frac{3 \times 38}{\pi} \cdot \frac{5.00^2 \times 2.50}{5.5902^5}$$

$$\sigma_{H,max} = 36.287 \times 0.011449 = \mathbf{0.4154}\ \text{kPa}$$



O pico elástico é **0.4154 kPa**, na profundidade z = 2.50 m: 0.2733 Q_p/x^2 = 0.4154 kPa dá o mesmo valor.

Solução (2/3)

SOLUÇÃO

4 Valor adimensional da área I_0

$$I_0 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{m} - \frac{m^2}{(1+m^2)^{3/2}}\right] = \frac{1}{\pi}\left[3 - \frac{1/9}{(10/9)^{3/2}}\right] = \frac{1}{\pi}[3 - 0.09487] = \mathbf{0.92473}$$

5 Valor adimensional do momento I_1

$$I_1 = I_0 - \frac{1}{\pi(1+m^2)^{3/2}} = 0.92473 - \frac{1}{\pi(10/9)^{3/2}} = 0.92473 - 0.27178 = \mathbf{0.65295}$$

I_0 = **0.92473**, I_1 = **0.65295**: dois números que dependem apenas de m; a carga e a altura ficam fora deles.

Solução (3/3)

SOLUÇÃO

6 Resultante

$$P_H = \frac{Q_p}{H} I_0 = \frac{38}{15} \times 0.92473 = \mathbf{2.34}\ \mathrm{kN/m}$$

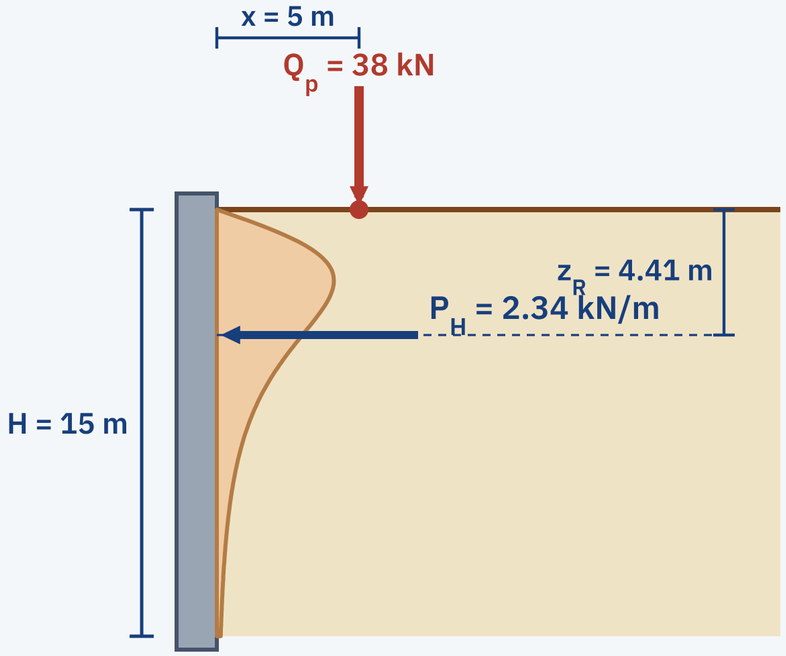
7 Linha de ação (a partir da base)

$$L = H\,\frac{I_1}{I_0} = 15 \times \frac{0.65295}{0.92473} = \mathbf{10.59}\ \mathrm{m}$$

8 Profundidade a partir da superfície

$$H - L = 15.00 - 10.59 = \mathbf{4.41}\ \mathrm{m}$$

P_H = 2.34 kN/m, a **4.41 m** abaixo da superfície (10.59 m a partir da base). A força atua na seção da carga: não é multiplicada pelo comprimento do muro.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

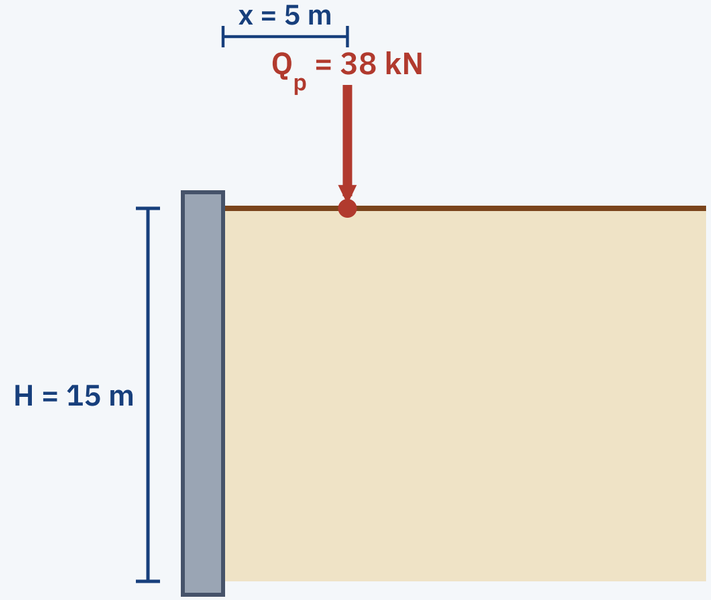
EXEMPLO

Dados

Muro e carga	$H = 15.00$ **m,** $Q_p = 38.0$ **kN,** $x = 5.00$ **m**
Método	**Ábaco de Terzaghi–NAVFAC; pressão a** $z = 2.50$ **m**

PEDE-SE

Seleção do caso, σ_H (z = 2.5 m), I_0, I_1, P_H e **L**.



Solução (1/3)

SOLUÇÃO

1 Seleção do caso

$$m = \frac{1}{3} = 0.333 \leq 0.4 \;\Rightarrow\; \text{Caso 1: diagrama } m = 0.4\text{fixo}$$

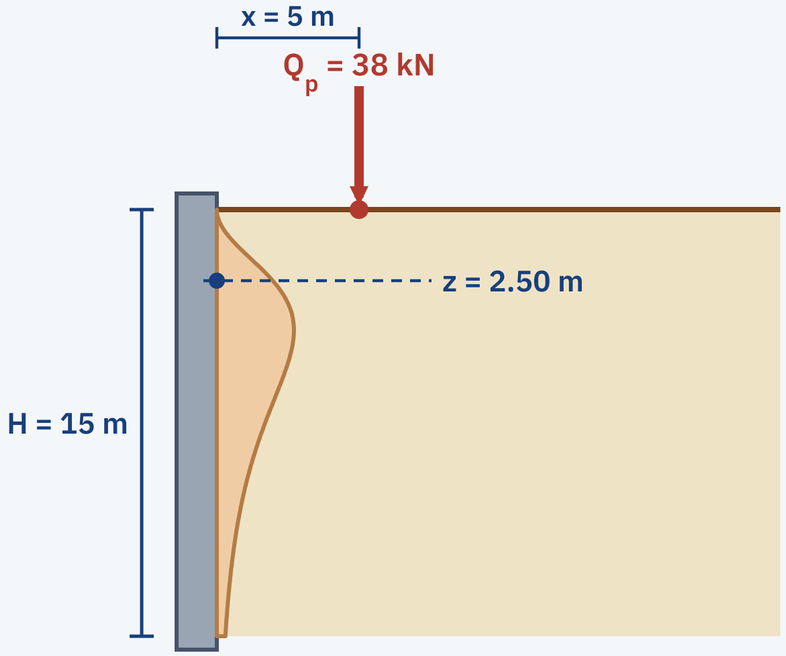
2 Razão de profundidade

$$n = \frac{z}{H} = \frac{2.50}{15} = \mathbf{0.1667}$$

3 Pressão

$$\sigma_H = 0.28\,\frac{38}{15^2}\cdot\frac{n^2}{(0.16+n^2)^3} = 0.04729 \times \frac{0.02778}{0.006621}$$

$$\sigma_H = 0.04729 \times 4.1953 = \mathbf{0.1984}\ \text{kPa}$$



Em z = 2.5 m, a pressão do ábaco é **0.1984 kPa**; na mesma profundidade, a solução elástica fornece 0.4154 kPa (pico).

Solução (2/3)

SOLUÇÃO

4 Integral (forma fechada, a = 0.16)

$$I_0 = \int_0^1 0.28\,\frac{n^2}{(a+n^2)^3}\,dn = 0.28\left[\frac{1}{8a(1+a)} - \frac{1}{4(1+a)^2} + \frac{\tan^{-1}(1/\sqrt{a})}{8a^{3/2}}\right]$$

5 Números

$$\frac{1}{8(0.16)(1.16)} = 0.6735 \qquad \frac{1}{4(1.16)^2} = 0.1858 \qquad \frac{\tan^{-1} 2.5}{8(0.16)^{3/2}} = 2.3248$$

$$I_0 = 0.28\,[0.6735 - 0.1858 + 2.3248] = 0.28 \times 2.8125 = \mathbf{0.7875}$$

I_0 = **0.7875**: coincide com a constante 0.787 Q_p/H que o ábaco fornece para m = 0.4. O módulo calcula essa integral numericamente (Simpson).

Solução (3/3)

SOLUÇÃO

6 $I_1 = I_0 - \int n\,f\,dn$ (forma fechada, a = 0.16)

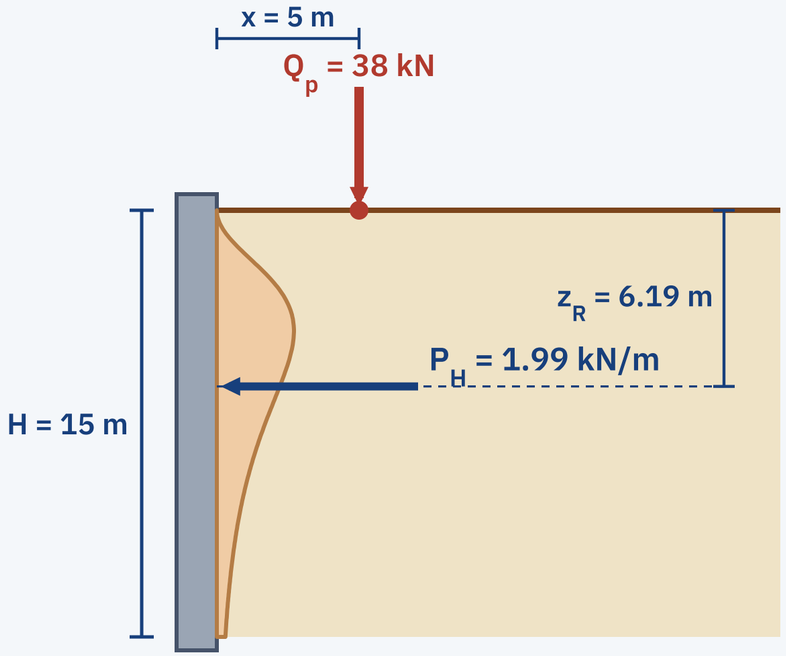
$$\int_0^1 nf\,dn = 0.28 \cdot \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{2a} - \frac{1}{1+a} + \frac{a}{2(1+a)^2}\right]$$

$$= 0.28 \times 1.1612 = 0.3251 \;\Rightarrow\; I_1 = 0.7875 - 0.3251 = \mathbf{0.4624}$$

7 Resultante e linha de ação

$$P_H = \frac{38}{15} \times 0.7875 = \mathbf{1.99}\ \mathrm{kN/m}$$

$$L = 15 \times \frac{0.4624}{0.7875} = \mathbf{8.81}\ \mathrm{m}$$



Ábaco: **P_H = 1.99 kN/m**, L = **8.81 m** (6.19 m abaixo da superfície). Em relação à solução elástica, a resultante é 15% menor e a linha de ação está 1.78 m mais abaixo.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

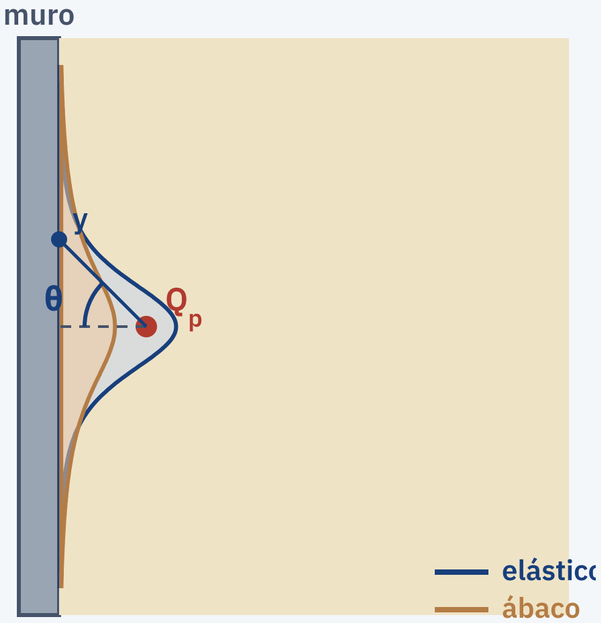
EXEMPLO

PEDE-SE

Em ambos os métodos σ'_H (y = 5 m); distribuição para y = 0 – 15 m.

Dados

Muro e carga	$H = 15.00$ **m,** $Q_p = 38.0$ **kN,** $x = 5.00$ **m**
Profundidade	$z = 2.50$ **m**
Posição	**a** $y = 5.00$ **m da perpendicular traçada pela carga (**$\theta = 45°$**)**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Elástico: redução com $(R_0/R)^5$

$$R_0^2 = x^2 + z^2 = 31.25 \qquad R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 56.25$$

$$\sigma'_H = \sigma_H \left(\frac{R_0}{R}\right)^5 = 0.4154 \times \left(\frac{31.25}{56.25}\right)^{5/2} = 0.4154 \times 0.2300 = \mathbf{0.0956}\ \text{kPa}$$

2 Ábaco: atenuação com $\cos^2(1.1\theta)$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{5}{5} = 45^\circ$$

$$\sigma'_H = \sigma_H \cos^2(1.1\theta) = 0.1984 \times \cos^2(49.5^\circ) = 0.1984 \times 0.4218 = \mathbf{0.0837}\ \text{kPa}$$

Em y = 5 m, a pressão elástica corresponde a 0.23 do valor no eixo (0.0956 kPa), enquanto o ábaco fornece 0.42 desse valor (0.0837 kPa): o ábaco decresce mais lentamente ao longo do muro, porém a partir de um valor inicial menor.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

y (m)	θ (°)	σ'_H elástica (kPa)	razão	σ'_H ábaco (kPa)	razão	pico elástico z (m)	pressão de pico (kPa)
0.0	0.0	0.4154	1.00	0.1984	1.00	2.50	0.4154
2.5	26.6	0.2634	0.63	0.1511	0.76	2.80	0.2659
5.0	45.0	0.0956	0.23	0.0837	0.42	3.54	0.1039
7.5	56.3	0.0317	0.08	0.0439	0.22	4.51	0.0393
10.0	63.4	0.0115	0.03	0.0237	0.12	5.59	0.0166
15.0	71.6	0.0022	0.01	0.0076	0.04	7.91	0.0042

A pressão é máxima ao longo da reta perpendicular traçada pela carga e decai rapidamente ao longo do muro; na solução elástica, a profundidade do pico diminui até $\sqrt{(x^2 + y^2)}/2$ à medida que y aumenta. No ábaco, a redução é mantida em zero após $\theta \approx 81.8°$.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

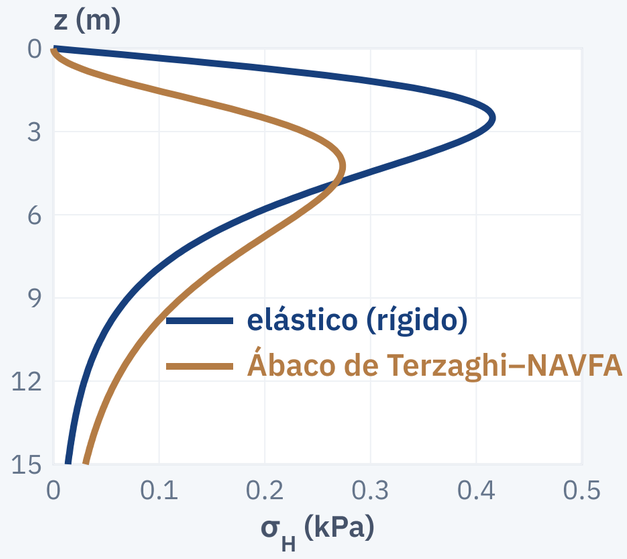
EXEMPLO

PEDE-SE

Perfil de σ_H para os dois métodos; o **pico** do ábaco (Caso 1) à mão.

Dados

Muro e carga	$H = 15.00$ **m,** $Q_p = 38.0$ **kN,** $x = 5.00$ **m**
Profundidades	$z = 0$ **–** 15 **m, a cada** 1.5 **m**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

z (m)	n = z/H	σ_H elástico (kPa)	σ_H pelo ábaco (kPa)
0.00	0.00	0.0000	0.0000
1.50	0.10	0.3511	0.0963
3.00	0.20	0.4038	0.2364
4.50	0.30	0.2964	0.2724
6.00	0.40	0.1873	0.2309
7.50	0.50	0.1143	0.1715
9.00	0.60	0.0706	0.1211
10.50	0.70	0.0448	0.0844
12.00	0.80	0.0293	0.0591
13.50	0.90	0.0198	0.0420
15.00	1.00	0.0138	0.0303

A pressão elástica atinge o pico de 0.4154 kPa a uma profundidade próxima da superfície (2.5 m) e decai rapidamente; o ábaco fornece um perfil mais suave, com pico mais profundo e menor.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

1 Derivada nula: d/dn [n²/(0.16 + n²)³] = 0

$$2n(0.16 + n^2) - 6n^3 = 0 \;\Rightarrow\; n^2 = \frac{0.16}{3} = 0.0533$$

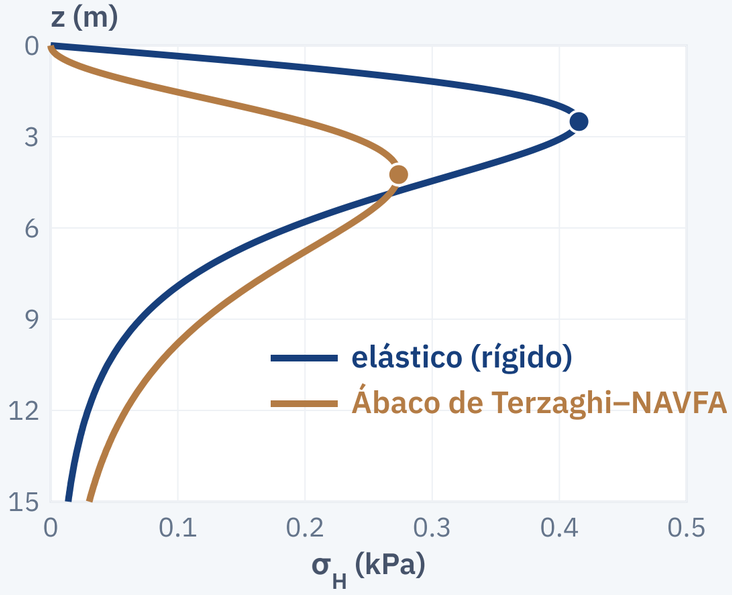
$$n = \mathbf{0.2828} \;\Rightarrow\; z = nH = \mathbf{4.243}\ \mathrm{m}$$

2 Pressão de pico (n² = 0.08)

$$\sigma_{H,max} = 0.28\,\frac{38}{15^2}\cdot\frac{0.08}{(0.16+0.08)^3}$$

$$\sigma_{H,max} = 0.04729 \times 5.787 = \mathbf{0.2737}\ \mathrm{kPa}$$

Pico do ábaco **0.2737 kPa** (z = 4.24 m); pico elástico **0.4154 kPa** (z = 2.50 m): o ábaco desloca o pico para baixo e o reduz a dois terços.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Muro e carga	$H = 15.00$ **m,** $Q_p = 38.0$ **kN**
Distâncias	$x = 0.3;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8;\ 10;\ 15$ **m**
Ek	$x < 0.30$ **m e o limite de** $0.4H = 6$ **m do ábaco**

PEDE-SE

P_H e **L** pelos dois métodos; verificação à mão para **x = 10 m**; x_{min} e o limite.

Solução (1/3)

SOLUÇÃO

x (m)	m	P_H elástico (kN/m)	L elástico (m)	P_H ábaco (kN/m)	L do ábaco (m)	Situação
0.30	0.020	40.32	14.70	1.99	8.81	Caso 1
1.00	0.067	12.09	14.01	1.99	8.81	Caso 1
2.00	0.133	6.03	13.05	1.99	8.81	Caso 1
3.00	0.200	4.00	12.15	1.99	8.81	Caso 1
4.00	0.267	2.97	11.33	1.99	8.81	Caso 1
5.00	**0.333**	**2.34**	**10.59**	**1.99**	**8.81**	**Caso 1**
6.00	0.400	1.91	9.94	1.99	8.81	Caso 1
8.00	0.533	1.35	8.87	1.38	7.61	Caso 2
10.00	0.667	1.00	8.05	0.9755	6.74	Caso 2
15.00	1.000	0.5213	6.80	0.4402	5.45	Caso 2

x ≤ 6 m: o ábaco fornece 1.99 kN/m e L = 8.81 m, e a distância não influi; o P_H elástico aumenta rapidamente à medida que a carga se aproxima (40.32 kN/m para x = 0.3 m). **x > 6 m**: os dois métodos se aproximam, e a resultante elástica atua mais acima.

Solução (2/3)

SOLUÇÃO

1 m = 10/15 = 0.667 > 0.4: ábaco caso 2. Elástico: I_0, I_1, P_H, L

$$I_0 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{m} - \frac{m^2}{(1+m^2)^{3/2}}\right] = 0.3960 \qquad I_1 = I_0 - \frac{1}{\pi(1+m^2)^{3/2}} = 0.2126$$

$$P_H = \frac{38}{15} \times 0.3960 = \mathbf{1.00}\ \mathrm{kN/m} \qquad L = 15 \times \frac{0.2126}{0.3960} = \mathbf{8.05}\ \mathrm{m}$$

2 Ábaco (Caso 2): mesmas expressões em forma fechada do Exemplo 2, a = m² e coeficiente 1.77 m²

$$I_0 = \int_0^1 f\, dn = 0.3851 \qquad I_1 = \int_0^1 f\,(1-n)\, dn = 0.1730$$

$$P_H = \frac{38}{15} \times 0.3851 = \mathbf{0.9755}\ \mathrm{kN/m} \qquad L = 15 \times \frac{0.1730}{0.3851} = \mathbf{6.74}\ \mathrm{m}$$

x = 10 m: elástico **1.00 kN/m**, L = 8.05 m; ábaco **0.9755 kN/m**, L = 6.74 m (linha da tabela).

Solução (3/3)

SOLUÇÃO

x (m)	x de cálculo (m)	P_H elástico (kN/m)	L (m)	$\sigma_{H,max}$ elástico (kPa)	P_H ábaco (kN/m)
0.05	**0.30**	40.32	14.70	115.4	1.995
0.10	**0.30**	40.32	14.70	115.4	1.995
0.20	**0.30**	40.32	14.70	115.4	1.995
0.30	0.30	40.32	14.70	115.4	1.995
0.50	0.50	24.19	14.50	41.5	1.995

x < 0.30 m: a carga é calculada em 0.30 m; mesmo a essa distância, o pico é de 115.4 kPa.

x (m)	m	Situação	P_H ábaco (kN/m)	L do ábaco (m)
5.99	0.3993	Caso 1	1.9950	8.8069
6.00	0.4000	Caso 1	1.9950	8.8069
6.000001	0.400000	Caso 2	2.0178	8.8069
6.01	0.4007	Caso 2	2.0137	8.8000

Ao ultrapassar o limite **m = 0.4**, o ábaco aumenta P_H em 1.14%; L permanece contínuo.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

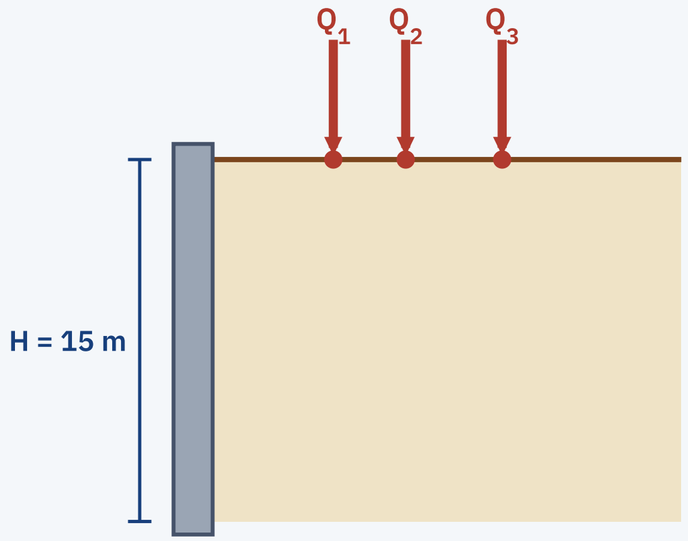
EXEMPLO

Dados

Muro	$H = 15.00$ **m**
Cargas	$Q_1 = 38$ **kN** ($x_1 = 5$ **m**), $Q_2 = 60$ **kN** ($x_2 = 8$ **m**), $Q_3 = 25$ **kN** ($x_3 = 12$ **m**); **todas sobre uma única reta perpendicular ao muro**
Método	**elástico (muro rígido); ábaco para comparação**

PEDE-SE

Os valores de $P_{H,i}$ e L_i de cada carga; o P_H total, **L** e o pico da pressão total.



Solução (1/3)

SOLUÇÃO

Carga	x (m)	Q_p (kN)	m	I_0	I_1	$P_{H,i}$ (kN/m)	L_i (m)
Q_1	5	38	0.3333	0.92473	0.65295	2.3427	10.592
Q_2	8	60	0.5333	0.53463	0.31597	2.1385	8.865
Q_3	12	25	0.8000	0.30089	0.14933	0.5015	7.444

1 Cada carga com seu próprio valor de m (elástico)

$$P_{H,i} = \frac{Q_{p,i}}{H}\, I_{0,i} \qquad L_i = H\,\frac{I_{1,i}}{I_{0,i}} \qquad \text{p. ex. } P_{H,2} = \frac{60}{15} \times 0.53463 = \mathbf{2.1385}\ \text{kN/m}$$

Cada carga está à sua própria distância x_i; todas atuam sobre a mesma seção do muro, de modo que as resultantes podem ser somadas.

Solução (2/3)

SOLUÇÃO

2 Resultante total (elástica)

$$P_H = \sum P_{H,i} = 2.3427 + 2.1385 + 0.5015 = \mathbf{4.9827}\ \mathrm{kN/m}$$

3 Linha de influência: equilíbrio de momentos em relação à base

$$L = \frac{\sum P_{H,i} L_i}{P_H} = \frac{2.343(10.592) + 2.139(8.865) + 0.501(7.444)}{4.983} = \mathbf{9.534}\ \mathrm{m}$$

Método	$P_{H,1}$	$P_{H,2}$	$P_{H,3}$	P_H total (kN/m)	L total (m)	a partir da superfície (m)
Elástico	2.3427	2.1385	0.5015	**4.9827**	**9.534**	5.466
Ábaco	1.9950	2.1774	0.4624	**4.6347**	**7.975**	7.025

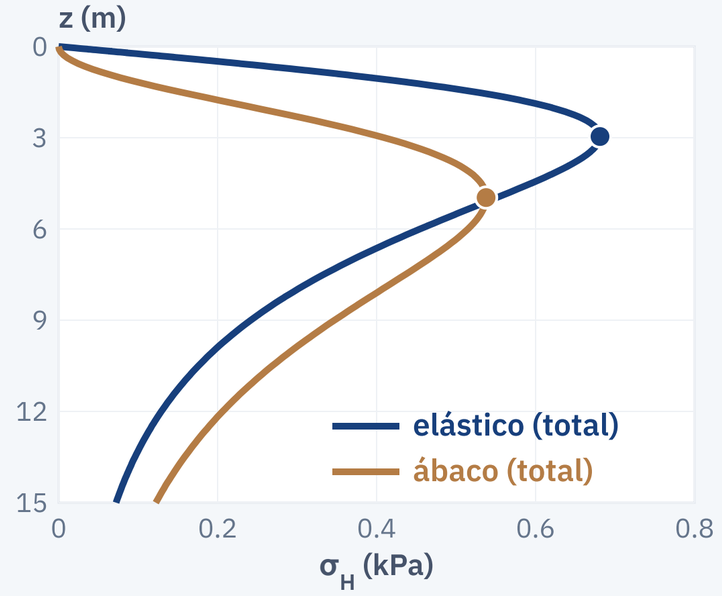
A resultante total das três cargas é de **4.98 kN/m** pela solução elástica e de **4.63 kN/m** pelo ábaco; as linhas de ação estão a 9.53 m e 7.97 m acima da base.

Solução (3/3)

SOLUÇÃO

z (m)	$\sigma_{H,1}$ (kPa)	$\sigma_{H,2}$ (kPa)	$\sigma_{H,3}$ (kPa)	σ_H total (kPa)
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	**0.0000**
1.5	0.3511	0.1540	0.0199	**0.5250**
3.0	0.4038	0.2416	0.0356	**0.6810**
4.5	0.2964	0.2533	0.0447	**0.5944**
6.0	0.1873	0.2200	0.0475	**0.4548**
9.0	0.0706	0.1304	0.0407	**0.2417**
12.0	0.0293	0.0705	0.0293	**0.1291**
15.0	0.0138	0.0387	0.0197	**0.0722**

As pressões são somadas (acréscimo de tensão): o pico elástico total é **0.6811 kPa**, em z = 2.96 m; no ábaco, 0.5377 kPa, em z = 4.97 m. O pico ocorre na profundidade em que a parcela da maior carga (Q_2) passa a predominar.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Resumo

Pontos-chave

m = x/H, **n = z/H**; elástico (muro rígido): $\boldsymbol{\sigma_H = (3Q_p/\pi)\, x^2 z/R^5}$, pico em z = x/2, $\sigma_{H,max} = 0.2733\ Q_p/x^2$; $\boldsymbol{x_{min} = 0.30\ m}$

Ábaco: Caso 1 ($m \le 0.4$): $\sigma_H = 0.28\ (Q_p/H^2)\ n^2/(0.16 + n^2)^3$; Caso 2: $1.77\ (Q_p/H^2)\ m^2n^2/(m^2 + n^2)^3$; dentro de 0.4H a distância não tem efeito

Exemplo (H = 15 m, x = 5 m, Q_p = 38 kN): pico elástico 0.4154 kPa (z = 2.5 m), $I_0 = 0.9247$, $I_1 = 0.6530$, **P_H = 2.34 kN/m**, L = 10.59 m; ábaco $P_H = 1.99$ kN/m, L = 8.81 m

Em planta: elástico $(R_0/R)^5$, ábaco $\cos^2(1.1\theta)$ (até $\theta \approx 81.8°$); **várias cargas** (no máximo 3): as pressões e $P_{H,i}$ são somadas, e L resulta do equilíbrio de momentos

Comparação: o ábaco é constante para $m \le 0.4$; o P_H elástico aumenta à medida que a carga se aproxima; P_H refere-se à seção da carga e não é multiplicado pelo comprimento do muro

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning; esta página segue essa referência.

Terzaghi, K. (1954). Anchored bulkheads. Transactions of the ASCE, 119, 1243–1280.

NAVFAC DM-7.02 (1986). Foundations and Earth Structures. Naval Facilities Engineering Command.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Gauthier-Villars, Paris.

Mindlin, R.D. (1936). Discussion: Pressure distribution on retaining walls. Proc. 1st Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Harvard, Vol. III, 155–156.

Spangler, M.G. and Mickle, J.L. (1956). Lateral pressures on retaining walls due to backfill surface loads. Highway Research Board Bulletin 141.

Bowles, J.E. (1996). Foundation Analysis and Design, 5th ed.

Frazee, G. (2021). New formulations of Boussinesq solution for vertical and lateral stresses in soil. ASCE Practice Periodical on Structural Design and Construction, 26(2).

USS Steel Sheet Piling Design Manual (1984); California Department of Transportation, Trenching and Shoring Manual — the chart method.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o próprio motor de cálculo do módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O muro inicial do módulo tem H = 15 m, x = 5 m e Q_p = 38 kN (método elástico).

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva o próprio muro, as cargas pontuais (no máximo três) e o método; o módulo fornece, em conjunto, o perfil de pressões, a distribuição em planta, a resultante e a linha de ação, a solução passo a passo e o relatório.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.

Para utilização em aulas: info@geoterva.com