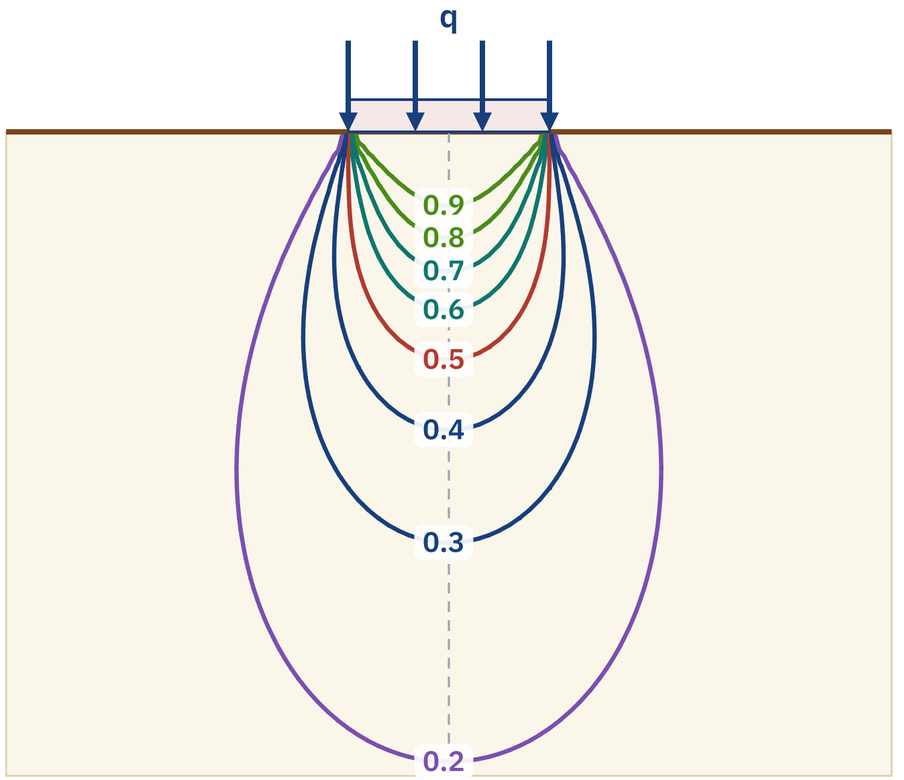
GeoTerva

岩土工程讲义 · 土体中的应力

竖向条形荷载下的应力

讲义：柔性、无限长的竖向条形荷载；单点手算、深度剖面和水平剖面、叠加。

线荷载的积分　角度形式　应力泡　叠加法　可手算求解



引言

本讲内容

条形荷载下方的竖向应力增量：宽度为B、无限长、承受均布压力q的柔性条带；**线荷载沿宽度的积分**

闭合的**反正切**形式和**角度形式**；当x < B/2时加到第一个反正切上的**π修正**

应力仅取决于**x/B**和**z/B**，且始终不超过q；**应力泡**和影响系数表

从头到尾手算一个点；以表格给出深度剖面和水平剖面；用**叠加**处理多个条形荷载

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：公式及其依据

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

算例：q = 100 kN/m²，B = 4 m；A点位于距中心线侧向x = 1 m、深度z = 1 m处。

条形荷载：宽度有限，长度无限

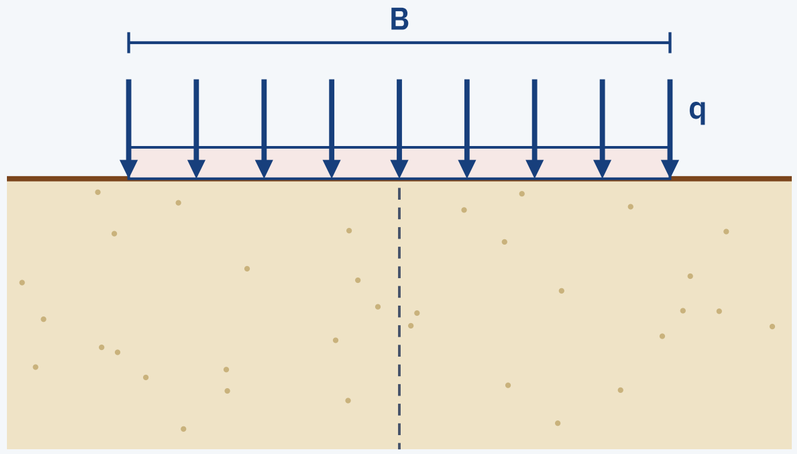
理论

狭长基础、道路或路堤顶面、墙底：许多荷载在一个方向上很长，在另一方向上宽度有限。**条形荷载**即用于模拟这类荷载

柔性条形荷载：宽度为B、长度无限、作用均匀竖向压力q。应力在每个截面上相同；该问题为**平面应变问题**（二维）

无论沉降如何，压力沿宽度始终为q；刚性基础则会使该压力重新分布

土体为**均质、各向同性的线弹性**半无限体。$\Delta\sigma_z$仅为荷载引起的增量；上覆土压力另行叠加



断面：条形荷载沿y方向无限延伸；各断面应力相同（平面应变）

从线荷载到条形荷载

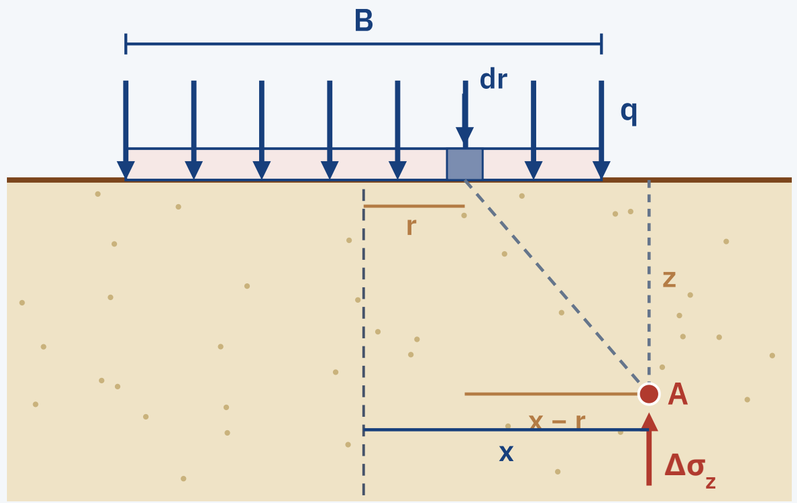
理论

宽度为dr的微元条带每单位长度承受荷载**q dr**，其作用相当于一条**线荷载**；它到A点的水平距离为x − r

$$d\sigma_z = \frac{2\,(q\,dr)\,z^3}{\pi\,[(x-r)^2+z^2]^2}$$

整个条形荷载是r = −B/2 … +B/2范围内这些线荷载之和

$$\Delta\sigma_z = \int_{-B/2}^{+B/2} \frac{2q}{\pi}\,\frac{z^3}{[(x-r)^2+z^2]^2}\,dr$$



积分的闭合形式

理论

取u = x − r；1/(u² + z²)²的**原函数**为(q/π)[tan⁻¹(u/z) + z u/(u² + z²)]。在积分限u = x − B/2与u = x + B/2处求值，即得**反正切形式**

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{\pi}\left\{\tan^{-1}\frac{z}{x-B/2} - \tan^{-1}\frac{z}{x+B/2} - \frac{B\,z\,[x^2 - z^2 - B^2/4]}{[x^2 + z^2 - B^2/4]^2 + B^2 z^2}\right\}$$

反正切值以**弧度**计；$\Delta\sigma_z$在+x和−x位置相同（条形荷载关于中心轴线对称）

方程按所写形式仅适用于x ≥ B/2。当0 ≤ x < B/2时，第一个反正切为负，应以**π + tan⁻¹[z/(x − B/2)]**代替；恰在x = B/2处，其值为π/2

数值验证(q = 100, B = 4, x = 1, z = 1)：线荷载解沿条带宽度的数值积分结果为**90.2232 kPa**，闭式解为**90.2232 kPa**

应力仅取决于角度

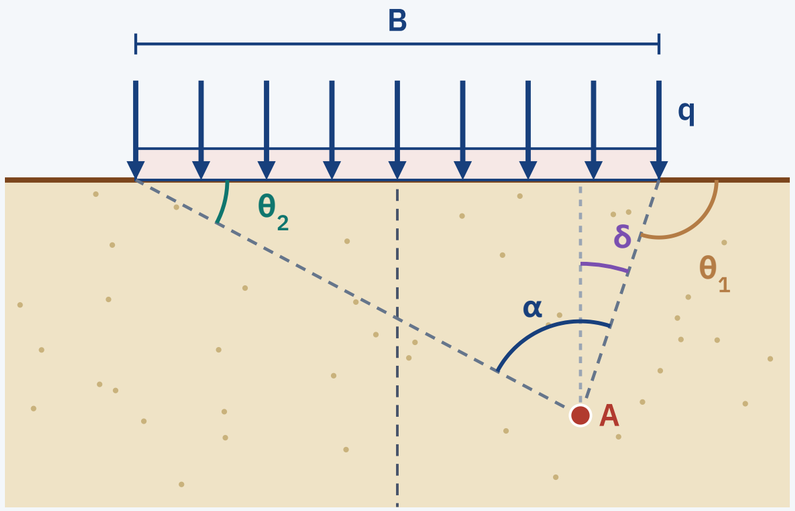
理论

同一结果可用图中的角度表示。θ自地表量测；$\alpha = \theta_1 - \theta_2$是自A点观察该条形荷载所张的角。**δ**为竖直线与自A点向+B/2边缘所作直线之间的夹角：$\delta = 90° - \theta_1$（在条形荷载下方为负）

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{\pi}\left[\alpha + \sin\alpha\,\cos(\alpha + 2\delta)\right]$$

$$F(u) = \tan^{-1}\frac{u}{z} + \frac{zu}{u^2 + z^2} = \varphi + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi \quad (u = z\tan\varphi)$$

应力仅取决于**x/B和z/B**，且**不会超过q**：在地表条形荷载下方$\alpha = \pi$，$\Delta\sigma_z = q$；条形荷载侧旁$\alpha = 0$



轴线下方与边缘下方

理论

轴线下方(x = 0; b = B/2)方程只剩一项；**边缘下方**(x = b)第一个反正切为π/2，在地表处$\Delta\sigma_z = q/2$

$$\left.\frac{\Delta\sigma_z}{q}\right|_{x=0} = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{b}{z} + \frac{bz}{b^2+z^2}\right]$$

$$\left.\frac{\Delta\sigma_z}{q}\right|_{x=b} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{z}{B} + \frac{Bz}{B^2+z^2}\right]$$

2z/B	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0
中心线下方(2x/B = 0)	0.959	0.818	0.550	0.396	0.306	0.208
边缘下方(2x/B = 1)	0.497	0.480	0.409	0.334	0.275	0.198

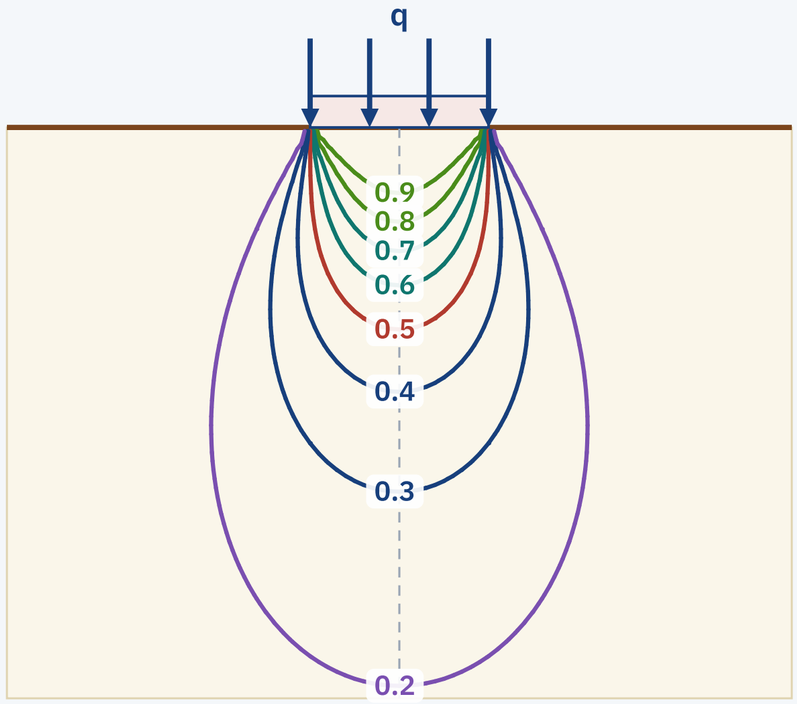
等值线：$\Delta\sigma_z/q$

理论

在轴线下方，应力在约**z = 1.1B**的深度处降至q的一半，在**3.1B**处降至五分之一，直到**6.3B**处才降至十分之一

0.6 – 0.9的等值线在近地表区域、条形荷载下方变密：即常见的**压力泡**

距离除以B后，曲线对**每一条形荷载都相同**：按x/B和z/B绘制的一张图适用于任意q和B



$\Delta\sigma_z/q$值

理论

2z/B \ 2x/B	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0.0	1.000	1.000	0.500	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.959	0.902	0.497	0.089	0.019	0.006	0.003
1.0	0.818	0.735	0.480	0.214	0.084	0.036	0.017
1.5	0.668	0.607	0.448	0.271	0.146	0.077	0.042
2.0	0.550	0.510	0.409	0.288	0.185	0.114	0.071
2.5	0.462	0.436	0.370	0.285	0.205	0.141	0.095
3.0	0.396	0.379	0.334	0.274	0.211	0.157	0.114
3.5	0.345	0.334	0.302	0.258	0.210	0.165	0.127
4.0	0.306	0.298	0.275	0.242	0.205	0.168	0.134
5.0	0.248	0.244	0.231	0.212	0.188	0.164	0.139
6.0	0.208	0.206	0.198	0.186	0.171	0.154	0.136

$\Delta\sigma_z = q \cdot$（表值）。表中每个数值都来自同一方程；z = 0行为地表（条形荷载下方为1，边缘处为0.5，条形荷载之外为0）。

叠加原理

由于土体为**弹性体**，每条荷载引起的应力分别求出后再相加。每个条形荷载由其自身的q、B和中心线确定；模块中最多可输入八个条形荷载

各条形荷载**不得重叠**：两条荷载可在一条边上相接。每条荷载的应力按**各自的x值**求得，即按A点到该条形荷载中心线的距离求得

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad x_k = x_A - x_{c,k}$$

$\Delta\sigma_{z(k)}$由上述方程(q_k, B_k, x_k, z)计算；由于对称性，仅需$|x_k|$

题目

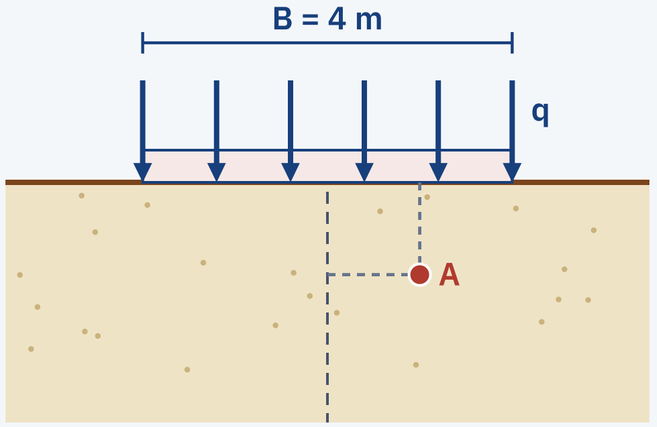
算例

已知条件

条形荷载	**柔性，竖向：$q = 100$ kN/m²，$B = 4$ m（$b = B/2 = 2$ m）；轴线$x = 0$**
A点	**距轴线侧向$x = 1$ m、深度$z = 1$ m处（位于条形荷载下方）**

求

$\Delta\sigma_z$和**$\Delta\sigma_z/q$**：先用闭合（反正切）形式，再用**角度形式**验证。



解答 (1/3)

解答

1 半宽以及A点至各边缘的距离

$$b = \frac{B}{2} = 2\ \text{m} \qquad x - b = 1 - 2 = -1\ \text{m} \qquad x + b = 1 + 2 = 3\ \text{m}$$

$$\frac{2x}{B} = 0.5 \qquad \frac{2z}{B} = 0.5$$

2 由于x < B/2，第一个反正切为负；需加上π

$$\tan^{-1}\frac{z}{x-b} = \tan^{-1}\frac{1}{-1} = -0.7854 \;\Rightarrow\; A_1 = \pi + (-0.7854) = \mathbf{2.3562}$$

$$A_2 = \tan^{-1}\frac{z}{x+b} = \tan^{-1}\frac{1}{3} = \mathbf{0.3218}$$

A点位于条形荷载**下方**(|x| = 1 m < B/2 = 2 m)。因此需要对第一个反正切项加上π修正；A_1 = 2.3562，A_2 = 0.3218 rad。

解答 (2/3)

解答

3 第三项（代数项）

$$T = \frac{B\,z\,(x^2 - z^2 - b^2)}{(x^2 + z^2 - b^2)^2 + B^2 z^2} = \frac{4(1)(1 - 1 - 4)}{(1 + 1 - 4)^2 + 16(1)} = \frac{-16}{20} = \mathbf{-0.8000}$$

4 影响值与应力

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{\pi}\left[A_1 - A_2 - T\right] = \frac{1}{\pi}\left[2.3562 - 0.3218 - (-0.8)\right] = \mathbf{0.9022}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.9022\,(100) = \mathbf{90.22}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 90.22 kPa：A点处的应力为表面压力的**90.2**%($\Delta\sigma_z/q$ = 0.9022)。应力不超过q = 100 kPa。

解答 (3/3)

解答

5 角度：θ自地表起算，δ自竖直方向起算

$$\theta_1 = 135.00^\circ \quad (x - b < 0) \qquad \theta_2 = \tan^{-1}\frac{z}{x+b} = 18.43^\circ$$

$$\alpha = \theta_1 - \theta_2 = 116.57^\circ = 2.0344 \text{ rad}$$

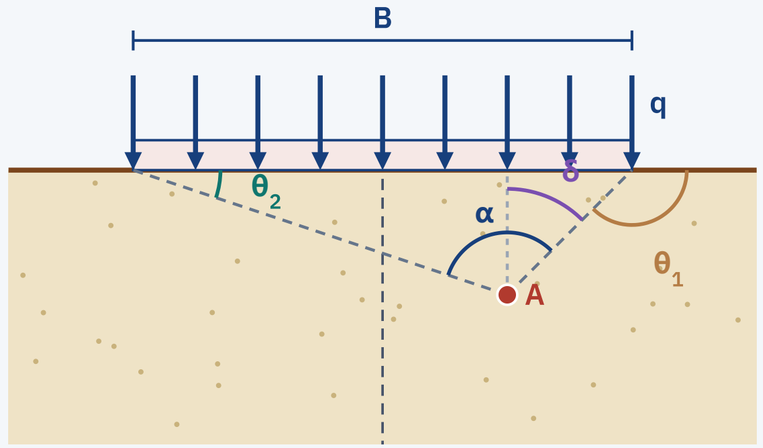
$$\delta = 90^\circ - \theta_1 = -\mathbf{45}^\circ$$

6 角度形式

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{\pi}\left[\alpha + \sin\alpha\cos(\alpha + 2\delta)\right]$$

$$= \frac{100}{\pi}\left[2.0344 + (0.8944)\cos(26.57^\circ)\right]$$

$$= \frac{100}{\pi}(2.8344) = \mathbf{90.22} \text{ kPa}$$



两种形式给出**相同的结果**：$\Delta\sigma_z$ = 90.22 kPa。模块给出相同的数值；角度形式表明应力仅取决于角度，即取决于x/B和z/B。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

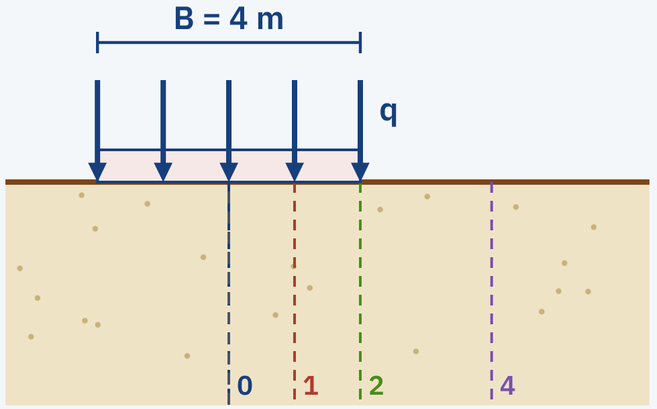
算例

已知条件

条形荷载	$q = 100$ kN/m²，$B = 4$ m，**中心线**$x = 0$ **（算例1中的条形荷载）**
直线	$x = 0$（**轴线**），$x = 1$ m（**A点所在直线**），$x = 2$ m（**边缘**），$x = 4$ m（**边缘外2 m**）
深度	$z = 0.5 \ldots 12$ m

求

沿每条直线$\Delta\sigma_z$随深度的变化；轴线下方应力为q/2, q/5, q/10的深度。

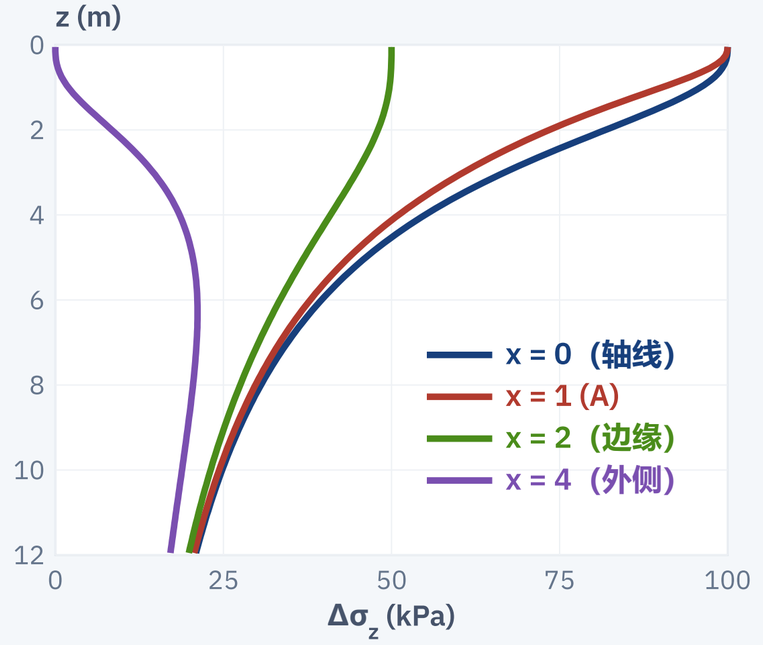


解答 (1/2)

解答

z (m)	2z/B	x = 0（轴线）	x = 1 m (A)	x = 2 m（边缘）	x = 4 m（外侧）
0.5	0.250	99.38	97.88	49.96	0.30
1.0	0.500	95.95	**90.22**	49.69	1.93
1.5	0.750	89.59	81.38	49.04	4.90
2.0	1.000	81.83	73.47	47.97	8.39
3.0	1.500	66.82	60.71	44.80	14.57
4.0	2.000	54.98	51.05	40.92	18.48
5.0	2.500	46.18	43.65	37.00	20.45
6.0	3.000	39.58	37.91	33.41	21.12
8.0	4.000	30.58	29.76	27.49	20.47
10.0	5.000	24.81	24.36	23.09	18.84
12.0	6.000	20.84	20.57	19.79	17.07

轴线下方的应力自地表向深处缓慢减小(z = 12 m处为20.8 kPa)；**边缘下方**的应力在地表处非常接近q/2 (50.0 kPa)，随后减小；**外侧**的直线上，应力先增大，在z ≈ 6 m处达到最大值(21.1 kPa)，之后减小。



解答 (2/2)

解答

1 轴线下方方程仅余一项(x = 0, b = B/2 = 2 m)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{b}{z} + \frac{bz}{b^2+z^2}\right] \qquad z = 1.132B = 4.53\ \text{m} \Rightarrow \frac{2}{\pi}[0.4159 + 0.3695] = \mathbf{0.500}$$

2 三个深度处的方程值

影响值	z/B	z (m)	$\tan^{-1}(b/z)$	$bz/(b^2+z^2)$	$\Delta\sigma_z/q$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
q/2	1.132	4.53	0.4159	0.3695	**0.500**	50.00
q/5	3.130	12.52	0.1584	0.1558	**0.200**	20.00
q/10	6.340	25.36	0.0787	0.0784	**0.100**	10.00

在轴线下方，应力在**z = 1.13B = 4.5 m**处降至q/2，在**3.13B = 12.5 m**处降至q/5，在**6.34B = 25.4 m**处降至q/10：直到条带宽度数倍的深度，土体仍处于荷载作用之下。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

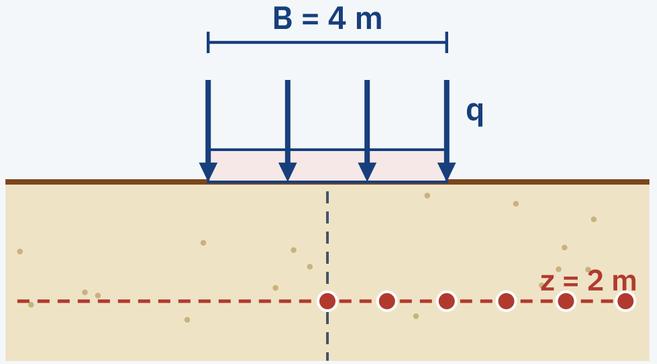
算例

已知条件

条形荷载	$q = 100$ kN/m², $B = 4$ m, $x = 0$ ($b = 2$ m)
直线	**深度**$z = 2$ m**处的水平直线；各点**$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ m
手算	**边缘下方**$x = b = 2$ m**和条形荷载以外**$x = 3$ m

求

手算**边缘下方**(x = B/2)和**条形荷载范围之外**(x = 3 m)的$\Delta\sigma_z$；z = 2 m处水平方向的全部分布；x = −3 m与x = +3 m的对比。



解答 (1/3)

解答

1 x = b = 2 m，z = 2 m：第一个反正切项恰为π/2

$$A_1 = \tan^{-1}\frac{z}{x-b} = \tan^{-1}\frac{2}{0} = \frac{\pi}{2} = 1.5708 \qquad A_2 = \tan^{-1}\frac{2}{4} = 0.4636$$

$$T = \frac{4(2)(4-4-4)}{(4+4-4)^2+16(4)} = \frac{-32}{80} = -0.4$$

2 影响值与应力

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{\pi}\left[1.5708 - 0.4636 - (-0.4)\right] = \mathbf{0.4797}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.4797\,(100) = \mathbf{47.97}\ \text{kPa}$$

边缘下方的应力由地表处的q/2降至深度z = 2 m处的**47.97 kPa**（为q的48.0%）。恰在边缘处，第一个反正切为π/2；无需π修正。

解答 (2/3)

解答

3 x = 3 m > b：两个反正切均直接取值(x − b = 1, x + b = 5)

$$A_1 = \tan^{-1}\frac{2}{1} = 1.1071 \qquad A_2 = \tan^{-1}\frac{2}{5} = 0.3805$$

$$T = \frac{4(2)(9-4-4)}{(9+4-4)^2+16(4)} = \frac{8}{145} = 0.0552$$

4 影响值与应力

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{\pi}\left[1.1071 - 0.3805 - 0.0552\right] = \mathbf{0.2137}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.2137\,(100) = \mathbf{21.37}\ \text{kPa}$$

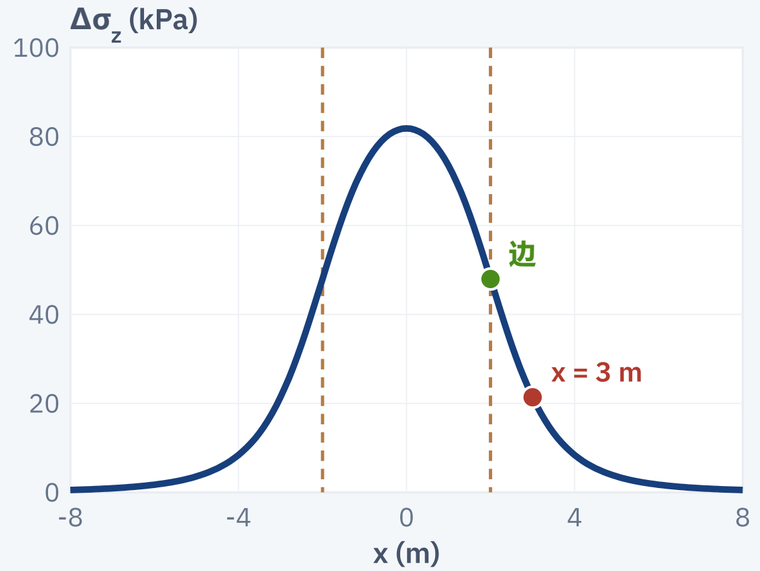
条形荷载外1 m处(x = 3 m)的应力为21.37 kPa；该点没有荷载，但土体仍承受应力。由对称性，x = −3 m处同样得到**21.37 kPa**（模块给出相同的值）。

解答 (3/3)

解答

x (m)	2x/B	$\Delta\sigma_z$ (kPa)	$\Delta\sigma_z/q$	位置
0	0.00	81.83	0.8183	轴线
1	0.50	73.47	0.7347	条带下方
2	1.00	47.97	0.4797	边
3	1.50	21.37	0.2137	在外侧
4	2.00	8.39	0.0839	在外侧
5	2.50	3.58	0.0358	在外侧
6	3.00	1.72	0.0172	在外侧
8	4.00	0.53	0.0053	在外侧

应力在轴线处最大(81.8 kPa)，在边缘处降至48.0 kPa（约为q的一半），并在条形荷载之外迅速衰减：x = 8 m处为0.53 kPa。应力分布曲线关于x = 0轴**对称**。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

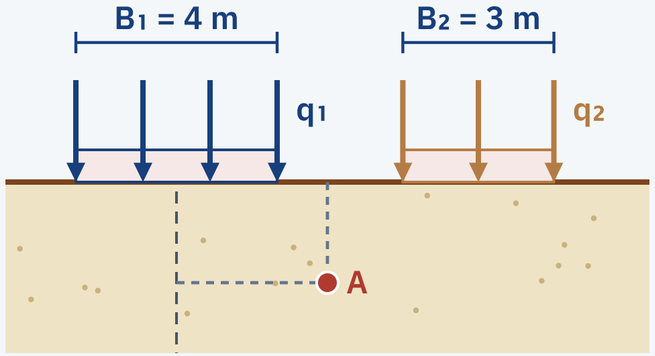
算例

已知条件

第1条带	$q_1 = 100$ kN/m²，$B_1 = 4$ m，**轴线**$x_{c1} = 0$ **(−2 … 2 m)**
第2条带	$q_2 = 60$ kN/m²，$B_2 = 3$ m，**中心线**$x_{c2} = 6$ **m (4.5 … 7.5 m)**
A点	$x = 3$ m，$z = 2$ m（**两个条形荷载之间**）

求

各条带在A点的应力和**总$\Delta\sigma_z$**；A点下方应力随深度的变化。



解答 (1/2)

解答

1 条带1：$x_1 = 3 - 0 = 3$ m，$b = 2$ m ($x > b$)

$$A_1 = \tan^{-1}\frac{2}{1} = 1.1071 \quad A_2 = \tan^{-1}\frac{2}{5} = 0.3805 \quad T = \frac{4(2)(1)}{9^2+64} = 0.0552$$

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{100}{\pi}\left[A_1 - A_2 - T\right] = 0.2137\,(100) = \mathbf{21.37}\ \text{kPa}$$

2 第2条带：$x_2 = 3 - 6 = -3$ m($|x_2| = 3$ m)，$b = 1.5$ m

$$A_1 = \tan^{-1}\frac{2}{1.5} = 0.9273 \quad A_2 = \tan^{-1}\frac{2}{4.5} = 0.4182 \quad T = \frac{3(2)(2.75)}{(10.75)^2+36} = 0.1089$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{60}{\pi}\left[A_1 - A_2 - T\right] = 0.1274\,(60) = \mathbf{7.64}\ \text{kPa}$$

3 叠加原理

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 21.37 + 7.64 = \mathbf{29.02}\ \text{kPa}$$

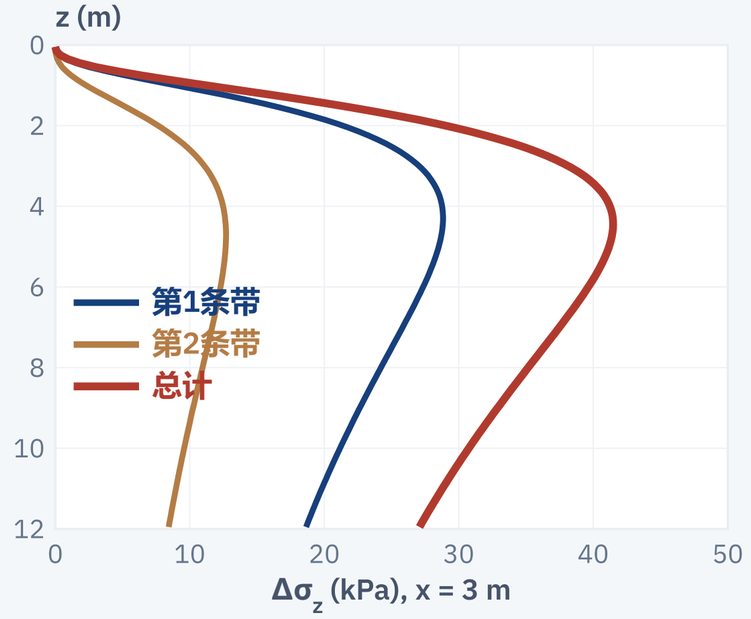
总计**$\Delta\sigma_z$ = 29.02 kPa**；模块给出相同的数值。第2条带的贡献占总量的26%。

解答 (2/2)

解答

z (m)	第1条形荷载(kPa)	第2条形荷载(kPa)	合计(kPa)	第2条带的贡献
1	8.92	2.28	**11.21**	20 %
2	21.37	7.64	**29.02**	26 %
3	27.05	11.09	**38.14**	29 %
4	28.76	12.47	**41.24**	30 %
6	27.35	12.28	**39.63**	31 %
8	24.21	10.95	**35.16**	31 %
12	18.59	8.41	**26.99**	31 %

A点下方的总应力在z ≈ 4.5 m处最大(41.5 kPa)，之后减小。在近地表土层中，条形荷载1起主导作用；在深处，两个条形荷载的份额趋于接近（z = 12 m处条形荷载2的份额为31%）。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

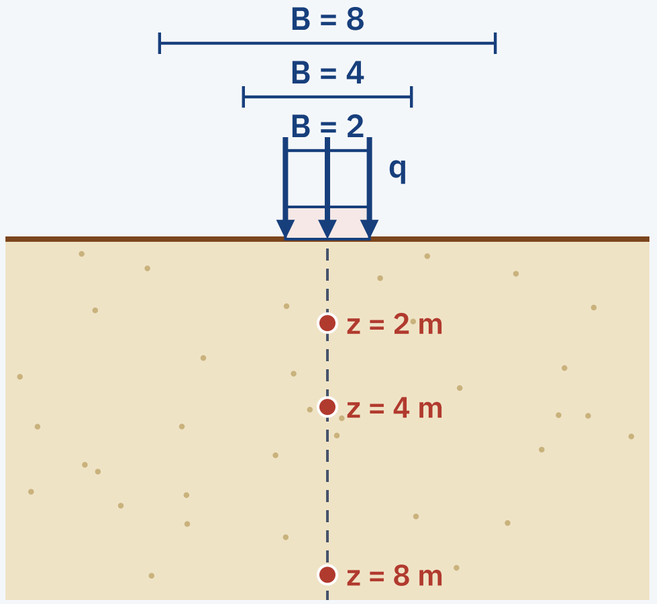
算例

已知条件

宽度影响	**相同的**$q = 100$ **kN/m²；** $B = 2,\ 4,\ 8$ **m；轴线下方**$z = 2,\ 4,\ 8$ **m**
窄条带	**荷载强度恒定为**$P = qB = 100$ **kN/m；** $B = 2,\ 1,\ 0.5,\ 0.1$ **m；点**$x = 2$ **m，** $z = 2$ **m**
对比	**线荷载：** $\Delta\sigma_z = 2Pz^3/[\pi(x^2+z^2)^2]$

求

说明**z/B**相同时应力相同；观察条形荷载变窄时结果趋近于**线荷载**值。



解答 (1/2)

解答

1 轴线下方，B = 2 m，z = 2 m (z/B = 1; b = 1 m)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{1}{2} + \frac{1(2)}{1+4}\right] = \frac{2}{\pi}\left[0.4636 + 0.4\right] = 0.5498 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \mathbf{54.98}\ \text{kPa}$$

2 三种宽度，三种深度（轴线下方，kPa）

B (m)	z = 2 m	z = 4 m	z = 8 m
2	54.98 (z/B = 1.00)	30.58 (z/B = 2.00)	15.75 (z/B = 4.00)
4	81.83 (z/B = 0.50)	54.98 (z/B = 1.00)	30.58 (z/B = 2.00)
8	95.95 (z/B = 0.25)	81.83 (z/B = 0.50)	54.98 (z/B = 1.00)

应力**仅取决于z/B**：B = 2 m、z = 2 m；B = 4 m、z = 4 m，以及B = 8 m、z = 8 m，均给出**54.98 kPa**。在相同q下，**较宽的条形荷载影响更深**：z = 8 m处，B = 2 m时为15.8 kPa，B = 8 m时为55.0 kPa。

解答 (2/2)

解答

3 线荷载解(P = 100 kN/m; x = 2 m, z = 2 m)

$$\Delta\sigma_z = \frac{2Pz^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(100)(2)^3}{\pi(4+4)^2} = \frac{1{,}600}{201.06} = \mathbf{7.958}\ \text{kPa}$$

4 P = qB相同、宽度逐渐变窄的条形荷载（闭合形式，同一点）

B (m)	q = P/B (kPa)	$\Delta\sigma_z$（条形荷载，kPa）	与线荷载的差异
2.0	50	9.242	%16.1
1.0	100	8.287	%4.1
0.5	200	8.041	%1.0
0.1	1,000	7.961	%0.0
→ 0	**→ ∞**	**7.958**（线荷载）	0

随着B减小，条形荷载解由**9.24 kPa**趋近于线荷载值**7.96 kPa**；B = 0.1 m时，两者之差仅为0.04%。线荷载是条形荷载在B → 0时的极限情形。

在GeoTerva中验算解答 ↗

小结

要点回顾

闭合形式：$\Delta\sigma_z = (q/\pi)\{\tan^{-1}[z/(x - B/2)] - \tan^{-1}[z/(x + B/2)] - Bz[x^2 - z^2 - B^2/4] / ([x^2 + z^2 - B^2/4]^2 + B^2z^2)\}$；$x < B/2$时，第一个反正切项中加上π

角度形式：$\Delta\sigma_z = (q/\pi)[\alpha + \sin\alpha\cos(\alpha + 2\delta)]$；$\alpha = \theta_1 - \theta_2$，$\delta = 90° - \theta_1$。应力**仅取决于x/B和z/B**，且不超过q；在地表，条形荷载下方为q，边缘处为q/2，条形荷载以外为0

算例($q = 100$ kN/m², $B = 4$ m; A: $x = 1$, $z = 1$ m)：A_1 2.3562，A_2 0.3218，T -0.8 → $\Delta\sigma_z/q$ = **0.9022**；**$\Delta\sigma_z$ = 90.22 kPa**；角度形式的结果相同

应力泡：轴线下方q/2、q/5、q/10所在深度分别为1.13B、3.13B、6.34B。**叠加**：每个条形荷载按各自的x值计算；两个条形荷载的算例中21.37 + 7.64 = **29.02 kPa**

极限情形：相同的z/B给出相同的应力；当B → 0且P = qB保持不变时，条形荷载趋近于线荷载解

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

注

所有数值算例均由模块自带的计算引擎生成；模块给出的数值与之相同。模块打开时载入q = 100 kN/m²，B = 4 m以及A点(x = 1 m, z = 1 m)。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入自己的条形荷载（q、B、中心线）和A点；模块同时给出应力、等应力线、深度分布曲线、分步解答及报告。

打开模块→

理论页面 →

用手机打开

试用模块无需注册。

如需在课堂教学中使用：info@geoterva.com