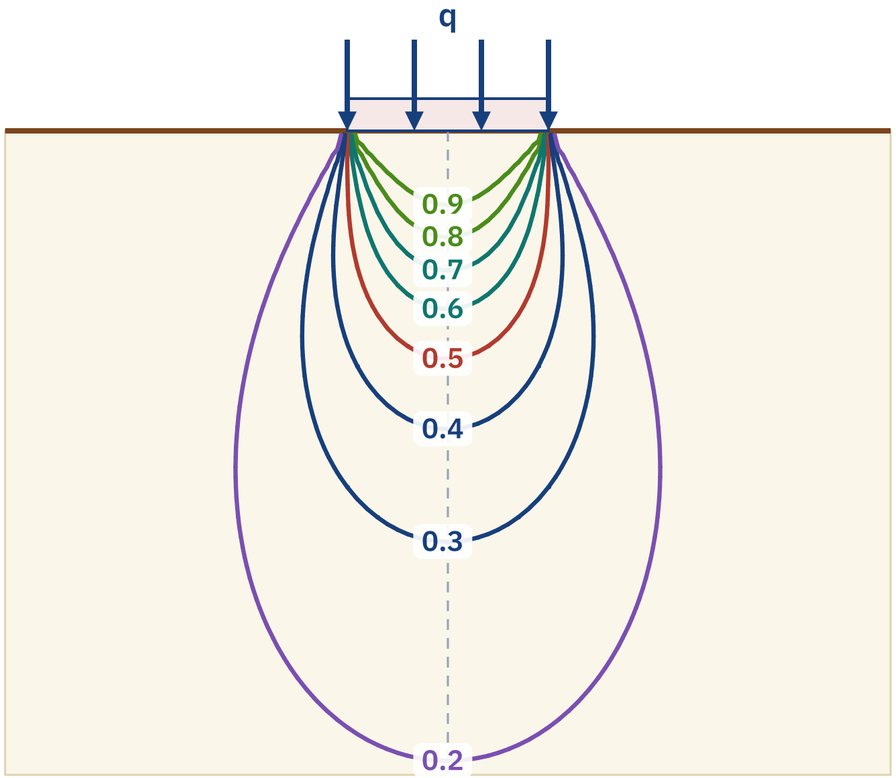
Geotechnisch college · Spanningen in de ondergrond

# Spanning onder een verticale strookbelasting

College: flexibele, oneindig lange verticale strookbelasting; een punt met de hand, diepte- en horizontale profielen, superpositie.

Integraal van de lijnlast | Hoekvorm | spanningsbol | Superpositie | Met de hand oplosbaar



Inleiding

# Wat leren we in dit college?

De verticale spanningstoename onder een **strookbelasting**: een oneindig lange flexibele strook met breedte B die een gelijkmatige druk q draagt; **de integraal van de lijnbelasting over de breedte**

De gesloten **arctangens**vorm en de **hoeksvorm**; de **π-correctie** die bij x < B/2 bij de eerste arctangens wordt opgeteld

Dat de spanning alleen afhangt van **x/B** en **z/B** en q nooit overschrijdt; de **spanningsbol** en de tabel met invloedsfactoren

Eén punt **volledig met de hand** uitwerken; diepte- en horizontale profielen in tabellen; meerdere stroken door **superpositie**

COLLEGESTRUCTUUR

Elk onderwerp wordt in **drie stappen** behandeld:

1 · **Theorie**: formule en onderbouwing

2 · **Opgave**: gegeven en gevraagd

3 · **Oplossing**: stap voor stap, met getallen

Voorbeeld: q = 100 kN/m², B = 4 m; punt A op x = 1 m zijwaarts van de aslijn, op diepte z = 1 m.

# Strookbelasting: eindige breedte, oneindige lengte

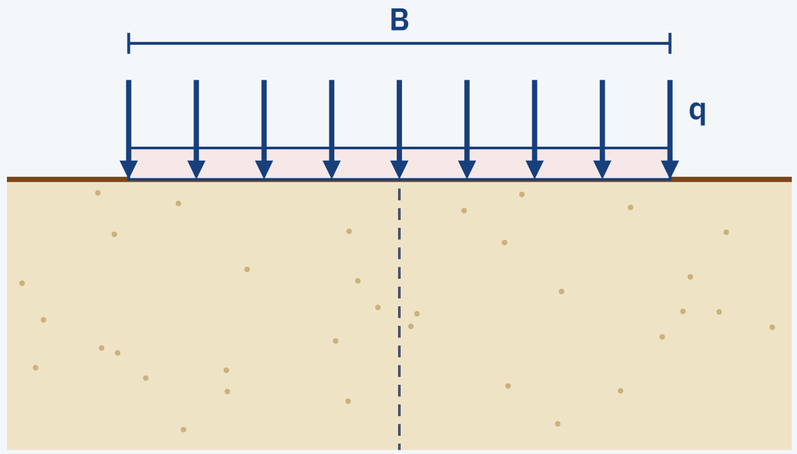
THEORIE

Een lange fundering, het bovenvlak van een weg of ophoging, een wandvoet: veel belastingen zijn lang in één richting en hebben een eindige breedte in de andere. Een **strookbelasting** modelleert deze

**Flexibele strook**: breedte B, oneindige lengte, gelijkmatige verticale druk q. De spanning is in elke doorsnede gelijk; het probleem is een geval van **vlakke vervorming** (tweedimensionaal)

Ongeacht de zetting blijft de druk over de breedte gelijk aan q; een starre fundering zou deze druk herverdelen

De grond is een **homogene, isotrope, lineair elastische** halve ruimte. $\Delta\sigma_z$ is alleen de toename door de belasting; de deklaagdruk wordt afzonderlijk opgeteld




Doorsnede: de strook strekt zich oneindig uit in de y-richting; in elke doorsnede dezelfde spanning (vlakke vervorming)

# Van lijnbelasting naar strookbelasting

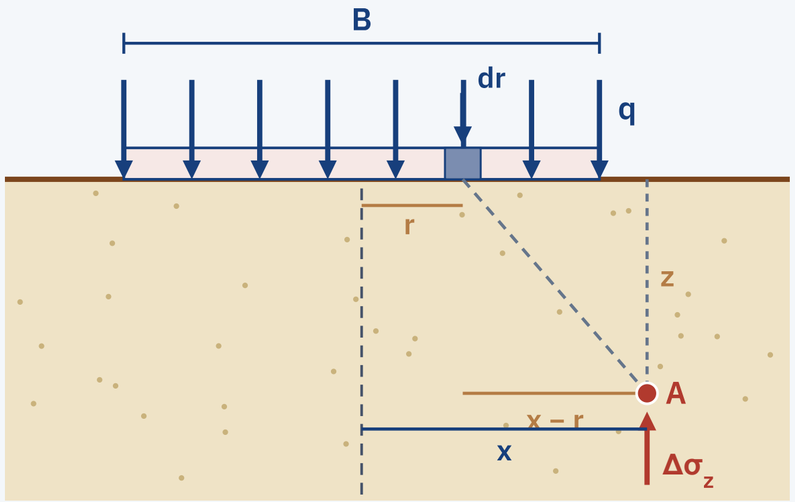
THEORIE

Een elementaire strook met breedte dr draagt per eenheid van lengte een belasting **q dr** en werkt als een **lijnbelasting**; de horizontale afstand tot punt A is x − r

$$d\sigma_z = \frac{2\,(q\,dr)\,z^3}{\pi\,[(x-r)^2+z^2]^2}$$

De gehele strook is de som van deze lijnbelastingen van r = −B/2 … +B/2

$$\Delta\sigma_z = \int_{-B/2}^{+B/2} \frac{2q}{\pi}\,\frac{z^3}{[(x-r)^2+z^2]^2}\,dr$$



# Gesloten vorm van de integraal

THEORIE

Er wordt u = x − r genomen; de **primitieve functie** voor $1/(u^2 + z^2)^2$ is $(q/\pi)[\tan^{-1}(u/z) + z\,u/(u^2 + z^2)]$. Berekening van de integraal bij de grenzen u = x − B/2 en u = x + B/2 levert de **arctangensvorm** op

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{\pi}\left\{\tan^{-1}\frac{z}{x - B/2} - \tan^{-1}\frac{z}{x + B/2} - \frac{B\,z\,[x^2 - z^2 - B^2/4]}{[x^2 + z^2 - B^2/4]^2 + B^2 z^2}\right\}$$

De arctangenten zijn in **radialen**; $\Delta\sigma_z$ is gelijk op de posities +x en −x (de strook is symmetrisch ten opzichte van de hartlijn)

Zoals opgeschreven geldt de vergelijking voor x ≥ B/2. Voor 0 ≤ x < B/2 wordt de eerste arctangens negatief en wordt deze vervangen door **$\pi + \tan^{-1}[z/(x - B/2)]$**; precies bij x = B/2 is deze π/2

Numerieke verificatie (q = 100, B = 4, x = 1, z = 1): de numerieke integraal van de oplossing voor de lijnlast over de strookbreedte is **90.2232 kPa**, de gesloten vorm is **90.2232 kPa**

# De spanning hangt alleen van de hoeken af

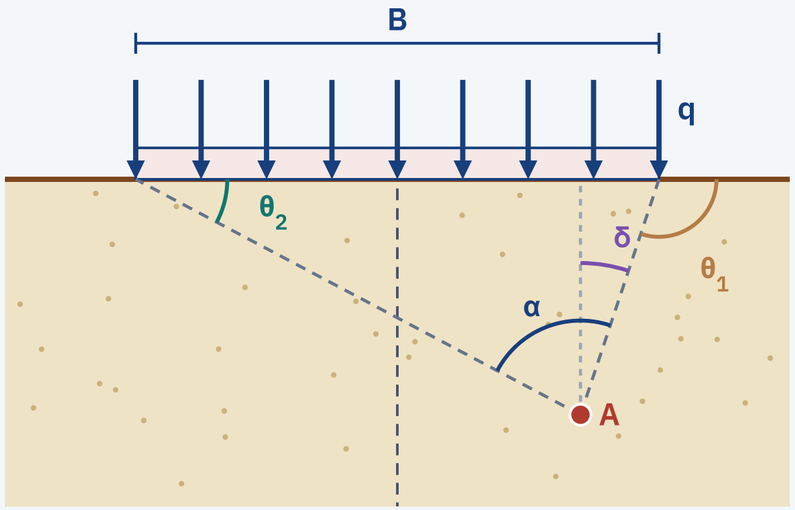
THEORIE

Hetzelfde resultaat wordt met de hoeken in de figuur geschreven. θ wordt vanaf het oppervlak gemeten; α = $\theta_1 - \theta_2$ is de hoek waaronder de strook vanuit A wordt gezien. **δ** is de hoek tussen de verticaal en de lijn van A naar de rand +B/2: δ = 90° – $\theta_1$ (negatief onder de strook)

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{\pi}\left[\alpha + \sin\alpha\,\cos(\alpha + 2\delta)\right]$$

$$F(u) = \tan^{-1}\frac{u}{z} + \frac{zu}{u^2+z^2} = \varphi + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi \quad (u = z\tan\varphi)$$

De spanning hangt alleen af van **x/B en z/B** en **overschrijdt q niet**: aan het maaiveld onder de strook is α = π en $\Delta\sigma_z$ = q; naast de strook is α = 0



# Onder de as en onder de rand

THEORIE

**Onder de as** (x = 0; b = B/2) reduceert de vergelijking tot één term; **onder de rand** (x = b) is de eerste arctangens π/2 en aan het oppervlak geldt $\Delta\sigma_z = q/2$

$$\left.\frac{\Delta\sigma_z}{q}\right|_{x=0} = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{b}{z} + \frac{bz}{b^2+z^2}\right]$$

$$\left.\frac{\Delta\sigma_z}{q}\right|_{x=b} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{z}{B} + \frac{Bz}{B^2+z^2}\right]$$

| 2z/B | 0.5 | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 6.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Onder het midden (2x/B = 0) | 0.959 | 0.818 | 0.550 | 0.396 | 0.306 | 0.208 |
| Onder de rand (2x/B = 1) | 0.497 | 0.480 | 0.409 | 0.334 | 0.275 | 0.198 |

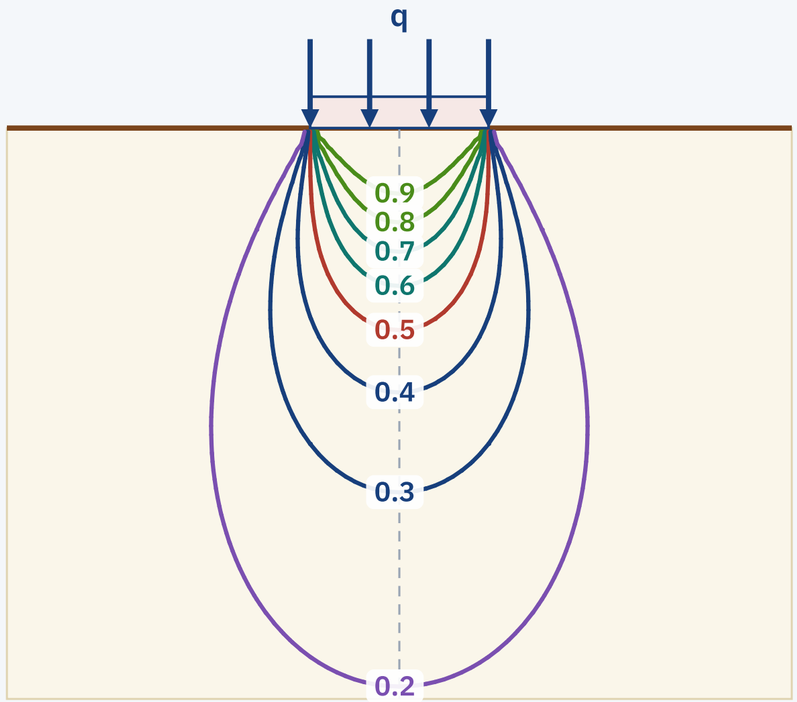
# Contourlijnen: $\Delta\sigma_z/q$

THEORIE

Onder de as daalt de spanning tot de helft van q op een diepte van ongeveer **z = 1.1B**, tot een vijfde op **3.1B** en pas tot een tiende op **6.3B**

De lijnen met waarden 0.6 – 0.9 worden dichter bij het oppervlak onder de strook: de bekende **pressiebol**

Wanneer de afstanden door B worden gedeeld, zijn de krommen **voor elke strook gelijk**: één diagram uitgezet tegen x/B en z/B geldt voor elke q en B



# $\Delta\sigma_z$/q-waarden

THEORIE

| 2z/B \ 2x/B | 0.0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.000 | 1.000 | 0.500 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 0.5 | 0.959 | 0.902 | 0.497 | 0.089 | 0.019 | 0.006 | 0.003 |
| 1.0 | 0.818 | 0.735 | 0.480 | 0.214 | 0.084 | 0.036 | 0.017 |
| 1.5 | 0.668 | 0.607 | 0.448 | 0.271 | 0.146 | 0.077 | 0.042 |
| 2.0 | 0.550 | 0.510 | 0.409 | 0.288 | 0.185 | 0.114 | 0.071 |
| 2.5 | 0.462 | 0.436 | 0.370 | 0.285 | 0.205 | 0.141 | 0.095 |
| 3.0 | 0.396 | 0.379 | 0.334 | 0.274 | 0.211 | 0.157 | 0.114 |
| 3.5 | 0.345 | 0.334 | 0.302 | 0.258 | 0.210 | 0.165 | 0.127 |
| 4.0 | 0.306 | 0.298 | 0.275 | 0.242 | 0.205 | 0.168 | 0.134 |
| 5.0 | 0.248 | 0.244 | 0.231 | 0.212 | 0.188 | 0.164 | 0.139 |
| 6.0 | 0.208 | 0.206 | 0.198 | 0.186 | 0.171 | 0.154 | 0.136 |

$\Delta\sigma_z = q \cdot$ (tabelwaarde). Elke waarde in de tabel volgt uit dezelfde vergelijking; de rij z = 0 is het maaiveld (1 onder de strook, 0.5 aan de rand, 0 erbuiten).

# Superpositie

THEORIE

Omdat de grond **elastisch** is, wordt de spanning van elke strook afzonderlijk bepaald en gesommeerd. Elke strook wordt gedefinieerd door haar eigen q, B en aslijn; in de module kunnen ten hoogste acht stroken worden ingevoerd

De stroken **mogen elkaar niet overlappen**: twee stroken kunnen langs een rand aansluiten. De spanning van elke strook wordt bepaald met **de eigen x-waarde**, dat wil zeggen de afstand van punt A tot de hartlijn van die strook

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad x_k = x_A - x_{c,k}$$

$\Delta\sigma_{z(k)}$ wordt berekend met de bovenstaande vergelijking ($q_k$, $B_k$, $x_k$, z); wegens de symmetrie is alleen $|x_k|$ nodig

# Opgave

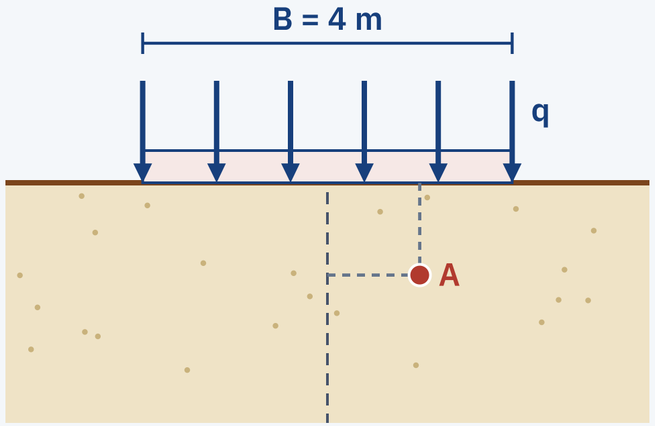
VOORBEELD

**Gegeven**

| | |
|---|---|
| Strookbelasting | **Flexibel, verticaal: $q = 100$ kN/m², $B = 4$ m ($b = B/2 = 2$ m); hartlijn $x = 0$** |
| Punt A | **$x = 1$ m naast de hartlijn, op een diepte van $z = 1$ m (onder de strook)** |

**GEVRAAGD**

**$\Delta\sigma_z$** en **$\Delta\sigma_z/q$**: eerst met de gesloten (arctangens)vorm, daarna controle met de **hoekvorm**.



# Oplossing (1/3)

OPLOSSING

**1** Halve breedte en de afstanden van punt A tot de randen

$$b = \frac{B}{2} = 2\ \text{m} \qquad x - b = 1 - 2 = -1\ \text{m} \qquad x + b = 1 + 2 = 3\ \text{m}$$

$$\frac{2x}{B} = 0.5 \qquad \frac{2z}{B} = 0.5$$

**2** Omdat x < B/2 is de eerste arctangens negatief; er wordt π bijgeteld

$$\tan^{-1}\frac{z}{x-b} = \tan^{-1}\frac{1}{-1} = -0.7854 \;\Rightarrow\; A_1 = \pi + (-0.7854) = \mathbf{2.3562}$$

$$A_2 = \tan^{-1}\frac{z}{x+b} = \tan^{-1}\frac{1}{3} = \mathbf{0.3218}$$

Punt A ligt **onder** de strook (|x| = 1 m < B/2 = 2 m). De π-correctie van de eerste arctangens is daarom noodzakelijk; $A_1$ = 2.3562 en $A_2$ = 0.3218 rad.

# Oplossing (2/3)

OPLOSSING

**3** Derde (algebraïsche) term

$$T = \frac{B\,z\,(x^2 - z^2 - b^2)}{(x^2 + z^2 - b^2)^2 + B^2 z^2} = \frac{4(1)(1 - 1 - 4)}{(1 + 1 - 4)^2 + 16(1)} = \frac{-16}{20} = \mathbf{-0.8000}$$

**4** Invloedswaarde en spanning

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{\pi}\left[A_1 - A_2 - T\right] = \frac{1}{\pi}\left[2.3562 - 0.3218 - (-0.8)\right] = \mathbf{0.9022}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.9022\,(100) = \mathbf{90.22}\ \mathrm{kPa}$$

**$\Delta\sigma_z$ = 90.22 kPa**: de spanning in punt A bedraagt **90.2**% van de oppervlaktedruk ($\Delta\sigma_z$/q = 0.9022). De spanning overschrijdt q = 100 kPa niet.

# Oplossing (3/3)

OPLOSSING

**5** Hoeken: θ vanaf het maaiveld, δ vanaf de verticaal

$$\theta_1 = 135.00^\circ \quad (x - b < 0) \qquad \theta_2 = \tan^{-1}\frac{z}{x+b} = 18.43^\circ$$

$$\alpha = \theta_1 - \theta_2 = 116.57^\circ = 2.0344 \text{ rad}$$

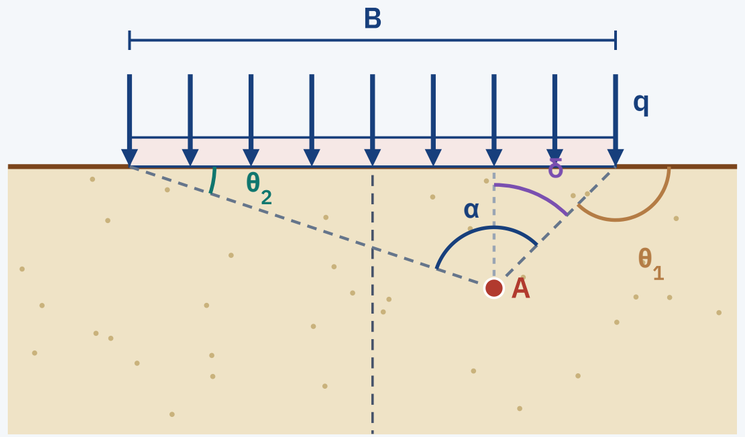
$$\delta = 90^\circ - \theta_1 = -\mathbf{45}^\circ$$

**6** Hoekvorm

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{\pi}\left[\alpha + \sin\alpha\cos(\alpha + 2\delta)\right]$$

$$= \frac{100}{\pi}\left[2.0344 + (0.8944)\cos(26.57^\circ)\right]$$

$$= \frac{100}{\pi}(2.8344) = \mathbf{90.22}\ \text{kPa}$$




De twee vormen geven **hetzelfde resultaat**: $\Delta\sigma_z$ = 90.22 kPa. De module geeft dezelfde waarde; de hoekvorm toont aan dat de spanning uitsluitend van de hoeken afhangt, dat wil zeggen van x/B en z/B.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

# Opgave

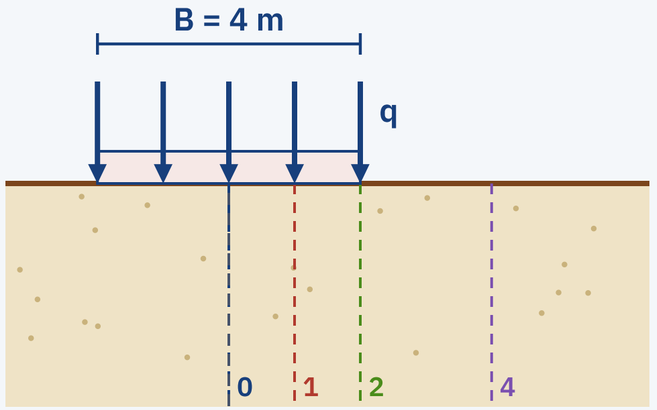
VOORBEELD

## Gegeven

| | |
|---|---|
| Strookbelasting | $q = 100$ **kN/m², $B = 4$ m, aslijn $x = 0$ (de strook uit Voorbeeld 1)** |
| Lijnen | $x = 0$ **(as),** $x = 1$ **m (lijn van A),** $x = 2$ **m (rand),** $x = 4$ **m (2 m buiten de rand)** |
| Diepte | $z = 0.5$ **…** $12$ **m** |

## GEVRAAGD

Het verloop van **$\Delta\sigma_z$** met de diepte langs elke lijn; de diepten onder de as waar de spanning **q/2, q/5, q/10** bedraagt.

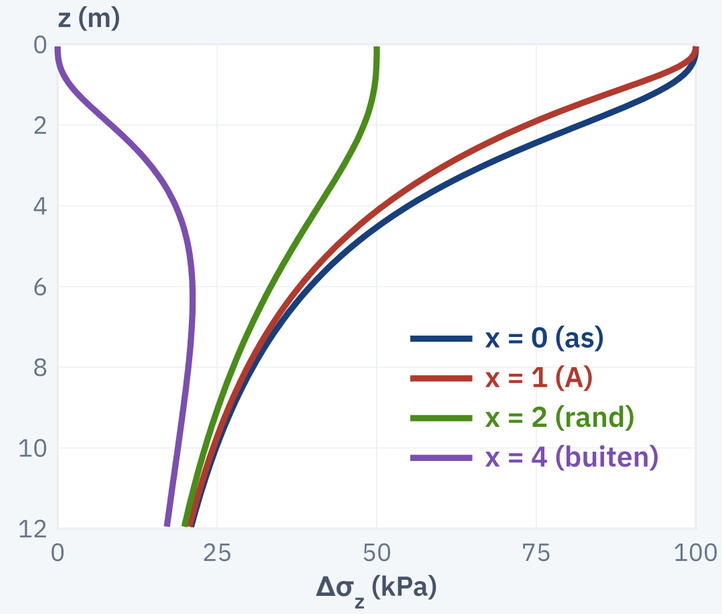


# Oplossing (1/2)

OPLOSSING

| z (m) | 2z/B | x = 0 (as) | x = 1 m (A) | x = 2 m (rand) | x = 4 m (buiten) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 0.250 | 99.38 | 97.88 | 49.96 | 0.30 |
| 1.0 | 0.500 | 95.95 | **90.22** | 49.69 | 1.93 |
| 1.5 | 0.750 | 89.59 | 81.38 | 49.04 | 4.90 |
| 2.0 | 1.000 | 81.83 | 73.47 | 47.97 | 8.39 |
| 3.0 | 1.500 | 66.82 | 60.71 | 44.80 | 14.57 |
| 4.0 | 2.000 | 54.98 | 51.05 | 40.92 | 18.48 |
| 5.0 | 2.500 | 46.18 | 43.65 | 37.00 | 20.45 |
| 6.0 | 3.000 | 39.58 | 37.91 | 33.41 | 21.12 |
| 8.0 | 4.000 | 30.58 | 29.76 | 27.49 | 20.47 |
| 10.0 | 5.000 | 24.81 | 24.36 | 23.09 | 18.84 |
| 12.0 | 6.000 | 20.84 | 20.57 | 19.79 | 17.07 |

**Onder het midden** neemt de spanning langzaam af van het maaiveld naar beneden (20.8 kPa op z = 12 m); **onder de rand** ligt zij aan het maaiveld zeer dicht bij q/2 (50.0 kPa) en neemt daarna af; **buiten** op de rechte lijn neemt de spanning eerst toe, bereikt zij een maximum op z ≈ 6 m (21.1 kPa) en neemt daarna af.



# Oplossing (2/2)

OPLOSSING

**1** Onder de as reduceert de vergelijking tot één term (x = 0, b = B/2 = 2 m)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{b}{z} + \frac{bz}{b^2+z^2}\right] \qquad z = 1.132B = 4.53\ \text{m} \Rightarrow \frac{2}{\pi}[0.4159 + 0.3695] = \mathbf{0.500}$$

**2** Waarden van de vergelijking op drie diepten

| Invloedswaarde | z/B | z (m) | $\tan^{-1}(b/z)$ | $bz/(b^2+z^2)$ | $\Delta\sigma_z/q$ | $\Delta\sigma_z$ (kPa) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| q/2 | 1.132 | 4.53 | 0.4159 | 0.3695 | **0.500** | 50.00 |
| q/5 | 3.130 | 12.52 | 0.1584 | 0.1558 | **0.200** | 20.00 |
| q/10 | 6.340 | 25.36 | 0.0787 | 0.0784 | **0.100** | 10.00 |

Onder de as daalt de spanning tot q/2 op **z = 1.13B = 4.5 m**, tot q/5 op **3.13B = 12.5 m** en tot q/10 op **6.34B = 25.4 m**: de grond staat tot op een diepte van enkele malen de strookbreedte nog onder belasting.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

# Opgave

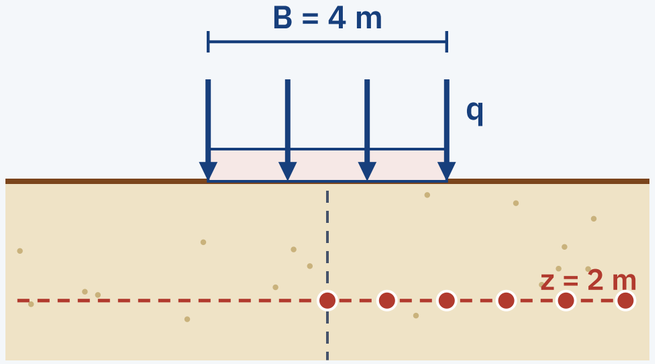
VOORBEELD

## Gegeven

| | |
|---|---|
| Strookbelasting | $q = 100$ **kN/m²,** $B = 4$ **m,** $x = 0$ **(**$b = 2$ **m)** |
| Lijn | **horizontale lijn op een diepte van** $z = 2$ **m; punten** $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ **m** |
| Handberekening | **onder de rand** $x = b = 2$ **m en buiten de strook** $x = 3$ **m** |

## GEVRAAGD

**Onder de rand** (x = B/2) en **buiten de strook** (x = 3 m) $\Delta\sigma_z$ met de hand; het volledige horizontale profiel op z = 2 m; vergelijking van x = −3 m met x = +3 m.



# Oplossing (1/3)

OPLOSSING

**1** x = b = 2 m, z = 2 m: de eerste arctangens is precies π/2

$$A_1 = \tan^{-1}\frac{z}{x-b} = \tan^{-1}\frac{2}{0} = \frac{\pi}{2} = 1.5708 \qquad A_2 = \tan^{-1}\frac{2}{4} = 0.4636$$

$$T = \frac{4(2)(4-4-4)}{(4+4-4)^2+16(4)} = \frac{-32}{80} = -0.4$$

**2** Invloedswaarde en spanning

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{\pi}\left[1.5708 - 0.4636 - (-0.4)\right] = \mathbf{0.4797}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.4797\,(100) = \mathbf{47.97}\ \text{kPa}$$

Onder de rand daalt de spanning van q/2 aan het oppervlak tot **47.97 kPa** (48.0% van q) op een diepte van z = 2 m. Precies aan de rand is de eerste arctangens π/2; een π-correctie is niet nodig.

# Oplossing (2/3)

OPLOSSING

**3** x = 3 m > b: beide arctangenten worden rechtstreeks genomen (x − b = 1, x + b = 5)

$$A_1 = \tan^{-1}\frac{2}{1} = 1.1071 \qquad A_2 = \tan^{-1}\frac{2}{5} = 0.3805$$

$$T = \frac{4(2)(9-4-4)}{(9+4-4)^2+16(4)} = \frac{8}{145} = 0.0552$$

**4** Invloedswaarde en spanning

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{\pi}\left[1.1071 - 0.3805 - 0.0552\right] = \mathbf{0.2137}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.2137\,(100) = \mathbf{21.37}\ \text{kPa}$$

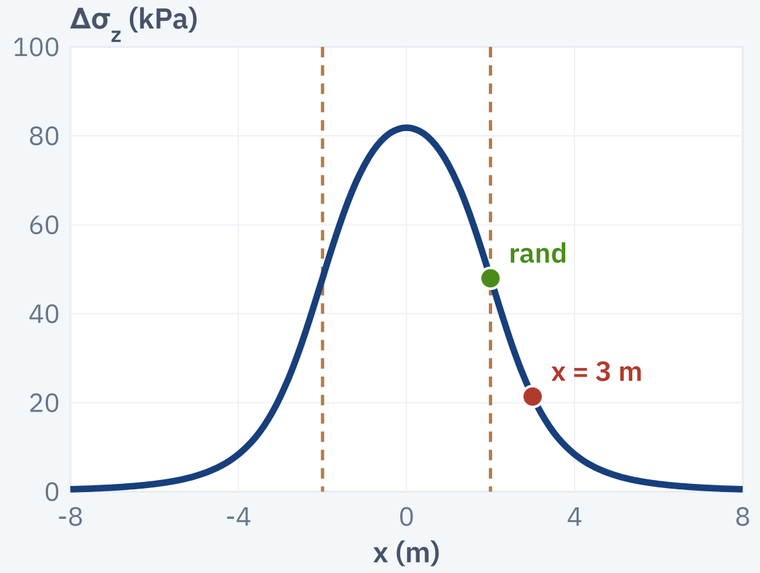
Op **1 m buiten** de strook (x = 3 m) bedraagt de spanning 21.37 kPa; op dit punt is er geen belasting, toch draagt de grond spanning. Uit symmetrie wordt voor x = −3 m eveneens **21.37 kPa** gevonden (de module geeft dezelfde waarde).

# Oplossing (3/3)

OPLOSSING

| x (m) | 2x/B | $\Delta\sigma_z$ (kPa) | $\Delta\sigma_z/q$ | Locatie |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00 | 81.83 | 0.8183 | as |
| 1 | 0.50 | 73.47 | 0.7347 | onder de strook |
| 2 | 1.00 | 47.97 | 0.4797 | rand |
| 3 | 1.50 | 21.37 | 0.2137 | buiten |
| 4 | 2.00 | 8.39 | 0.0839 | buiten |
| 5 | 2.50 | 3.58 | 0.0358 | buiten |
| 6 | 3.00 | 1.72 | 0.0172 | buiten |
| 8 | 4.00 | 0.53 | 0.0053 | buiten |

De spanning is het grootst op de as (81.8 kPa), daalt aan de rand tot 48.0 kPa (ongeveer de helft van q) en neemt buiten de strook snel af: 0.53 kPa op x = 8 m. Het profiel is **symmetrisch** ten opzichte van de as x = 0.




Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

# Opgave

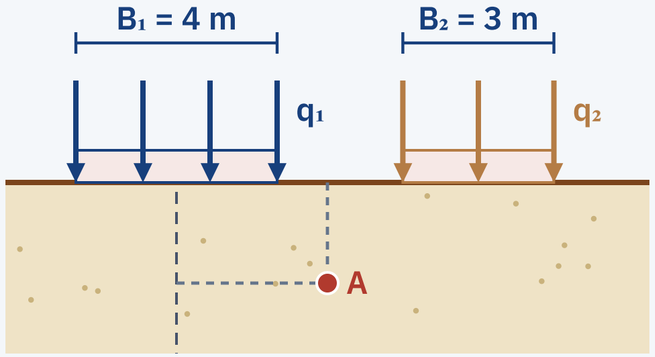
VOORBEELD

## Gegeven

| | |
|---|---|
| 1e strook | $q_1 = 100$ **kN/m², $B_1 = 4$ m, hartlijn $x_{c1} = 0$ (–2 … 2 m)** |
| 2e strook | $q_2 = 60$ **kN/m², $B_2 = 3$ m, hartlijn $x_{c2} = 6$ m (4.5 … 7.5 m)** |
| Punt A | $x = 3$ **m, $z = 2$ m (tussen de twee stroken)** |

## GEVRAAGD

De spanning in A ten gevolge van elke strook en de **totale $\Delta\sigma_z$**; de verandering van de spanning met de diepte onder A.



# Oplossing (1/2)

OPLOSSING

**1** strook 1: $x_1 = 3 - 0 = 3$ m, $b = 2$ m ($x > b$)

$$A_1 = \tan^{-1}\frac{2}{1} = 1.1071 \quad A_2 = \tan^{-1}\frac{2}{5} = 0.3805 \quad T = \frac{4(2)(1)}{9^2+64} = 0.0552$$

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{100}{\pi}\left[A_1 - A_2 - T\right] = 0.2137\,(100) = \mathbf{21.37}\ \text{kPa}$$

**2** 2e strook: $x_2 = 3 - 6 = -3$ m ($|x_2| = 3$ m), $b = 1.5$ m

$$A_1 = \tan^{-1}\frac{2}{1.5} = 0.9273 \quad A_2 = \tan^{-1}\frac{2}{4.5} = 0.4182 \quad T = \frac{3(2)(2.75)}{(10.75)^2+36} = 0.1089$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{60}{\pi}\left[A_1 - A_2 - T\right] = 0.1274\,(60) = \mathbf{7.64}\ \text{kPa}$$

**3** Superpositie

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 21.37 + 7.64 = \mathbf{29.02}\ \text{kPa}$$

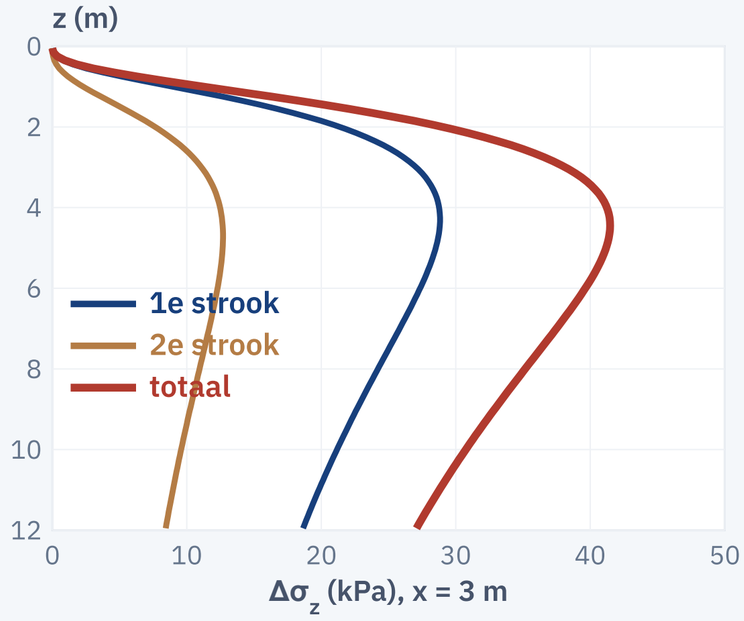
Totaal **$\Delta\sigma_z$ = 29.02 kPa**; de module geeft dezelfde waarde. Het aandeel van de 2e strook is 26 % van het totaal.

# Oplossing (2/2)

OPLOSSING

| z (m) | 1e strook (kPa) | 2e strook (kPa) | Totaal (kPa) | aandeel van strook 2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8.92 | 2.28 | **11.21** | 20 % |
| 2 | 21.37 | 7.64 | **29.02** | 26 % |
| 3 | 27.05 | 11.09 | **38.14** | 29 % |
| 4 | 28.76 | 12.47 | **41.24** | 30 % |
| 6 | 27.35 | 12.28 | **39.63** | 31 % |
| 8 | 24.21 | 10.95 | **35.16** | 31 % |
| 12 | 18.59 | 8.41 | **26.99** | 31 % |

De totale spanning onder A is het grootst bij z ≈ 4.5 m (41.5 kPa) en neemt daarna af. In de laag nabij het oppervlak domineert strook 1; op diepte naderen de aandelen van de twee stroken elkaar (bij z = 12 m is het aandeel van strook 2 31%).




Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

# Opgave

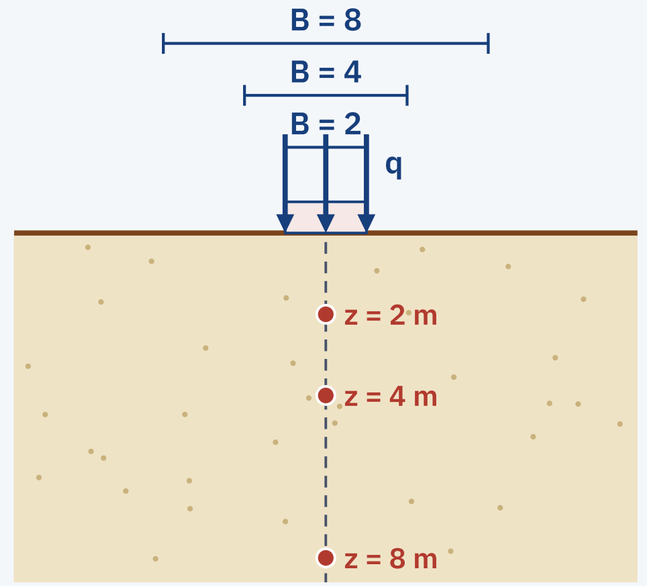
VOORBEELD

## Gegeven

| | |
|---|---|
| Effect van de breedte | **gelijk** $q = 100$ **kN/m²;** $B = 2,\ 4,\ 8$ **m; onder de as** $z = 2,\ 4,\ 8$ **m** |
| Smalle strook | **belastingsintensiteit** $P = qB = 100$ **kN/m constant;** $B = 2,\ 1,\ 0.5,\ 0.1$ **m; punt** $x = 2$ **m,** $z = 2$ **m** |
| Vergelijking | **lijnbelasting:** $\Delta\sigma_z = 2Pz^3/[\pi(x^2 + z^2)^2]$ |

## GEVRAAGD

Aantonen dat de spanning gelijk is wanneer **z/B** gelijk is; zien dat het resultaat naarmate de strook smaller wordt, de waarde van de **lijnbelasting** benadert.



# Oplossing (1/2)

OPLOSSING

**1** Onder de as, B = 2 m, z = 2 m (z/B = 1; b = 1 m)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{1}{2} + \frac{1(2)}{1+4}\right] = \frac{2}{\pi}\left[0.4636 + 0.4\right] = 0.5498 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \mathbf{54.98}\ \text{kPa}$$

**2** Drie breedten, drie diepten (onder de as, kPa)

| B (m) | z = 2 m | z = 4 m | z = 8 m |
|---|---|---|---|
| 2 | 54.98 (z/B = 1.00) | 30.58 (z/B = 2.00) | 15.75 (z/B = 4.00) |
| 4 | 81.83 (z/B = 0.50) | 54.98 (z/B = 1.00) | 30.58 (z/B = 2.00) |
| 8 | 95.95 (z/B = 0.25) | 81.83 (z/B = 0.50) | 54.98 (z/B = 1.00) |

De spanning hangt **uitsluitend van z/B af**: B = 2 m, z = 2 m; B = 4 m, z = 4 m en B = 8 m, z = 8 m geven steeds **54.98 kPa**. Bij dezelfde q werkt een **bredere strook dieper**: bij z = 8 m is dat 15.8 kPa voor B = 2 m en 55.0 kPa voor B = 8 m.

# Oplossing (2/2)

OPLOSSING

**3** Oplossing voor lijnbelasting (P = 100 kN/m; x = 2 m, z = 2 m)

$$\Delta\sigma_z = \frac{2Pz^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(100)(2)^3}{\pi(4+4)^2} = \frac{1{,}600}{201.06} = \mathbf{7.958}\ \text{kPa}$$

**4** Steeds smaller wordende stroken met dezelfde P = qB (gesloten vorm, hetzelfde punt)

| B (m) | q = P/B (kPa) | $\Delta\sigma_z$ (strook, kPa) | Verschil met lijnbelasting |
|---|---|---|---|
| 2.0 | 50 | 9.242 | %16.1 |
| 1.0 | 100 | 8.287 | %4.1 |
| 0.5 | 200 | 8.041 | %1.0 |
| 0.1 | 1,000 | 7.961 | %0.0 |
| → **0** | → ∞ | **7.958** (lijnbelasting) | 0 |

Naarmate B kleiner wordt, nadert de strookoplossing van **9.24 kPa** tot de waarde van de lijnbelasting **7.96 kPa**; voor B = 0.1 m bedraagt het verschil slechts 0.04%. De lijnbelasting is de limiet B → 0 van de strookbelasting.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Samenvatting

# Belangrijkste punten

**Gesloten vorm**: $\Delta\sigma_z = (q/\pi)\{\tan^{-1}[z/(x - B/2)] - \tan^{-1}[z/(x + B/2)] - Bz[x^2 - z^2 - B^2/4] / ([x^2 + z^2 - B^2/4]^2 + B^2z^2)\}$; voor $x < B/2$ wordt π bij de eerste arctangens opgeteld

**Hoekvorm**: $\Delta\sigma_z = (q/\pi)[\alpha + \sin\alpha\cos(\alpha + 2\delta)]$; $\alpha = \theta_1 - \theta_2$, $\delta = 90° - \theta_1$. De spanning hangt uitsluitend van **x/B en z/B** af en overschrijdt q niet; aan het maaiveld is zij q onder de strook, q/2 aan de rand en 0 daarbuiten

**Voorbeeld** (q = 100 kN/m², B = 4 m; A: x = 1, z = 1 m): $A_1$ 2.3562, $A_2$ 0.3218, T -0.8 → $\Delta\sigma_z/q$ = **0.9022**; **$\Delta\sigma_z$ = 90.22 kPa**; de hoekvorm geeft hetzelfde

**Spanningsbol**: onder de as liggen de diepten waar q/2, q/5 en q/10 optreden op 1.13B, 3.13B en 6.34B. **Superpositie**: elke strook met de eigen x-waarde; in het voorbeeld met twee stroken 21.37 + 7.64 = **29.02 kPa**

**Grenzen**: dezelfde z/B geeft dezelfde spanning; bij B → 0 en P = qB constant nadert de oplossing die van de strookbelasting, de lijnlast

# Literatuur

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

**OPMERKING**

Alle rekenvoorbeelden zijn geproduceerd met de eigen berekeningsmotor van de module; de module geeft dezelfde waarden. De module opent met q = 100 kN/m², B = 4 m en A (x = 1 m, z = 1 m).

GeoTerva

Online geotechnische berekeningen

# Van theorie naar praktijk

Voer uw eigen stroken (q, B, aslijn) en punt A in GeoTerva in; de module levert tegelijk de spanning, de isospanningscontouren, het diepteprofiel, de stapsgewijze oplossing en het rapport.

**Module openen →** | **Theoriepagina →**

**Openen op de smartphone**
Proefmodules vereisen geen registratie.

Wilt u ze in uw colleges gebruiken: info@geoterva.com