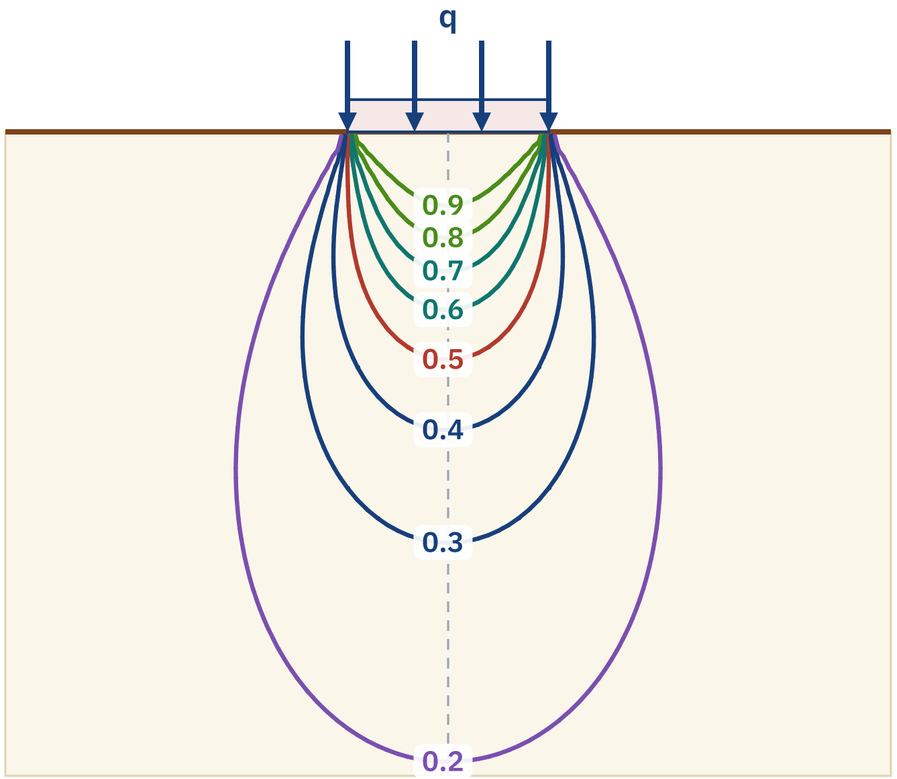
GeoTerva




شرائح محاضرات الجيوتكنيك · الإجهادات في التربة

# الإجهاد تحت حمل شريطي رأسي

المحاضرة: حمل شريطي رأسي غير محدود الطول ومرن؛ نقطة يدوياً، ومقاطع رأسية وأفقية، والتراكب.

تكامل الحمل الخطي | الصيغة الزاوية | بصلة الإجهاد | التراكب

قابل للحل يدوياً



يستند إلى صفحة النظرية في GeoTerva · geoterva.com

# ماذا سنتعلم في هذه المحاضرة؟

الزيادة في الإجهاد الرأسي تحت **الحمل الشريطي**: شريط مرن لانهائي الطول، عرضه B، يحمل ضغطاً منتظماً q؛ وهي **تكامل الحمل الخطي على عرض الشريط**

الصيغة المغلقة بـ **قوس الظل** و **صيغة الزاوية**؛ و **تصحيح π** المضاف إلى قوس الظل الأول عندما x < B/2

أن الإجهاد يعتمد على **x/B** و **z/B** فقط، ولا يتجاوز q أبداً؛ و**بصلة الإجهادات** وجدول معامل التأثير

حساب نقطة واحدة **يدوياً من البداية إلى النهاية**؛ والمقاطع الرأسية والأفقية في جداول؛ وعدة شرائح **بالتراكب**

**تسلسل المحاضرة**

يعالج كل موضوع في **ثلاث خطوات**:

1 · **النظرية**: المعادلة ومبرراتها

2 · **المسألة**: المعطيات والمطلوب

3 · **الحل**: خطوة بخطوة، بالأرقام

مثال: $B = 4\ m$، $q = 100\ kN/m^2$؛ النقطة A على بعد $x = 1\ m$ جانبياً من الخط المحوري، وعلى عمق $z = 1\ m$.

النظرية

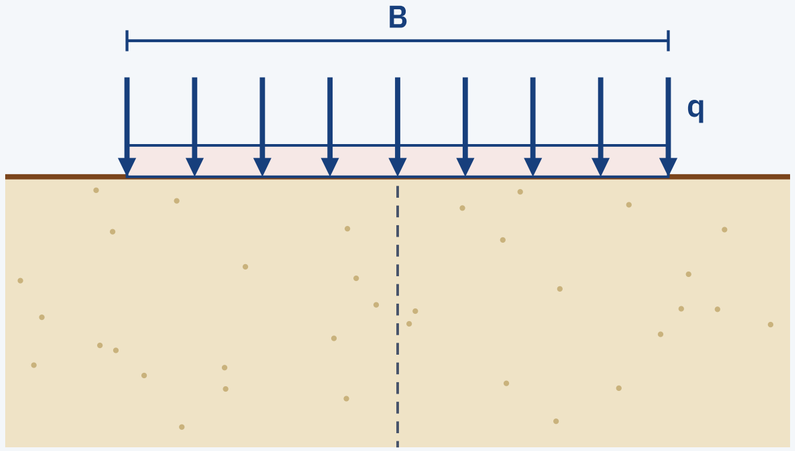
# حمل شريطي: عرض محدود، طول غير محدود

قاعدة طويلة، أو السطح العلوي لطريق أو ردم، أو قاع جدار: كثير من الأحمال طويل في اتجاه وذو عرض محدود في الاتجاه الآخر. و**الحمل الشريطي** يمثل هذه الحالات

**الشريط المرن**: عرضه B وطوله لانهائي، ويحمل ضغطا رأسيا منتظما q. والإجهاد واحد في كل مقطع؛ والمسألة في حالة **انفعال مستو** (ثنائية الأبعاد)

مهما كان الهبوط يبقى الضغط على امتداد العرض مساوياً q؛ أما القاعدة الجاسئة فكانت ستعيد توزيع هذا الضغط

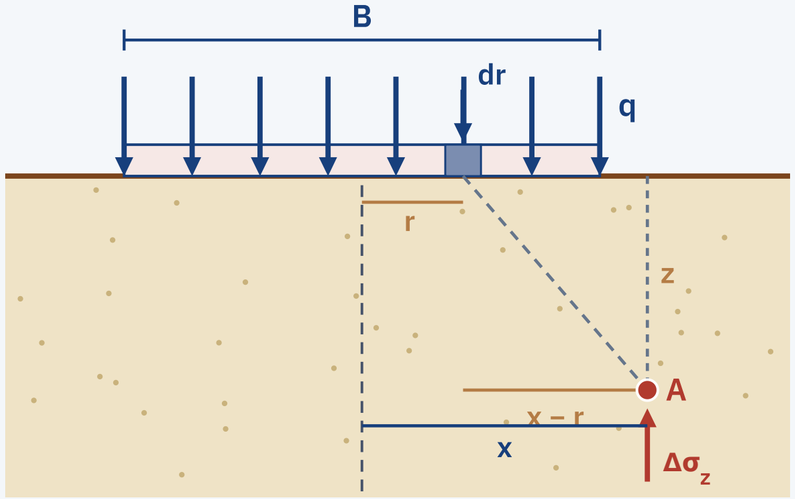
التربة وسط نصف لانهائي **متجانس ومتماثل الخواص وخطي المرونة**. أما $\Delta\sigma_z$ فهي الزيادة الناتجة عن الحمل فقط؛ ويضاف الغطاء الترابي بشكل منفصل




المقطع: يمتد الشريط إلى ما لا نهاية في اتجاه y؛ والإجهاد نفسه في كل مقطع (انفعال مستوٍ)

# من الحمل الخطي إلى الحمل الشريطي

النظرية




الشريط العنصري ذو العرض dr يحمل **q dr** لكل وحدة طول ويؤثر مثل **حمل خطي**؛ وبعده الأفقي عن النقطة A يساوي x − r

$$d\sigma_z = \frac{2\,(q\,dr)\,z^3}{\pi\,[(x-r)^2+z^2]^2}$$

الشريط بأكمله هو مجموع هذه الأحمال الخطية من r = −B/2 ... +B/2

$$\Delta\sigma_z = \int_{-B/2}^{+B/2} \frac{2q}{\pi}\,\frac{z^3}{[(x-r)^2+z^2]^2}\,dr$$

# الصيغة المغلقة للتكامل

النظرية

يُؤخذ u = x − r؛ و**الدالة الأصلية** للتعبير $1/(u^2+z^2)^2$ هي $(q/\pi)[\tan^{-1}(u/z) + z\,u/(u^2+z^2)]$. وعند حساب التكامل بين الحدين u = x − B/2 و u = x + B/2 نحصل على **صيغة الظل العكسي**

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{\pi}\left\{\tan^{-1}\frac{z}{x-B/2} - \tan^{-1}\frac{z}{x+B/2} - \frac{B\,z\,[x^2-z^2-B^2/4]}{[x^2+z^2-B^2/4]^2+B^2z^2}\right\}$$

تؤخذ قيم قوس الظل بـ **الراديان**؛ و $\Delta\sigma_z$ متساوية عند الموضعين +x و −x (الشريط متماثل حول محوره)

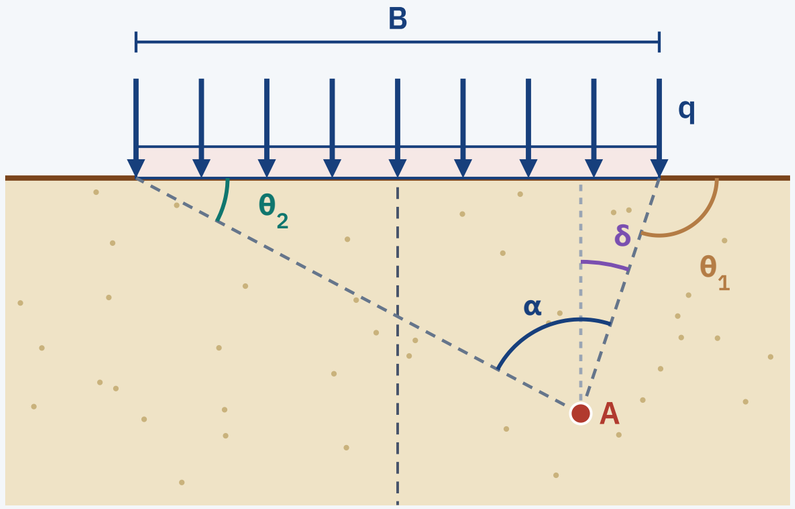
المعادلة صالحة كما هي مكتوبة عندما x ≥ B/2. وعندما 0 ≤ x < B/2 يصبح حد الظل العكسي الأول سالباً ويستبدل بالتعبير **π + $\tan^{-1}[z/(x-B/2)]$**؛ وعند x = B/2 تماماً يساوي π/2

التحقق العددي (q = 100، B = 4، x = 1، z = 1): التكامل العددي لحل الحمل الخطي على عرض الشريط يعطي **90.2232 kPa**، والصيغة المغلقة تعطي **90.2232 kPa**

النظرية

# يعتمد الإجهاد على الزوايا فقط

تكتب النتيجة نفسها بدلالة الزوايا المبينة في الشكل. تقاس θ من السطح؛ و $\alpha = \theta_1 - \theta_2$ – هي الزاوية التي يرى منها الشريط من النقطة A. أما **δ** فهي الزاوية بين الرأسي والخط المستقيم المرسوم من A إلى الحافة +$\theta_1$ – 90° = δ :B/2 (وتكون سالبة تحت الشريط)




$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{\pi}\left[\alpha + \sin\alpha\,\cos(\alpha + 2\delta)\right]$$

$$F(u) = \tan^{-1}\frac{u}{z} + \frac{zu}{u^2+z^2} = \varphi + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi \quad (u = z\tan\varphi)$$

يعتمد الإجهاد على **x/B** و **z/B** فقط و**لا يتجاوز q**: عند السطح تحت الشريط α = π و $\Delta\sigma_z$ = q؛ وبجانب الشريط α = 0

# أسفل المحور وأسفل الحافة

النظرية

**تحت المحور** (x = 0؛ b = B/2) تصبح المعادلة ذات حد واحد؛ و **تحت الحافة** (x = b) تساوي دالة قوس الظل الأولى π/2 وعند السطح $\Delta\sigma_z = q/2$

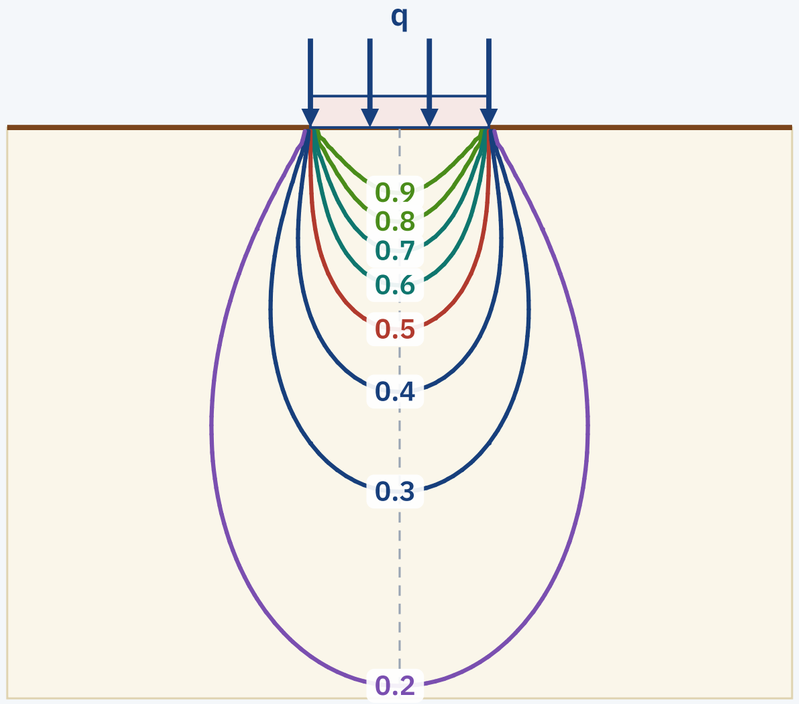
$$\left.\frac{\Delta\sigma_z}{q}\right|_{x=0} = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{b}{z} + \frac{bz}{b^2+z^2}\right]$$

$$\left.\frac{\Delta\sigma_z}{q}\right|_{x=b} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{z}{B} + \frac{Bz}{B^2+z^2}\right]$$

| 2z/B | 0.5 | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 6.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| تحت المحور (2x/B = 0) | 0.959 | 0.818 | 0.550 | 0.396 | 0.306 | 0.208 |
| تحت الحافة (2x/B = 1) | 0.497 | 0.480 | 0.409 | 0.334 | 0.275 | 0.198 |

# خطوط الكنتور: $\Delta\sigma_z/q$

النظرية




ينخفض الإجهاد تحت المحور إلى نصف قيمة q عند عمق يقارب **z = 1.1B**، وإلى خمس قيمتها عند **3.1B**، ولا ينخفض إلى عشر قيمتها إلا عند **6.3B**

تتكاثف الخطوط ذات القيم 0.6 – 0.9 تحت الشريط في المنطقة القريبة من السطح: وهي **بصلة الضغط** المعروفة

عند قسمة المسافات على B تكون المنحنيات **نفسها لكل شريط**: فالمخطط الواحد المرسوم بدلالة x/B و z/B صالح لأي q و B

# قيم $\Delta\sigma_z/q$

النظرية

| 2z/B \ 2x/B | 0.0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.000 | 1.000 | 0.500 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 0.5 | 0.959 | 0.902 | 0.497 | 0.089 | 0.019 | 0.006 | 0.003 |
| 1.0 | 0.818 | 0.735 | 0.480 | 0.214 | 0.084 | 0.036 | 0.017 |
| 1.5 | 0.668 | 0.607 | 0.448 | 0.271 | 0.146 | 0.077 | 0.042 |
| 2.0 | 0.550 | 0.510 | 0.409 | 0.288 | 0.185 | 0.114 | 0.071 |
| 2.5 | 0.462 | 0.436 | 0.370 | 0.285 | 0.205 | 0.141 | 0.095 |
| 3.0 | 0.396 | 0.379 | 0.334 | 0.274 | 0.211 | 0.157 | 0.114 |
| 3.5 | 0.345 | 0.334 | 0.302 | 0.258 | 0.210 | 0.165 | 0.127 |
| 4.0 | 0.306 | 0.298 | 0.275 | 0.242 | 0.205 | 0.168 | 0.134 |
| 5.0 | 0.248 | 0.244 | 0.231 | 0.212 | 0.188 | 0.164 | 0.139 |
| 6.0 | 0.208 | 0.206 | 0.198 | 0.186 | 0.171 | 0.154 | 0.136 |

$\Delta\sigma_z = q$ · (قيمة الجدول). وكل قيمة في الجدول تأتي من المعادلة نفسها؛ والصف $z = 0$ هو السطح (1 تحت الشريط، 0.5 عند الحافة، 0 في الخارج).

# التراكب

النظرية

بما أن التربة **مرنة** فإن إجهاد كل شريط يُحسب على حدة ثم تُجمع الإجهادات. ويُعرَّف كل شريط بقيم q و B وخط محوره الخاصة به؛ وتقبل الوحدة 8 أشرطة كحد أقصى

**لا يجوز أن تتداخل** الأشرطة: لكن يمكن أن يلتقي شريطان عند حافة واحدة. ويُحسب إجهاد كل شريط **بقيمة x الخاصة به**، أي ببعد النقطة A عن خط محور ذلك الشريط

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad x_k = x_A - x_{c,k}$$

تحسب $\Delta\sigma_{z(k)}$ من المعادلة أعلاه باستخدام $(q_k, B_k, x_k, z)$؛ وبسبب التماثل يلزم $|x_k|$ فقط

# المسألة

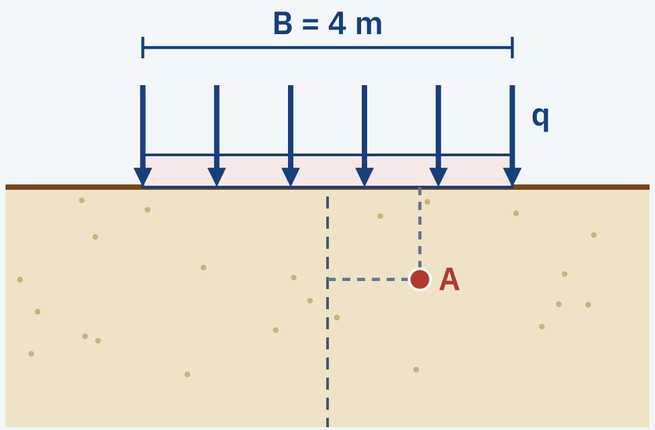
مثال

## المعطيات

| | |
|---|---|
| حمل شريطي | **مرن، رأسي:** $q = 100$ **kN/m²**، $B = 4$ **m** ( $b = B/2 = 2$ **m**)؛ **خط المحور** $x = 0$ |
| النقطة A | **على بعد** $x = 1$ **m جانبياً من خط المحور، وعلى عمق** $z = 1$ **m (أسفل الشريط)** |

## المطلوب

**$\Delta\sigma_z$** و **$\Delta\sigma_z/q$**: أولاً بالصيغة المغلقة (قوس الظل)، ثم التحقق بـ **صيغة الزاوية**.



# الحل (1/3)

الحل

**1** نصف العرض وبعد النقطة A عن الحواف

$$b = \frac{B}{2} = 2\ \text{m} \qquad x - b = 1 - 2 = -1\ \text{m} \qquad x + b = 1 + 2 = 3\ \text{m}$$

$$\frac{2x}{B} = 0.5 \qquad \frac{2z}{B} = 0.5$$

**2** بما أن $x < B/2$ فإن دالة arctan الأولى سالبة، ويضاف π

$$\tan^{-1}\frac{z}{x-b} = \tan^{-1}\frac{1}{-1} = -0.7854 \;\Rightarrow\; A_1 = \pi + (-0.7854) = \mathbf{2.3562}$$

$$A_2 = \tan^{-1}\frac{z}{x+b} = \tan^{-1}\frac{1}{3} = \mathbf{0.3218}$$

تقع النقطة A **تحت** الشريط ($|x| = 1\ \text{m} < B/2 = 2\ \text{m}$). ولذلك يلزم تصحيح π للظل العكسي الأول؛ $A_1 = 2.3562$ و $A_2 = 0.3218$ rad.

# الحل (2/3)

الحل

**3** الحد الثالث (الجبري)

$$T = \frac{B\,z\,(x^2 - z^2 - b^2)}{(x^2 + z^2 - b^2)^2 + B^2 z^2} = \frac{4(1)(1 - 1 - 4)}{(1 + 1 - 4)^2 + 16(1)} = \frac{-16}{20} = \mathbf{-0.8000}$$

**4** قيمة التأثير والإجهاد

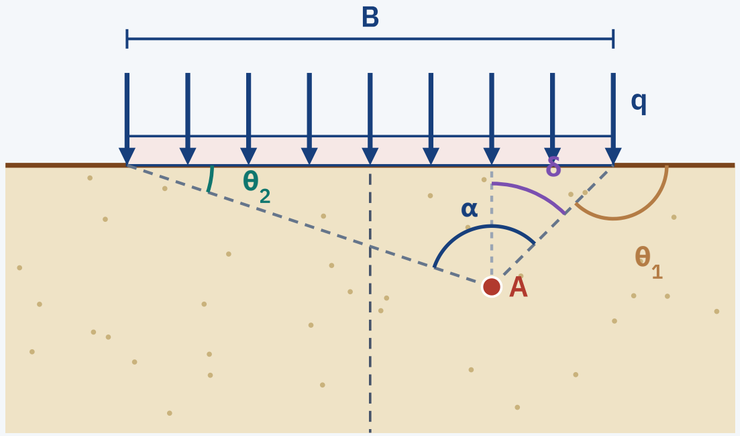
$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{\pi}\left[A_1 - A_2 - T\right] = \frac{1}{\pi}\left[2.3562 - 0.3218 - (-0.8)\right] = \mathbf{0.9022}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.9022\,(100) = \mathbf{90.22}\ \text{kPa}$$

**$\Delta\sigma_z$ = 90.22 kPa**: الإجهاد عند النقطة A يساوي **90.2**% من ضغط السطح ($\Delta\sigma_z/q$ = 0.9022). ولا يتجاوز الإجهاد q = 100 kPa.

# الحل (3/3)

الحل




**5** الزوايا: θ من السطح، δ من الرأسي

$$\theta_1 = 135.00^\circ \quad (x - b < 0) \qquad \theta_2 = \tan^{-1}\frac{z}{x+b} = 18.43^\circ$$

$$\alpha = \theta_1 - \theta_2 = 116.57^\circ = 2.0344 \text{ rad}$$

$$\delta = 90^\circ - \theta_1 = -\mathbf{45}^\circ$$

**6** صيغة الزاوية

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{\pi}\left[\alpha + \sin\alpha\cos(\alpha + 2\delta)\right]$$

$$= \frac{100}{\pi}\left[2.0344 + (0.8944)\cos(26.57^\circ)\right]$$

$$= \frac{100}{\pi}(2.8344) = \mathbf{90.22} \text{ kPa}$$

تعطي الصيغتان **النتيجة نفسها**: $\Delta\sigma_z$ = 90.22 kPa. وتعطي الوحدة القيمة نفسها؛ وتبيّن الصيغة الزاوية أن الإجهاد يتوقف على الزوايا فقط، أي على x/B و z/B.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

# المسألة

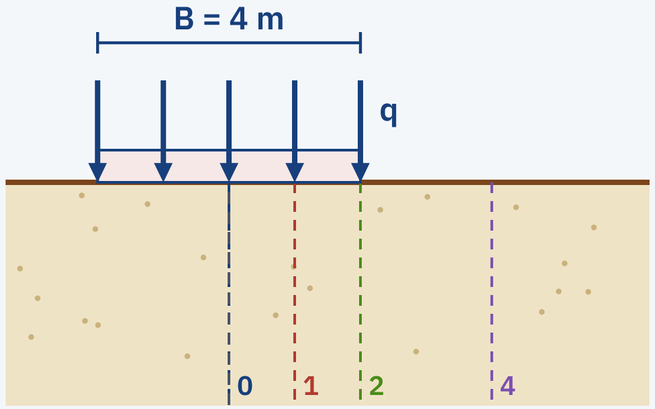
مثال

### المعطيات

| | |
|---|---|
| حمل شريطي | $q = 100$ kN/m²، $B = 4$ m، الخط المحوري $x = 0$ (الشريط في المثال 1) |
| المستقيمات | $x = 0$ (المحور)، $x = 1$ m (الخط المار بالنقطة A)، $x = 2$ m (الحافة)، $x = 4$ m (خارج الحافة بمقدار 2 m) |
| العمق | $z = 0.5$ … 12 m |

### المطلوب

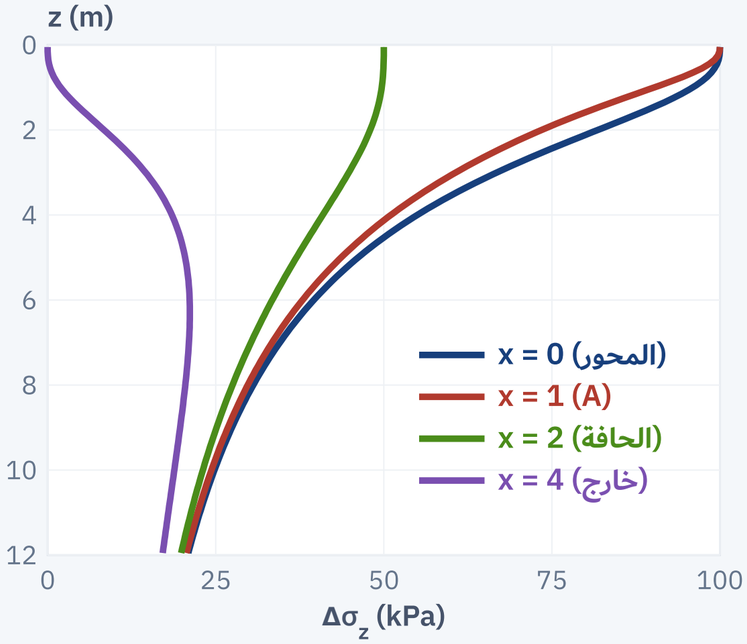
تغير $\Delta\sigma_z$ مع العمق على امتداد كل خط مستقيم؛ والأعماق التي يبلغ عندها الإجهاد تحت المحور **q/2** و **q/5** و **q/10**.



# الحل (1/2)

الحل

| z (m) | 2z/B | x = 0 (المحور) | x = 1 m (A) | x = 2 m (الحافة) | x = 4 m (في الخارج) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 0.250 | 99.38 | 97.88 | 49.96 | 0.30 |
| 1.0 | 0.500 | 95.95 | **90.22** | 49.69 | 1.93 |
| 1.5 | 0.750 | 89.59 | 81.38 | 49.04 | 4.90 |
| 2.0 | 1.000 | 81.83 | 73.47 | 47.97 | 8.39 |
| 3.0 | 1.500 | 66.82 | 60.71 | 44.80 | 14.57 |
| 4.0 | 2.000 | 54.98 | 51.05 | 40.92 | 18.48 |
| 5.0 | 2.500 | 46.18 | 43.65 | 37.00 | 20.45 |
| 6.0 | 3.000 | 39.58 | 37.91 | 33.41 | 21.12 |
| 8.0 | 4.000 | 30.58 | 29.76 | 27.49 | 20.47 |
| 10.0 | 5.000 | 24.81 | 24.36 | 23.09 | 18.84 |
| 12.0 | 6.000 | 20.84 | 20.57 | 19.79 | 17.07 |




**تحت المحور** يتناقص الإجهاد ببطء من السطح نحو الأعماق (20.8 kPa عند z = 12 m)؛ و**تحت الحافة** يقترب كثيرا من q/2 عند السطح (50.0 kPa) ثم يتناقص؛ وعلى الخط المستقيم **الواقع خارج الحمل** يزداد الإجهاد أولا، ويبلغ قيمته العظمى عند (21.1 kPa) z ≈ 6 m ثم يتناقص.

# الحل (2/2)

الحل

**1** تحت المحور تؤول المعادلة إلى حد واحد (x = 0، b = B/2 = 2 m)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{b}{z} + \frac{bz}{b^2+z^2}\right] \qquad z = 1.132B = 4.53\ \text{m} \Rightarrow \frac{2}{\pi}[0.4159 + 0.3695] = \mathbf{0.500}$$

**2** قيم المعادلة عند ثلاثة أعماق

| قيمة التأثير | z/B | z (m) | $\tan^{-1}(b/z)$ | $bz/(b^2+z^2)$ | $\Delta\sigma_z/q$ | $\Delta\sigma_z$ (kPa) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| q/2 | 1.132 | 4.53 | 0.4159 | 0.3695 | **0.500** | 50.00 |
| q/5 | 3.130 | 12.52 | 0.1584 | 0.1558 | **0.200** | 20.00 |
| q/10 | 6.340 | 25.36 | 0.0787 | 0.0784 | **0.100** | 10.00 |

تحت المحور ينخفض الإجهاد إلى q/2 عند **z = 1.13B = 4.5 m**، وإلى q/5 عند **3.13B = 12.5 m**، وإلى q/10 عند **6.34B = 25.4 m**: فتظل التربة تحت تأثير الحمل حتى عمق يبلغ عدة أمثال عرض الشريط.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

# المسألة

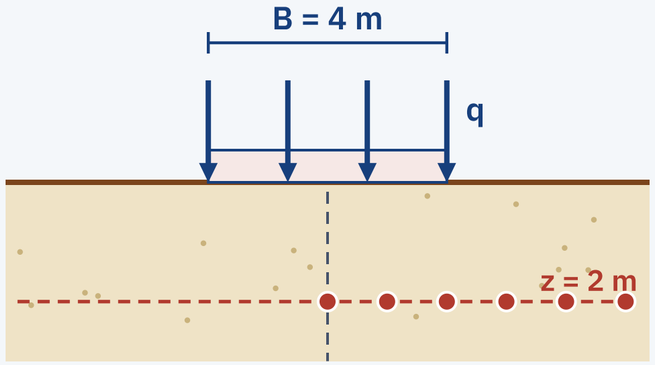
مثال

### المعطيات

| | |
|---|---|
| حمل شريطي | $B = 4$ m, $q = 100$ kN/m², $x = 0$ $(b = 2$ m$)$ |
| الخط المستقيم | **خط أفقي عند عمق** $z = 2$ m**؛ النقاط** $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ m |
| الحساب اليدوي | **أسفل الحافة** $x = b = 2$ m **وخارج الشريط** $x = 3$ m |

### المطلوب

حساب $\Delta\sigma_z$ يدويا **تحت الحافة** $(x = B/2)$ و**خارج الشريط** $(x = 3$ m$)$؛ والمخطط الأفقي كاملا عند $z = 2$ m؛ ومقارنة $x = -3$ m مع $x = +3$ m.



# الحل (1/3)

الحل

**1** x = b = 2 m، z = 2 m: قيمة الظل القوسي الأولى تساوي π/2 تماماً

$$A_1 = \tan^{-1}\frac{z}{x-b} = \tan^{-1}\frac{2}{0} = \frac{\pi}{2} = 1.5708 \qquad A_2 = \tan^{-1}\frac{2}{4} = 0.4636$$

$$T = \frac{4(2)(4-4-4)}{(4+4-4)^2+16(4)} = \frac{-32}{80} = -0.4$$

**2** قيمة التأثير والإجهاد

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{\pi}\left[1.5708 - 0.4636 - (-0.4)\right] = \mathbf{0.4797}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.4797\,(100) = \mathbf{47.97}\ \text{kPa}$$

تحت الحافة ينخفض الإجهاد من القيمة q/2 على السطح إلى **47.97 kPa** (48.0% من q) عند العمق z = 2 m.
وعند الحافة تماماً تكون قيمة حد الظل العكسي الأول π/2؛ فلا حاجة إلى تصحيح π.

# الحل (2/3)

الحل

**3** x = 3 m > b: يؤخذ كلا قوسي الظل مباشرة (x + b = 5، x − b = 1)

$$A_1 = \tan^{-1}\frac{2}{1} = 1.1071 \qquad A_2 = \tan^{-1}\frac{2}{5} = 0.3805$$

$$T = \frac{4(2)(9-4-4)}{(9+4-4)^2+16(4)} = \frac{8}{145} = 0.0552$$

**4** قيمة التأثير والإجهاد

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{\pi}\left[1.1071 - 0.3805 - 0.0552\right] = \mathbf{0.2137}$$

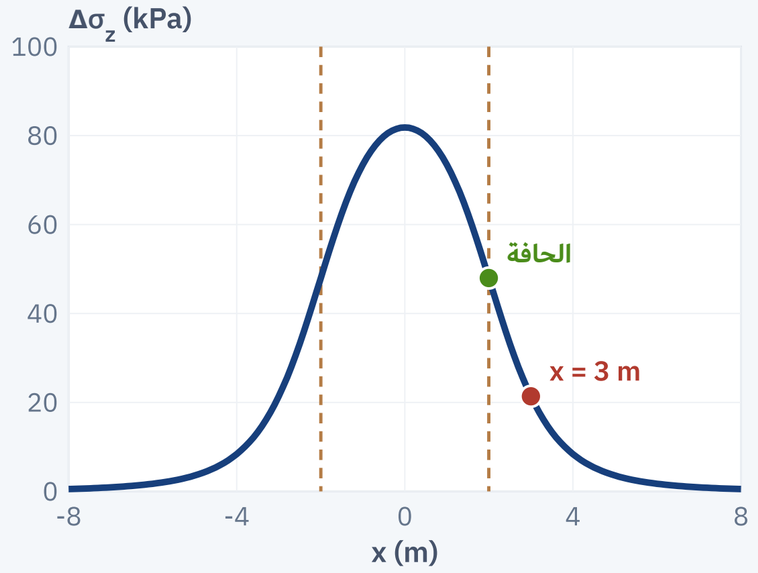
$$\Delta\sigma_z = 0.2137\,(100) = \mathbf{21.37}\ \text{kPa}$$

على بعد **1 m خارج** الشريط (x = 3 m) يبلغ الإجهاد 21.37 kPa؛ فلا يوجد حمل عند هذه النقطة، ومع ذلك تتحمل التربة إجهاداً. وبالتناظر نحصل على **21.37 kPa** أيضاً عند x = −3 m (وتعطي الوحدة القيمة نفسها).

# الحل (3/3)

الحل

| الموضع | $\Delta\sigma_z/q$ | $\Delta\sigma_z$ (kPa) | 2x/B | x (m) |
|---|---|---|---|---|
| المحور | 0.8183 | 81.83 | 0.00 | 0 |
| أسفل الشريط | 0.7347 | 73.47 | 0.50 | 1 |
| الحافة | 0.4797 | 47.97 | 1.00 | 2 |
| في الخارج | 0.2137 | 21.37 | 1.50 | 3 |
| في الخارج | 0.0839 | 8.39 | 2.00 | 4 |
| في الخارج | 0.0358 | 3.58 | 2.50 | 5 |
| في الخارج | 0.0172 | 1.72 | 3.00 | 6 |
| في الخارج | 0.0053 | 0.53 | 4.00 | 8 |




يبلغ الإجهاد أقصاه على المحور (81.8 kPa)، وينخفض عند الحافة إلى 48.0 kPa (نحو نصف q) ويتلاشى بسرعة خارج الشريط: 0.53 kPa عند x = 8 m. والمقطع **متناظر** حول المحور x = 0.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

# المسألة

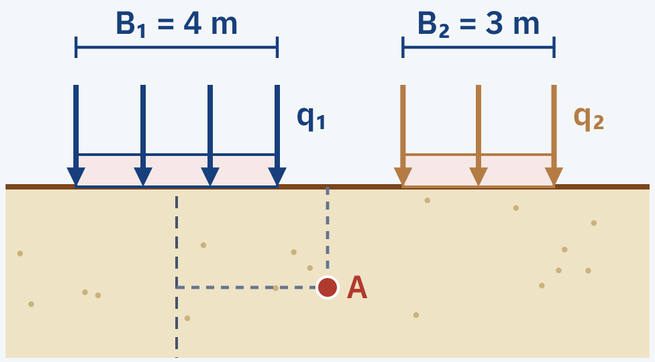
مثال

### المعطيات

| | |
|---|---|
| الشريحة 1 | $q_1 = 100$ kN/m²، $B_1 = 4$ m، خط المحور $x_{c1} = 0$ (2 m ... 2–) |
| الشريط 2 | $q_2 = 60$ kN/m²، $B_2 = 3$ m، خط المحور $x_{c2} = 6$ m (7.5 m ... 4.5) |
| النقطة A | $x = 3$ m، $z = 2$ m (بين الشريطين) |

### المطلوب

إجهاد كل شريط عند A و**$\Delta\sigma_z$ الكلي**؛ وتغير الإجهاد مع العمق تحت A.



# الحل (1/2)

الحل

**1** الشريحة 1: $x_1 = 3 - 0 = 3$ m، $b = 2$ m ($x > b$)

$$A_1 = \tan^{-1}\frac{2}{1} = 1.1071 \quad A_2 = \tan^{-1}\frac{2}{5} = 0.3805 \quad T = \frac{4(2)(1)}{9^2+64} = 0.0552$$

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{100}{\pi}\left[A_1 - A_2 - T\right] = 0.2137\,(100) = \mathbf{21.37}\ \text{kPa}$$

**2** الشريط 2: $x_2 = 3 - 6 = -3$ m ($|x_2| = 3$ m)، $b = 1.5$ m

$$A_1 = \tan^{-1}\frac{2}{1.5} = 0.9273 \quad A_2 = \tan^{-1}\frac{2}{4.5} = 0.4182 \quad T = \frac{3(2)(2.75)}{(10.75)^2+36} = 0.1089$$

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{60}{\pi}\left[A_1 - A_2 - T\right] = 0.1274\,(60) = \mathbf{7.64}\ \text{kPa}$$

**3** التراكب

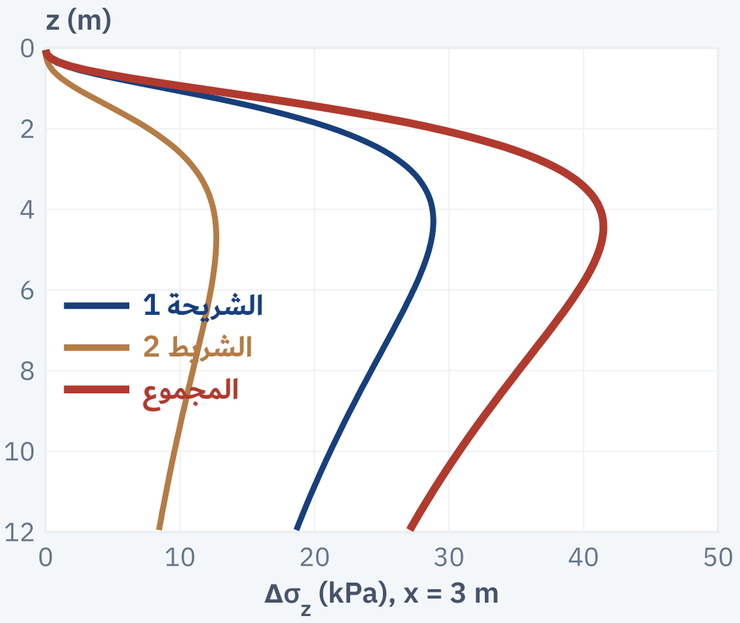
$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 21.37 + 7.64 = \mathbf{29.02}\ \text{kPa}$$

المجموع **$\Delta\sigma_z$ = 29.02 kPa**؛ وتعطي الوحدة القيمة نفسها. حصة الشريط الثاني 26% من المجموع.

# الحل (2/2)

الحل

| z (m) | الشريط 1 (kPa) | الشريط 2 (kPa) | المجموع (kPa) | حصة الشريط 2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8.92 | 2.28 | **11.21** | % 20 |
| 2 | 21.37 | 7.64 | **29.02** | % 26 |
| 3 | 27.05 | 11.09 | **38.14** | % 29 |
| 4 | 28.76 | 12.47 | **41.24** | % 30 |
| 6 | 27.35 | 12.28 | **39.63** | % 31 |
| 8 | 24.21 | 10.95 | **35.16** | % 31 |
| 12 | 18.59 | 8.41 | **26.99** | % 31 |




الإجهاد الكلي أسفل A أكبر ما يكون عند z ≈ 4.5 m (41.5 kPa) ثم يتناقص. وفي الطبقة القريبة من السطح يغلب الشريط 1؛ وفي العمق تتقارب حصتا الشريطين (عند z = 12 m تبلغ حصة الشريط 2 نسبة 31%).

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

# المسألة

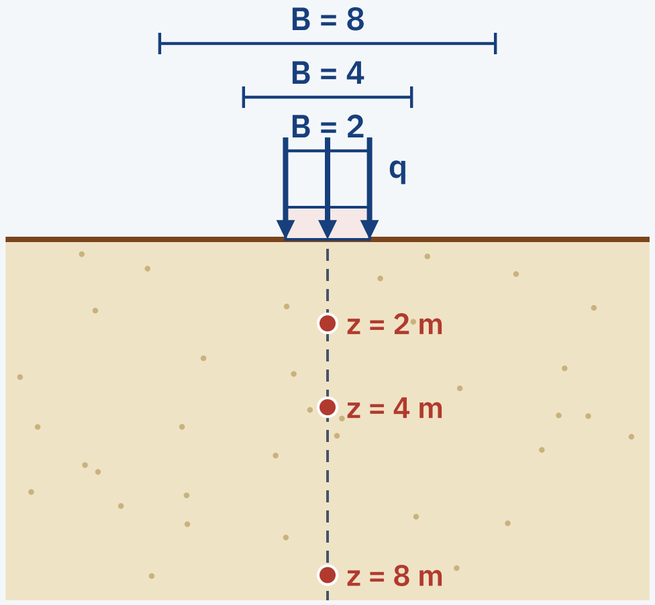
مثال

### المعطيات

| | |
|---|---|
| تأثير العرض | المقدار نفسه $q = 100$ kN/m²؛ $B = 2,\ 4,\ 8$ m؛ تحت المحور $z = 2,\ 4,\ 8$ m |
| شريط ضيق | شدة الحمل $P = qB = 100$ kN/m ثابتة؛ $B = 2,\ 1,\ 0.5,\ 0.1$ m؛ النقطة $x = 2$ m، $z = 2$ m |
| المقارنة | حمل خطي: $\Delta\sigma_z = 2Pz^3/[\pi(x^2+z^2)^2]$ |

### المطلوب

إظهار أن الإجهاد يكون نفسه عندما تكون **z/B** نفسها؛ ومشاهدة اقتراب النتيجة من قيمة **الحمل الخطي** كلما ضاق الشريط.



# الحل (1/2)

الحل

**1** أسفل المحور، B = 2 m، z = 2 m (z/B = 1؛ b = 1 m)

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{1}{2} + \frac{1(2)}{1+4}\right] = \frac{2}{\pi}\left[0.4636 + 0.4\right] = 0.5498 \Rightarrow \Delta\sigma_z = \mathbf{54.98}\ \text{kPa}$$

**2** ثلاثة عروض، ثلاثة أعماق (تحت المحور، kPa)

| B (m) | z = 2 m | z = 4 m | z = 8 m |
|---|---|---|---|
| 2 | (z/B = 1.00) 54.98 | (z/B = 2.00) 30.58 | (z/B = 4.00) 15.75 |
| 4 | (z/B = 0.50) 81.83 | (z/B = 1.00) 54.98 | (z/B = 2.00) 30.58 |
| 8 | (z/B = 0.25) 95.95 | (z/B = 0.50) 81.83 | (z/B = 1.00) 54.98 |

يعتمد الإجهاد **على z/B فقط**: B = 2 m، z = 2 m؛ B = 4 m، z = 4 m؛ B = 8 m، z = 8 m تعطي دائماً **54.98 kPa**. وبالحمل q نفسه يؤثر **الشريط العريض في عمق أكبر**: عند z = 8 m يكون الإجهاد 15.8 kPa عندما B = 2 m، و 55.0 kPa عندما B = 8 m.

# الحل (2/2)

الحل

**3** حل حمل خطي (P = 100 kN/m؛ x = 2 m، z = 2 m)

$$\Delta\sigma_z = \frac{2Pz^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(100)(2)^3}{\pi(4+4)^2} = \frac{1{,}600}{201.06} = \mathbf{7.958}\ \text{kPa}$$

**4** شرائط تضيق تدريجياً بالحمل P = qB نفسه (صيغة مغلقة، النقطة نفسها)

| B (m) | q = P/B (kPa) | $\Delta\sigma_z$ (شريط، kPa) | الفرق عن الحمل الخطي |
|---|---|---|---|
| 2.0 | 50 | 9.242 | %16.1 |
| 1.0 | 100 | 8.287 | %4.1 |
| 0.5 | 200 | 8.041 | %1.0 |
| 0.1 | 1,000 | 7.961 | %0.0 |
| **0 →** | **∞ →** | **7.958** (حمل خطي) | 0 |

كلما صغر B انخفض حل الشريط من **9.24 kPa** مقترباً من قيمة الحمل الخطي **7.96 kPa**؛ وعند B = 0.1 m لا يتجاوز الفرق 0.04%. والحمل الخطي هو النهاية الحدية للحمل الشريطي عندما B → 0.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

# النقاط الرئيسية

**الصيغة المغلقة:** $\Delta\sigma_z = (q/\pi)\{\tan^{-1}[z/(x - B/2)] - \tan^{-1}[z/(x + B/2)] - Bz[x^2 - z^2 - B^2/4] / ([x^2 + z^2 - B^2/4]^2 + B^2z^2)\}$؛ وعندما $x < B/2$ يُضاف $\pi$ إلى دالة الظل العكسي الأولى

**صيغة الزوايا:** $\Delta\sigma_z = (q/\pi)[\alpha + \sin\alpha\cos(\alpha + 2\delta)]$؛ $\delta = 90° - \theta_1$، $\alpha = \theta_1 - \theta_2$. ويعتمد الإجهاد على **x/B و z/B** فقط ولا يتجاوز q؛ وعند السطح يساوي q تحت الشريط، و q/2 عند الحافة، و 0 خارجه

**مثال** ($q = 100$ kN/m²، $B = 4$ m؛ النقطة A: $x = 1$، $z = 1$ m): $\Delta\sigma_z/q =$ **0.9022** → $T$ -0.8، $A_2$ 0.3218، $A_1$ 2.3562؛ **$\Delta\sigma_z$ = 90.22 kPa**؛ وصيغة الزاوية هي نفسها

**بصلة الإجهاد:** تحت المحور تقع أعماق الإجهادات q/2 و q/5 و q/10 عند 1.13B و 3.13B و 6.34B. **التراكب:** كل شريط بقيمة x الخاصة به؛ وفي مثال الشريطين 21.37 + 7.64 = **29.02 kPa**

**الحدود:** تعطي z/B نفسها نفس الإجهاد؛ وعندما $B \to 0$ مع بقاء $P = qB$ ثابتاً، يقترب الحل من حل الحمل الشريطي الخطي

# المراجع

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

**ملاحظة**

جميع الأمثلة العددية ناتجة عن محرك الحساب الخاص بالوحدة؛ وتعطي الوحدة القيم نفسها. والمثال الابتدائي للوحدة هو $q = 100\ \mathrm{kN/m^2}$ و $B = 4\ \mathrm{m}$ والنقطة A $(x = 1\ \mathrm{m}، z = 1\ \mathrm{m})$.

حسابات الجيوتكنيك عبر الإنترنت

# من النظرية إلى التطبيق

أدخل في GeoTerva أشرطتك الخاصة (q و B وخط المحور) والنقطة A؛ وتعطي الوحدة معاً الإجهاد ومنحنيات تساوي الإجهاد ومخطط العمق والحل خطوة بخطوة والتقرير.

**افتح الوحدة ←**

**صفحة النظرية ←**

**افتح على الهاتف**

لا تتطلب الوحدات التجريبية تسجيلاً.

إذا رغبت في استخدامها في محاضراتك: info@geoterva.com