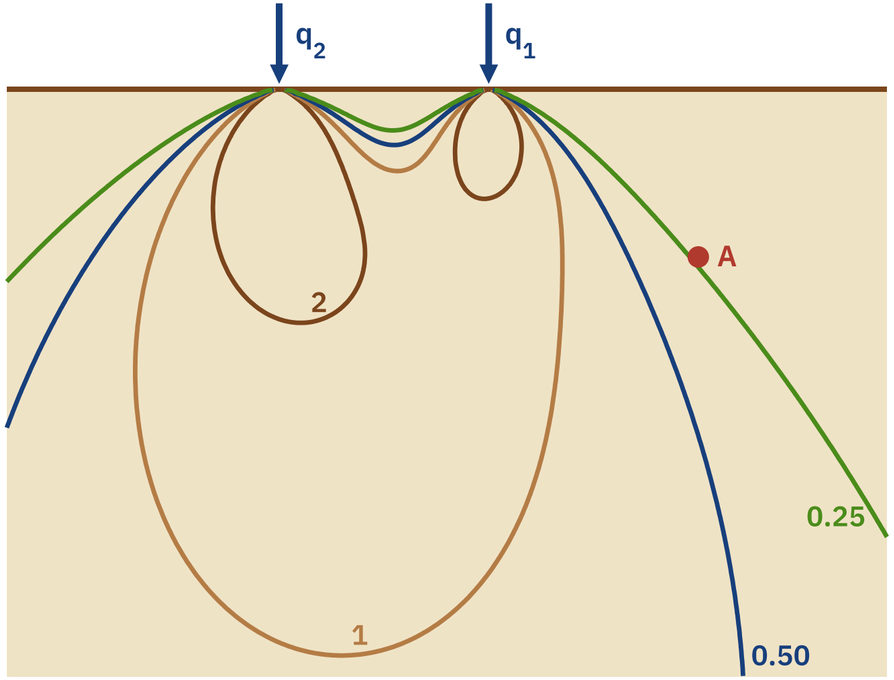
GeoTerva

岩土工程讲义 · 土中应力分布

竖向线荷载下的应力

讲义：地表竖向线荷载在土体中引起的竖向应力；对打开模块时的初始点从头至尾手算，深度剖面和侧向剖面以表格给出。

平面应变 | 无量纲曲线 | 叠加法 | 集中荷载序列 | 等应力线



引言

本讲内容

线荷载在**平面应变**条件下：应力仅取决于水平距离x和深度z

将线荷载视为一列**集中荷载**求和，得到关系式$\Delta\sigma_z = 2qz^3/[\pi(x^2 + z^2)^2]$

与集中荷载的区别：荷载轴线下方的应力仅随1/z衰减，$\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$

无量纲形式：单一的$\Delta\sigma_z/(q/z)$曲线和x/z表；采用**叠加法**处理多个平行荷载

从头到尾手算模块的初始算例（两个线荷载）；沿深度和水平方向的变化列于表中

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：公式及其依据

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

算例：q_1 = 7.5 kN/m (x = 0)，q_2 = 15 kN/m (x = −5 m)；A点：x = 5 m，z = 4 m。

沿无限长直线每单位长度的荷载

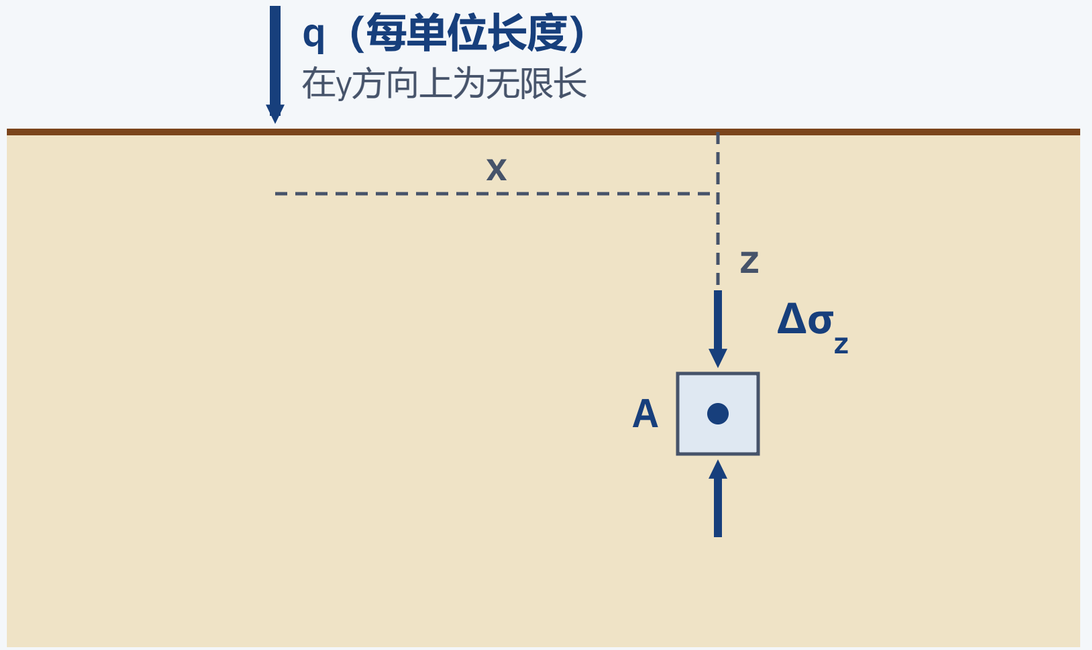
理论

线荷载是作用于地表无限长直线上、单位长度强度为q的荷载：如长墙、钢轨，或窄到宽度可忽略的条带。

由于垂直于该线的每个截面受力方式相同，应力处于**平面应变**状态，仅取决于水平距离x和深度z。

荷载为柔性、竖向，并沿y方向无限长；土体假定为均质、各向同性、线弹性的半无限空间。

$\Delta\sigma_z$为荷载引起的应力增量；该点上方土体的上覆土压力未计入。



从一排集中荷载到线荷载

理论

线荷载可视为沿y方向排列的一排集中荷载dP = q dy。

每个集中荷载按$r^2 = x^2 + y^2$给出Boussinesq应力；将这些贡献沿直线求和后，积分的闭式值为$4/[3(x^2 + z^2)^2]$。

$$\Delta\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3q\,z^3}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} = \frac{4}{3\left(x^2+z^2\right)^2} \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{2q\,z^3}{\pi\left(x^2+z^2\right)^2}$$

与集中荷载不同，应力随深度仅按1/z的比例衰减：轴线上$\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$。

$\Delta\sigma_z/(q/z)$与x/z

理论

除以z并代入x/z后，方程化为无量纲形式，每个线荷载只对应一条曲线。

这样，单一的$\Delta\sigma_z/(q/z)$曲线即可用于x/z的每一个取值。

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

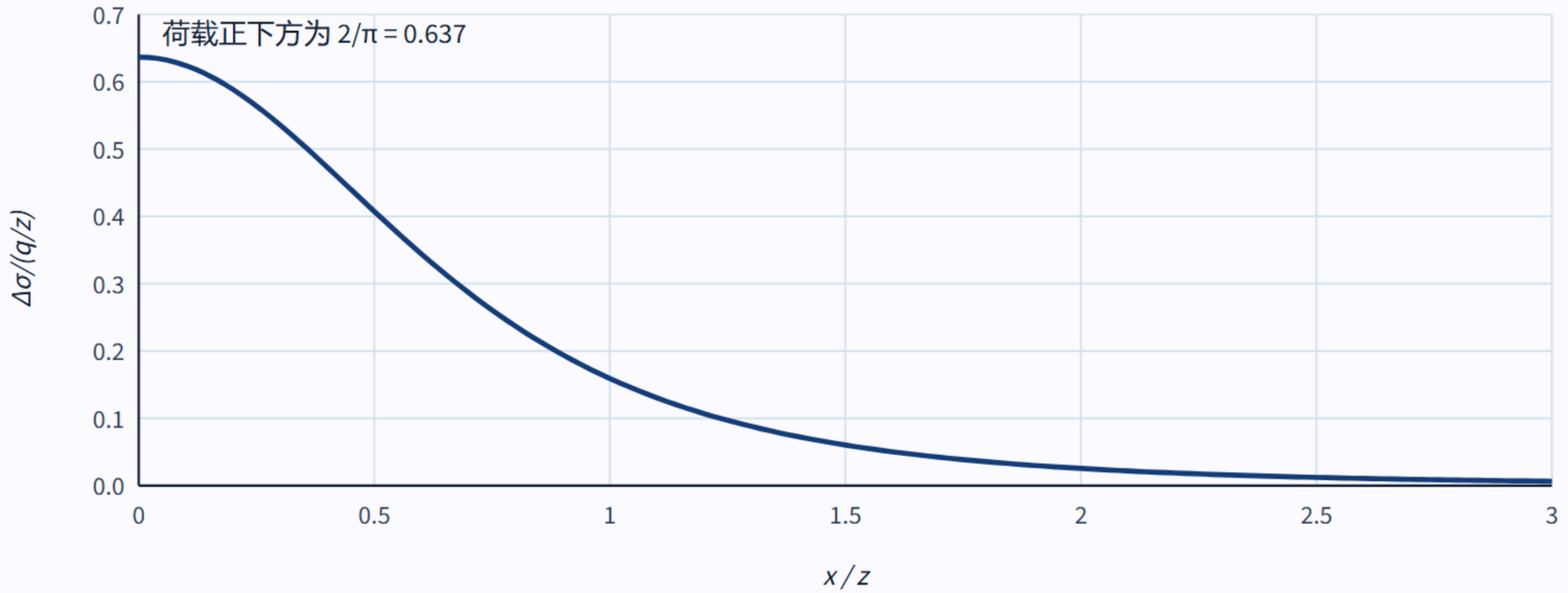
$$x=0: \qquad \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = 0.637\,\frac{q}{z}$$

$\Delta\sigma_z/(q/z)$值（模块）

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.0	0.637	1.0	0.159
0.1	0.624	1.2	0.107
0.2	0.589	1.4	0.073
0.3	0.536	1.6	0.050
0.4	0.473	1.8	0.035
0.5	0.407	2.0	0.025
0.6	0.344	2.4	0.014
0.7	0.287	2.8	0.008
0.8	0.237	3.0	0.006
0.9	0.194	3.5	0.004

$\Delta\sigma_z/(q/z)$随x/z的变化

理论



根据公式绘制的 Δσz/(q/z) 随 x/z 的变化曲线。在 x/z = 1 处，应力降至荷载正下方值的四分之一；当 x/z > 3 时，该值小于 0.01。

叠加原理

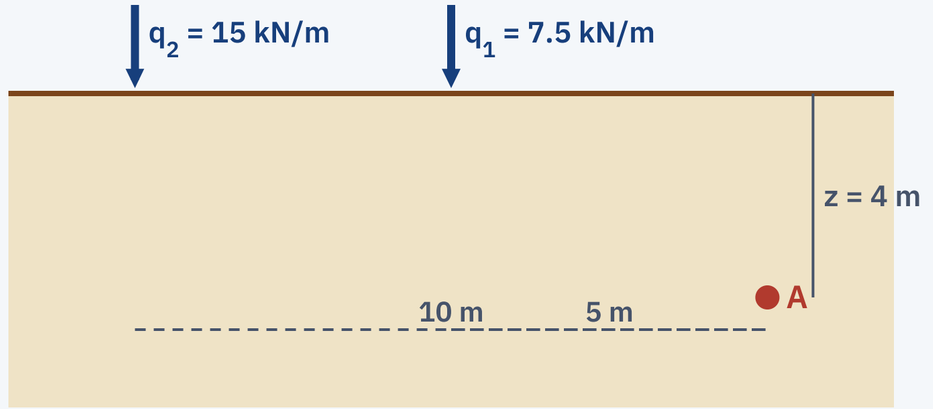
理论

由于土体为弹性，多个线荷载的应力可通过叠加原理相加。

A点处的应力等于各荷载按其到A点的各自水平距离单独作用时所产生应力之和。

模块最多接受八条平行线荷载；各荷载的大小和位置通过**添加线荷载**逐条输入，且任意两条荷载不得位于同一位置。

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{2\,q_k\,z^3}{\pi\,(x_k^2 + z^2)^2}$$



题目

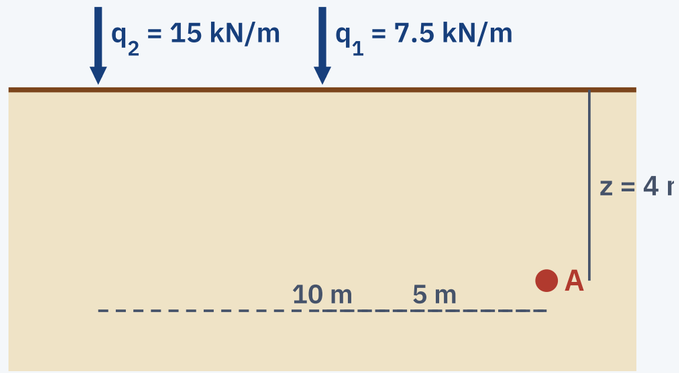
算例

已知条件

荷载	$q_1 = 7.5$ kN/m ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ kN/m ($x_L = -5$ m)
点A	$x_A = 5$ m，$z = 4$ m（距荷载1为5 m，距荷载2为10 m)
土	均质、弹性半无限介质；平面应变

求

各荷载在A点引起的$\Delta\sigma_z$，以及按叠加原理得到的总$\Delta\sigma_z$。



解答

解答

1 荷载1：x = $x_A - x_L$ = 5 − 0 = 5 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2q_1 z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(7.5)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{960}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

2 荷载2：x = 5 − (−5) = 10 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}920}{\pi\,(13{,}456)} = \mathbf{0.04542}\ \text{kPa}$$

3 叠加（土体为弹性：应力相加）

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{0.22720}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa。荷载2的数值虽为两倍，但与A点的距离也是两倍，故其产生的应力约为总值的五分之一（比值0.20）。荷载1的验算：x/z = 1.25 ⇒ 2/(π[1.25² + 1]²) = 0.09695；q_1/z = 1.875；0.09695 · 1.875 = 0.18178。模块给出相同的数值。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

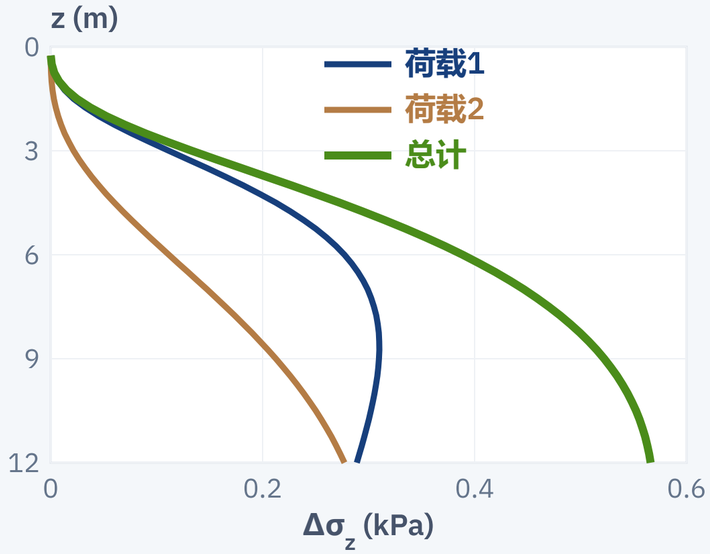
算例

已知条件

荷载	**算例1中的两个荷载：$q_1 = 7.5$ kN/m（$x_L = 0$），$q_2 = 15$ kN/m（$x_L = -5$ m）**
点	**$x_A = 5$ m；$z = 1.2$；2.4；…；12 m（模块地层剖面中的各行）**

求

各深度处的$\Delta\sigma_{z(1)}$、$\Delta\sigma_{z(2)}$及合计$\Delta\sigma_z$；z = 8 m处的详细解答；最大应力所在的深度。



解答 (1/2)

解答

1 荷载1 (x = 5 m)：z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2(7.5)(8^3)}{\pi(5^2+8^2)^2} = \frac{7{,}680}{\pi\,(7{,}921)} = \mathbf{0.30863}\ \text{kPa}$$

2 荷载2(x = 10 m)：z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(8^3)}{\pi(10^2+8^2)^2} = \frac{15{,}360}{\pi\,(26{,}896)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

3 总计

$$\Delta\sigma_z = 0.30863 + 0.18178 = \mathbf{0.49041}\ \text{kPa}$$

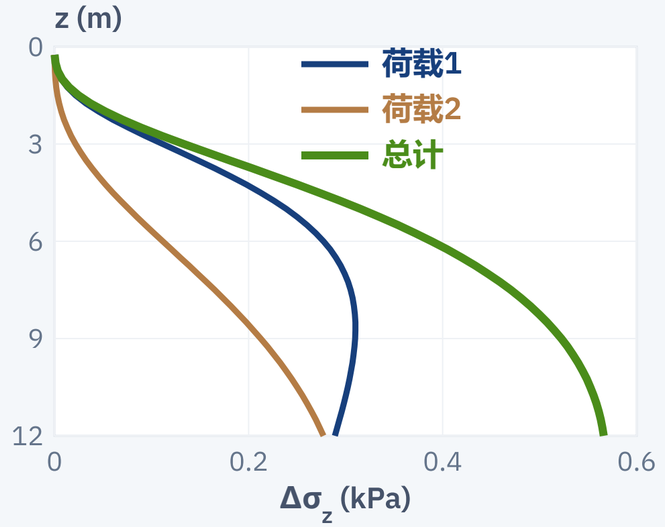
z = 8 m处$\Delta\sigma_z$ = 0.49041 kPa；比z = 4 m处的值(0.22720 kPa)大得多：A点位于两荷载旁侧，应力随深度继续增大（表格见下页）。

解答 (2/2)

解答

z (m)	$\Delta\sigma_{z(1)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(2)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$合计(kPa)
1.2	0.01180	0.00160	**0.01341**
2.4	0.06976	0.01180	**0.08156**
3.6	0.15460	0.03492	**0.18951**
4.8	0.22880	0.06976	**0.29856**
6.0	0.27716	0.11152	**0.38868**
7.2	0.30183	0.15460	**0.45643**
8.4	0.30990	0.19456	**0.50446**
9.6	0.30775	0.22880	**0.53655**
10.8	0.29981	0.25631	**0.55612**
12.0	0.28888	0.27716	**0.56604**

对于单个荷载，应力在深度z = √3·x处最大：荷载1在8.66 m处达到最大，为0.3101 kPa。两个荷载之和在12 m处仍在增大；最大总应力出现在13.1 m深度处，为0.5687 kPa。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

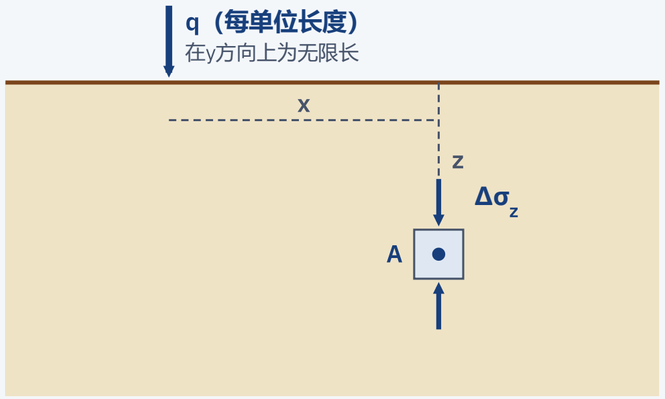
算例

已知条件

荷载	$q = 20$ kN/m，**竖向线荷载**
点	$z = 3$ m; $x = 0; 1.5; 3; 4.5; 6$ m

求

对每个点，求x/z、$\Delta\sigma_z/(q/z)$和$\Delta\sigma_z$；x = z处的值与荷载正下方的值之比。



解答 (1/2)

解答

1 荷载下方(x = 0)：x/z = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(20)}{\pi(3)} = \mathbf{4.2441}\ \text{kPa}$$

2 x = 3 m: x/z = 1

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[1^2+1\right]^2} = \frac{2}{4\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915 \cdot \frac{20}{3} = 6.6667 \cdot 0.15915 = \mathbf{1.0610}\ \text{kPa}$$

在x/z = 1的点处，应力为荷载正下方应力的**四分之一**(1.0610 / 4.2441 = 0.25)。

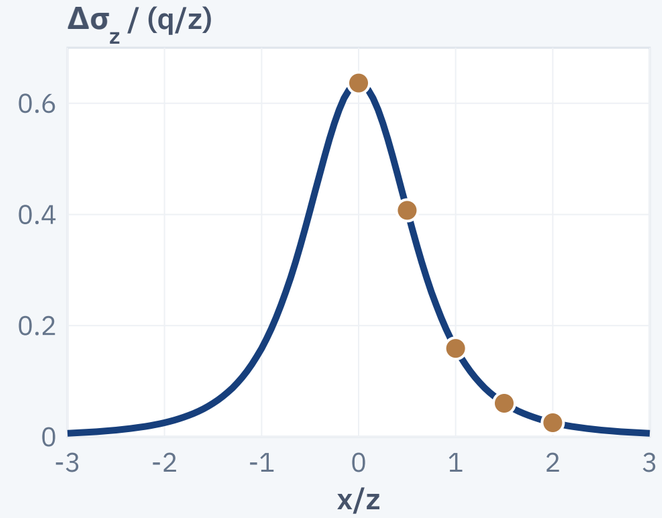
解答 (2/2)

解答

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0.0	0.0	0.63662	4.2441
1.5	0.5	0.40744	2.7162
3.0	1.0	0.15915	**1.0610**
4.5	1.5	0.06027	0.4018
6.0	2.0	0.02546	0.1698

$\Delta\sigma_z/(q/z)$仅取决于x/z：同一条曲线适用于任意q和任意z。

x/z = 2时，应力为荷载正下方应力的0.04倍(0.1698 kPa)。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

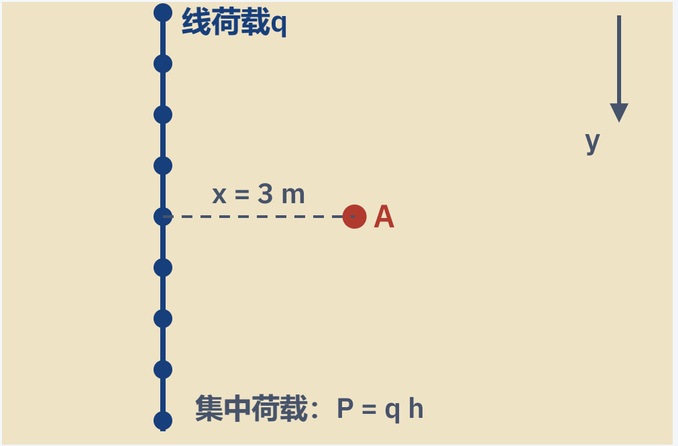
算例

已知条件

荷载	$q = 10$ kN/m；沿线按h间距布置的集中荷载$P = q\,h$（$h = 8$；4；2；1 m）
点A	$x = 3$ m，$z = 4$ m（荷载作用线的水平距离）；Boussinesq：$\Delta\sigma_z = 3Pz^3/(2\pi L^5)$

求

各集中荷载Boussinesq应力之和（h = 2 m时逐项列出）；h减小时趋近于线荷载值。



解答 (1/2)

解答

1 $P = q\,h = 10(2) = 20$ kN；对每个荷载，$L_k^2 = x^2 + y_k^2 + z^2 = 9 + y_k^2 + 16$

k	y_k (m)	$L_k^2 = 25 + y_k^2$	L_k (m)	$\Delta\sigma_{z,k}$ (kPa)	荷载数量
0	0	25	5.000	0.19557	1
1	2	29	5.385	0.13494	2 (±k)
2	4	41	6.403	0.05678	2 (±k)
3	6	61	7.810	0.02103	2 (±k)
4	8	89	9.434	0.00818	2 (±k)
5	10	125	11.180	0.00350	2 (±k)

算例各项：k = 0时，$\Delta\sigma_{z,0} = 3(20)(4^3)/[2\pi(5)^5] = 0.19557$ kPa；$|k| \le 5$各项之和为0.64443 kPa，$|k| \ge 6$的余项为0.00748 kPa。

解答 (2/2)

解答

h (m)	P = q h (kN)	各集中荷载的$\Delta\sigma_z$之和(kPa)	差值(%)
8	80	0.852175	30.72
4	40	0.660644	1.34
2	20	0.651907	0.0013
1	10	0.651899	< 0.0001
线荷载		**0.651899**	0

对于线荷载，$\Delta\sigma_z = 2q\,z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = 2(10)(4^3)/[\pi(25)^2] =$ **0.651899 kPa**。集中荷载按h ≤ z/2这样的密间距布置时，总和与该值非常接近（h = 2 m时：0.651907 kPa）；而在h = 8 m这样的稀疏间距下，差异很大。这表明线荷载公式是一排集中荷载的积分。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

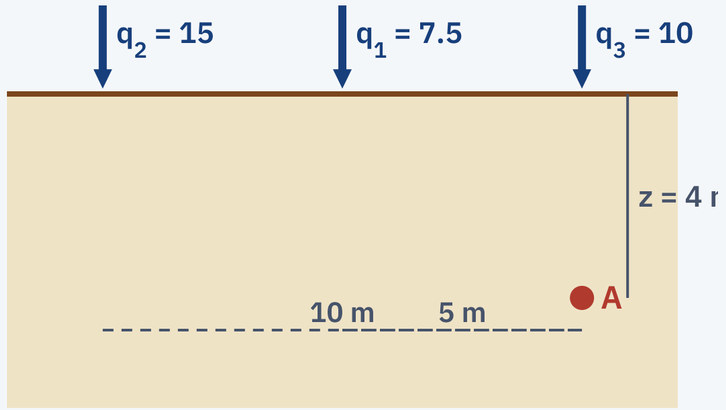
算例

已知条件

荷载	$q_1 = 7.5$ kN/m ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ kN/m ($x_L = -5$ m); $q_3 = 10$ kN/m ($x_L = 5$ m)
点	A：$x_A = 5$ m，$z = 4$ m（位于荷载3正下方）；$z = 4$ m处为$x = -7.5 \ldots 7.5$ m

求

A点处各荷载的贡献及总$\Delta\sigma_z$；深度z = 4 m处沿x方向的总应力。



解答 (1/2)

解答

1 荷载3(x = 5 − 5 = 0)：A点位于荷载正下方

$$\Delta\sigma_{z(3)} = \frac{2q_3}{\pi z} = \frac{2(10)}{\pi(4)} = \mathbf{1.59155}\ \text{kPa}$$

2 荷载1(x = 5 m)和荷载2(x = 10 m)：算例1中的数值

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542\ \text{kPa}$$

3 叠加原理

$$\Delta\sigma_z = 1.59155 + 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{1.81875}\ \text{kPa}$$

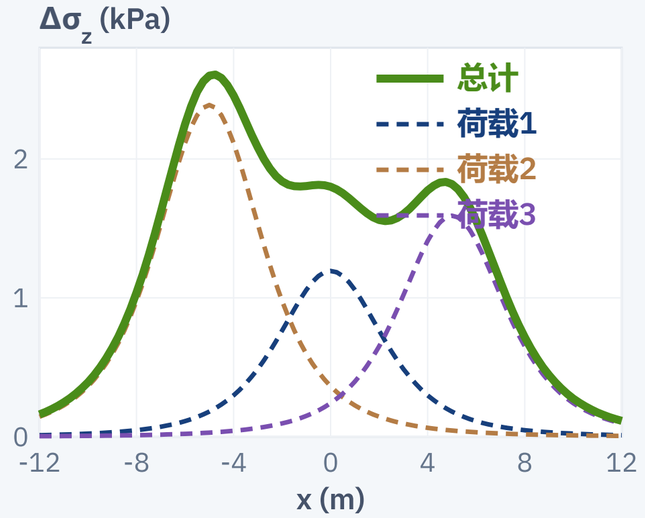
荷载3占总量的**87.5%**：在线荷载下方，其自身产生的应力占主导，较远荷载的贡献很小。第三个荷载在算例1的0.2272 kPa上增加了1.592 kPa。

解答 (2/2)

解答

x (m)	荷载1	荷载2	荷载3	$\Delta\sigma_z$合计(kPa)
−7.5	0.0585	1.2345	0.0137	1.3068
−5.0	0.1818	2.3873	0.0303	2.5994
−2.5	0.6173	1.2345	0.0781	1.9298
0.0	1.1937	0.3636	0.2424	1.7996
2.5	0.6173	0.1171	0.8230	1.5573
5.0	0.1818	0.0454	1.5915	**1.8188**
7.5	0.0585	0.0206	0.8230	0.9021

总曲线在每个荷载附近各出现一个峰值(x ≈ −4.75; −0.50; 4.75 m)；受相邻荷载影响曲线尾部的影响，峰值位置略有偏移。最高峰值出现在最大荷载（荷载2，15 kN/m）附近：x = −5 m处为**2.5994 kPa**；A点(x = 5 m)处为1.8188 kPa。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

荷载	**线荷载**$q = 50$ **kN/m**；**集中荷载**$P = 50$ **kN**
点	**荷载下方**$(x = 0, r = 0)$；$z = 1$；2；3；5；10 **m**

求

两种荷载类型下轴线下方的$\Delta\sigma_z$及其随深度的衰减速率。

解答

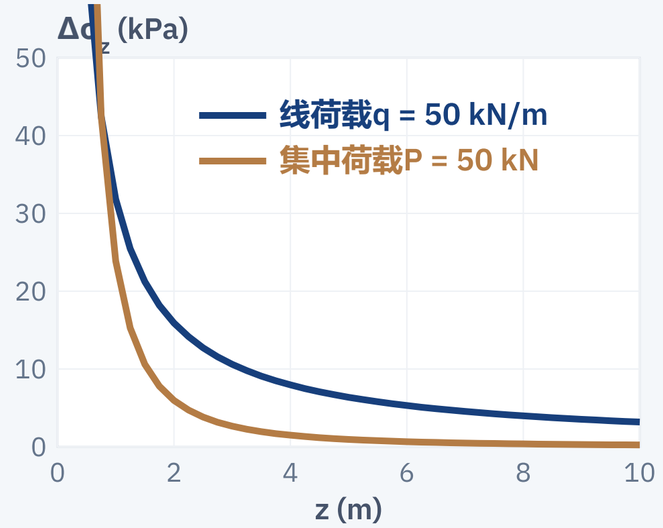
解答

1 z = 5 m

线荷载：$\Delta\sigma_z = \dfrac{2q}{\pi z} = \dfrac{2(50)}{\pi(5)} = \mathbf{6.366}$ kPa

单个：$\Delta\sigma_z = \dfrac{3}{2\pi}\dfrac{P}{z^2} = 0.4775\,\dfrac{50}{5^2} = \mathbf{0.955}$ kPa

z (m)	线荷载：2q/(πz) (kPa)	集中荷载：0.4775 P/z² (kPa)	比值
1	31.831	23.873	1.3
2	15.915	5.968	2.7
3	10.610	2.653	4.0
5	6.366	0.955	6.7
10	3.183	0.239	13.3



z由1变为10 m时，线荷载应力衰减**10倍**(31.83 → 3.18 kPa)，集中荷载应力衰减**100倍**(23.87 → 0.24 kPa)。

在GeoTerva中验算解答 ↗

小结

要点回顾

线荷载（平面应变）：$\Delta\sigma_z = 2q\,z^3/[\pi(x^2+z^2)^2] = (q/z)\cdot 2/\{\pi[(x/z)^2+1]^2\}$；荷载正下方$\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\,q/z$

一排集中荷载：将$dP = q\,dy$各集中荷载产生的Boussinesq应力叠加；间距$h = 2$ m的集中荷载给出0.65191 kPa，线荷载给出0.65190 kPa

算例($q_1 = 7.5$ kN/m, $q_2 = 15$ kN/m; A: $x = 5$, $z = 4$ m)：$\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178$；$\Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542$；**$\Delta\sigma_z = 0.22720$ kPa**

无量纲曲线：$x/z = 1$时的值为荷载正下方值的四分之一；**叠加**：各荷载的应力按各自的水平距离求得后叠加（三个荷载时A点为1.8188 kPa）

深度：荷载下方应力随$1/z$衰减（集中荷载下为$1/z^2$）；荷载侧旁一点的应力在深度$z = \sqrt{3}\cdot x$以内一直增大

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels... Gauthier-Villars, Paris.

注

全部数值算例均由模块自身的计算引擎生成；模块给出相同的数值。模块打开时的默认输入为两条线荷载（7.5和15 kN/m）以及A点(x = 5 m, z = 4 m)。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入自己的线荷载、其位置和计算点；模块一并给出各荷载的贡献、总$\Delta\sigma_z$值、深度剖面、等应力曲线、分步解答和报告。

打开模块→

理论页面 →

用手机打开

试用模块无需注册。

如需在课堂教学中使用：info@geoterva.com