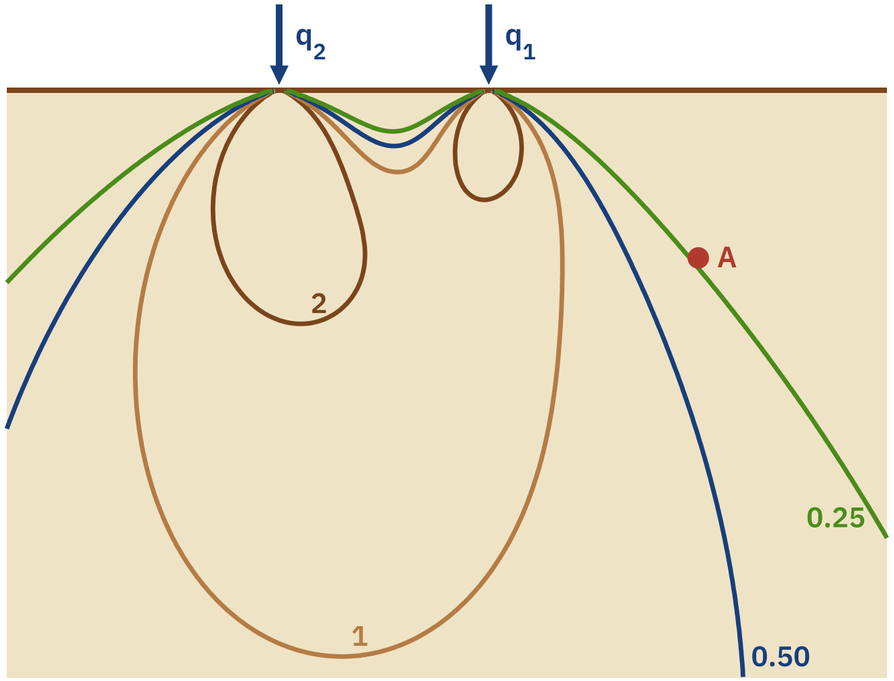
Презентация к лекции по геотехнике · Распределение напряжений в грунте

Напряжение под вертикальной линейной нагрузкой

Лекция: вертикальное напряжение, создаваемое в грунте вертикальной линейной нагрузкой на поверхности; начальная точка решается вручную от начала до конца, профили по глубине и в горизонтальном направлении приводятся в таблицах.

Плоская деформация | Безразмерная кривая | Суперпозиция | Ряд сосредоточенных нагрузок | Изолинии напряжений



Что мы изучим на этой лекции?

Линейная нагрузка при **плоской деформации**: напряжение зависит только от горизонтального расстояния **x** до линии нагрузки и от глубины **z**

Вывод соотношения $\Delta\sigma_z = 2qz^3/[\pi(x^2 + z^2)^2]$ суммированием линейной нагрузки как **ряда сосредоточенных нагрузок**

Отличие от сосредоточенной нагрузки: под осью нагрузки напряжение убывает лишь как **1/z**, $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$

Безразмерная форма: единая кривая $\Delta\sigma_z/(q/z)$ и таблица x/z; **суперпозиция** для нескольких параллельных нагрузок

Начальный пример модуля (две линейные нагрузки) **от начала до конца вручную**; изменение по глубине и по горизонтали — в таблицах

ХОД ЛЕКЦИИ

Каждая тема излагается **в три шага**:

1 · **Теория**: формула и обоснование

2 · **Условие**: дано и требуется определить

3 · **Решение**: пошагово, с числами

Пример: q_1 = 7.5 kN/m (x = 0) и q_2 = 15 kN/m (x = −5 m); точка A: x = 5 m, z = 4 m.

Нагрузка на единицу длины вдоль бесконечной линии

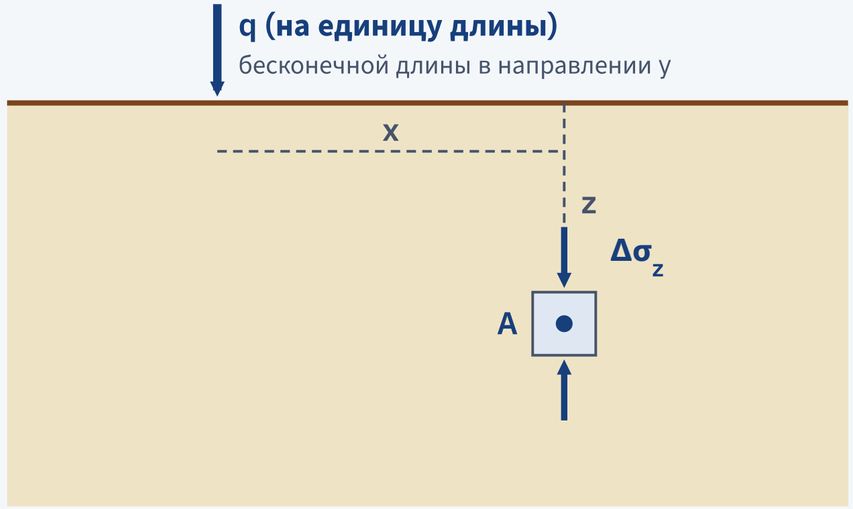
ТЕОРИЯ

Линейная нагрузка — это нагрузка интенсивностью q на единицу длины, действующая на поверхности вдоль бесконечно длинной прямой: длинная стена, рельс или полоса, настолько узкая, что её шириной можно пренебречь.

Поскольку каждое сечение, перпендикулярное прямой, нагружено одинаково, напряжения находятся в состоянии **плоской деформации** и зависят только от горизонтального расстояния x и глубины z.

Нагрузка гибкая, вертикальная и бесконечно протяжённая в направлении y; грунт принят однородным, изотропным, линейно-упругим полупространством.

$\Delta\sigma_z$ — приращение, вызванное нагрузкой; собственный вес вышележащего грунта (бытовое давление) в него не включён.



От ряда сосредоточенных нагрузок к линейной

ТЕОРИЯ

Линейную нагрузку можно рассматривать как ряд сосредоточенных нагрузок dP = q dy, расположенных вдоль y.

Каждая сосредоточенная нагрузка даёт напряжение по Boussinesq при $r^2 = x^2 + y^2$; при суммировании этих вкладов вдоль прямой замкнутое значение интеграла равно $4/[3(x^2 + z^2)^2]$.

$$\Delta\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3q\,z^3}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} = \frac{4}{3\left(x^2+z^2\right)^2} \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{2q\,z^3}{\pi\left(x^2+z^2\right)^2}$$

В отличие от сосредоточенной нагрузки напряжение убывает с глубиной лишь как 1/z: на оси $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$.

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ и x/z

ТЕОРИЯ

При делении на z и подстановке x/z уравнение принимает безразмерный вид, дающий для каждой линейной нагрузки единую кривую.

Таким образом, одна кривая **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** используется для любого значения x/z.

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

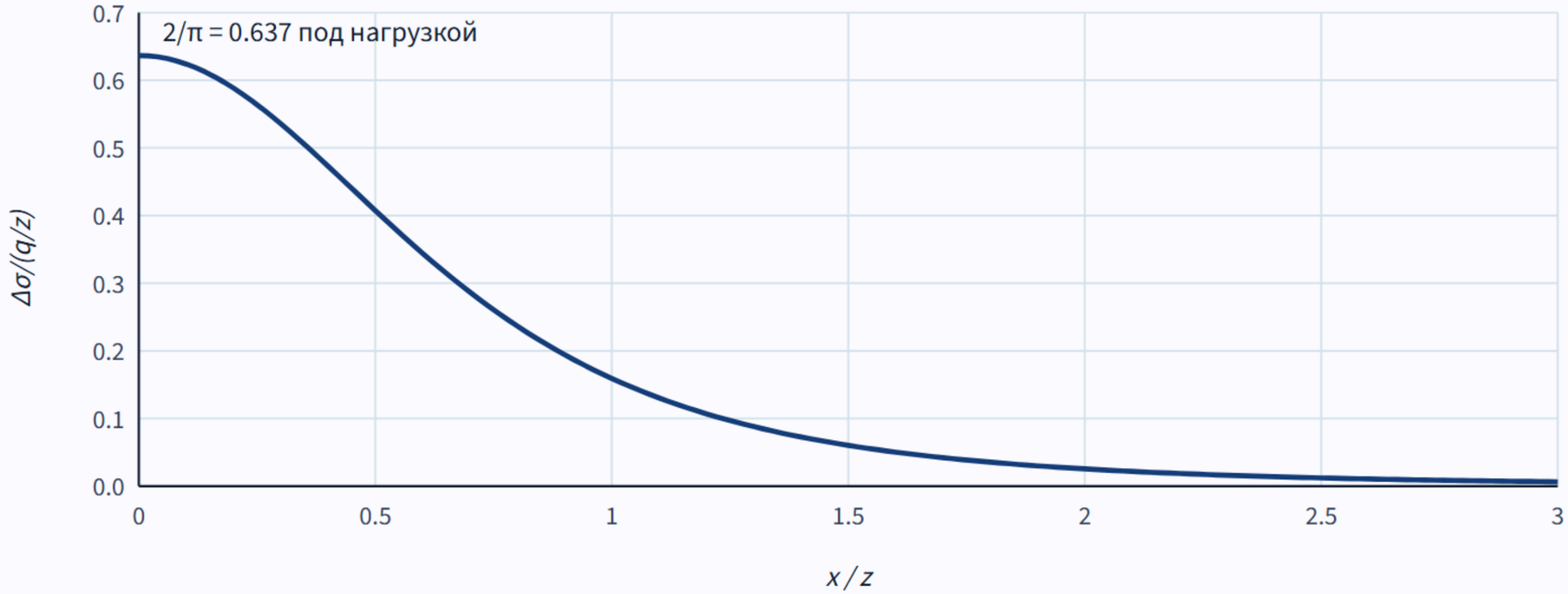
$$x = 0: \qquad \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = 0.637\,\frac{q}{z}$$

ЗНАЧЕНИЯ $\Delta\sigma_z/(q/z)$ (МОДУЛЬ)

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.0	0.637	1.0	0.159
0.1	0.624	1.2	0.107
0.2	0.589	1.4	0.073
0.3	0.536	1.6	0.050
0.4	0.473	1.8	0.035
0.5	0.407	2.0	0.025
0.6	0.344	2.4	0.014
0.7	0.287	2.8	0.008
0.8	0.237	3.0	0.006
0.9	0.194	3.5	0.004

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ в зависимости от x/z

ТЕОРИЯ



Зависимость Δσz/(q/z) от x/z, рассчитанная по формуле. При x/z = 1 значение составляет четверть от значения под нагрузкой; при x/z > 3 оно ниже 0.01.

Суперпозиция

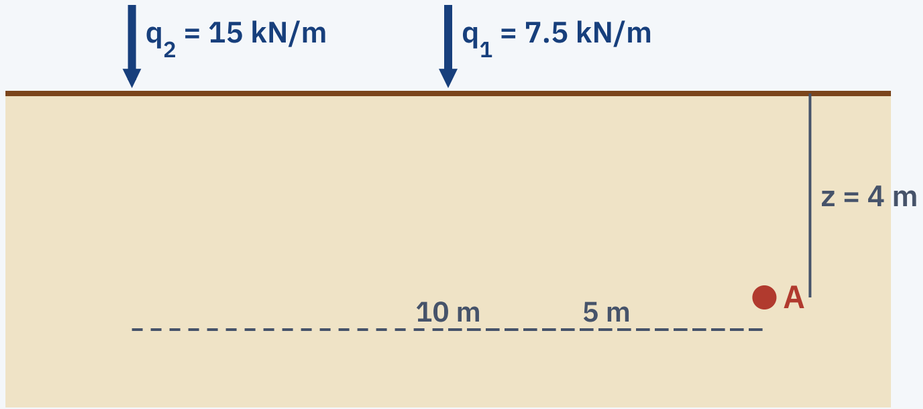
ТЕОРИЯ

Так как грунт упругий, напряжения от нескольких линейных нагрузок суммируются по принципу суперпозиции.

Напряжение в точке A равно сумме напряжений, создаваемых каждой нагрузкой по отдельности при её собственном горизонтальном расстоянии до точки A.

Модуль принимает не более восьми параллельных линейных нагрузок; нагрузки вводятся по одной с указанием интенсивности и положения через **Добавить линейную нагрузку**, и никакие две из них не могут находиться в одном положении.

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{2\,q_k\,z^3}{\pi\,(x_k^2 + z^2)^2}$$



Условие

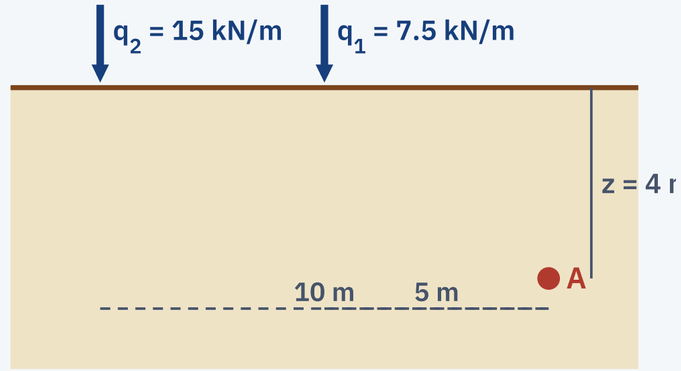
ПРИМЕР

Дано

Нагрузки	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ **kN/m** ($x_L = -5$ **m**)
Точка A	$x_A = 5$ **m**, $z = 4$ **m (на расстоянии** 5 **m от нагрузки 1,** 10 **m от нагрузки 2)**
Грунт	**однородная упругая полубесконечная среда; плоская деформация**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

$\Delta\sigma_z$ от каждой нагрузки в точке A и суммарное **$\Delta\sigma_z$** по принципу суперпозиции.



Решение

РЕШЕНИЕ

1 Нагрузка 1: x = $x_A - x_L$ = 5 − 0 = 5 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2q_1 z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(7.5)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{960}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

2 Нагрузка 2: x = 5 − (−5) = 10 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}920}{\pi\,(13{,}456)} = \mathbf{0.04542}\ \text{kPa}$$

3 Суперпозиция (грунт упругий: напряжения суммируются)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{0.22720}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa. Хотя нагрузка 2 вдвое больше, она вдвое дальше от точки A, поэтому создаваемое ею напряжение составляет примерно одну пятую суммарного (отношение 0.20). Проверка для нагрузки 1: x/z = 1.25 ⇒ 2/(π[1.25² + 1]²) = 0.09695; q_1/z = 1.875; 0.09695 · 1.875 = 0.18178. Модуль даёт то же значение.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

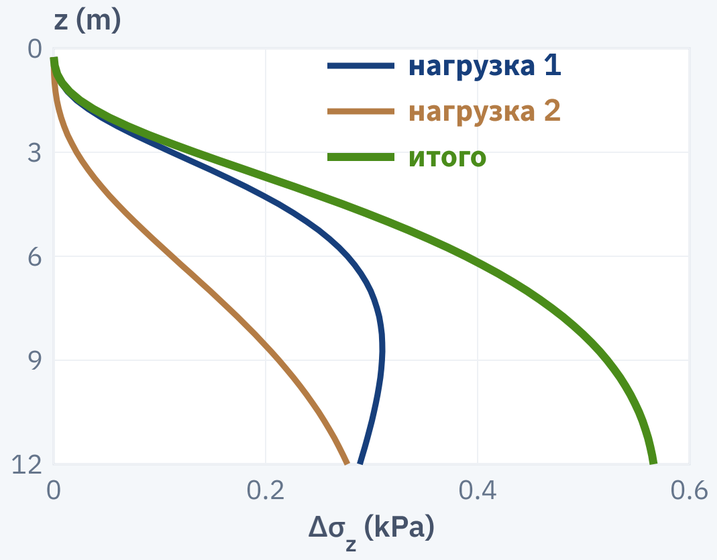
ПРИМЕР

Дано

Нагрузки	**Две нагрузки из примера 1: $q_1 = 7.5$ kN/m ($x_L = 0$), $q_2 = 15$ kN/m ($x_L = -5$ m)**
Точки	**$x_A = 5$ m; $z = 1.2; 2.4;$ ...; 12 m (строки профиля модуля)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Для каждой глубины: **$\Delta\sigma_{z(1)}$**, **$\Delta\sigma_{z(2)}$** и суммарное **$\Delta\sigma_z$**; подробное решение для z = 8 m; глубина наибольшего напряжения.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Нагрузка 1 (x = 5 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2(7.5)(8^3)}{\pi(5^2+8^2)^2} = \frac{7{,}680}{\pi\,(7{,}921)} = \mathbf{0.30863}\ \text{kPa}$$

2 Нагрузка 2 (x = 10 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(8^3)}{\pi(10^2+8^2)^2} = \frac{15{,}360}{\pi\,(26{,}896)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

3 Итого

$$\Delta\sigma_z = 0.30863 + 0.18178 = \mathbf{0.49041}\ \text{kPa}$$

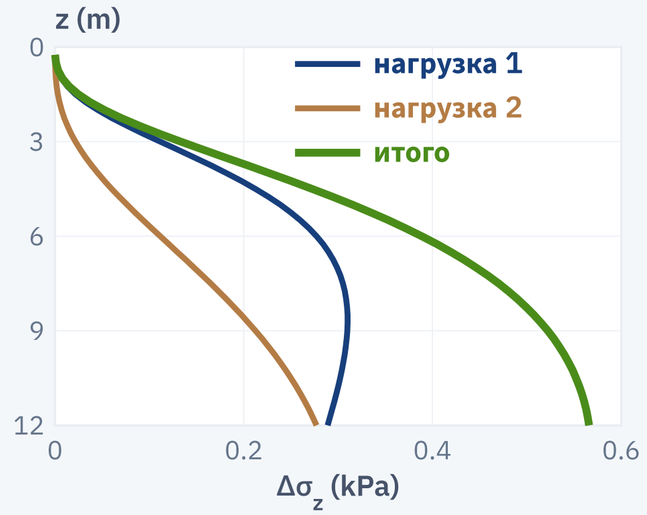
При z = 8 m $\Delta\sigma_z$ = 0.49041 kPa; это намного больше значения при z = 4 m (0.22720 kPa): точка A расположена рядом с нагрузками, и напряжение продолжает возрастать с глубиной (таблица — на следующей странице).

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

z (m)	$\Delta\sigma_{z(1)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(2)}$ (kPa)	Суммарное $\Delta\sigma_z$ (kPa)
1.2	0.01180	0.00160	**0.01341**
2.4	0.06976	0.01180	**0.08156**
3.6	0.15460	0.03492	**0.18951**
4.8	0.22880	0.06976	**0.29856**
6.0	0.27716	0.11152	**0.38868**
7.2	0.30183	0.15460	**0.45643**
8.4	0.30990	0.19456	**0.50446**
9.6	0.30775	0.22880	**0.53655**
10.8	0.29981	0.25631	**0.55612**
12.0	0.28888	0.27716	**0.56604**

Для одной нагрузки напряжение максимально на глубине $z = \sqrt{3}\cdot x$: для нагрузки 1 — на 8.66 m (0.3101 kPa). Сумма двух нагрузок на 12 m всё ещё возрастает; наибольшее суммарное значение 0.5687 kPa достигается на глубине 13.1 m.



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

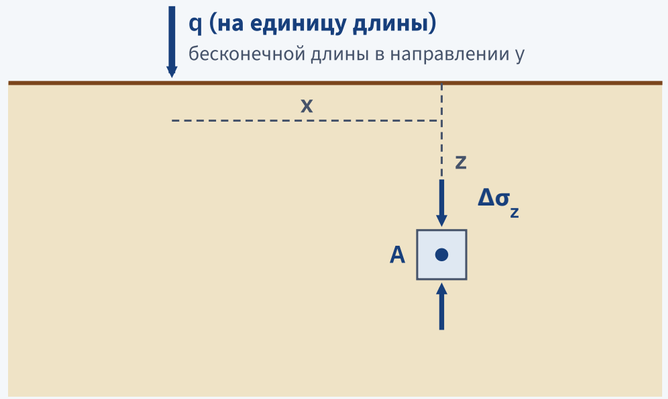
ПРИМЕР

Дано

Нагрузка	$q = 20$ **kN/m, вертикальная линейная нагрузка**
Точки	$z = 3$ **m;** $x = 0; 1.5; 3; 4.5; 6$ **m**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Для каждой точки — **x/z**, **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** и **$\Delta\sigma_z$**; отношение значения в точке x = z к значению под нагрузкой.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Под нагрузкой (x = 0): x/z = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(20)}{\pi(3)} = \mathbf{4.2441}\ \text{kPa}$$

2 x = 3 m: x/z = 1

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[1^2+1\right]^2} = \frac{2}{4\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915 \cdot \frac{20}{3} = 6.6667 \cdot 0.15915 = \mathbf{1.0610}\ \text{kPa}$$

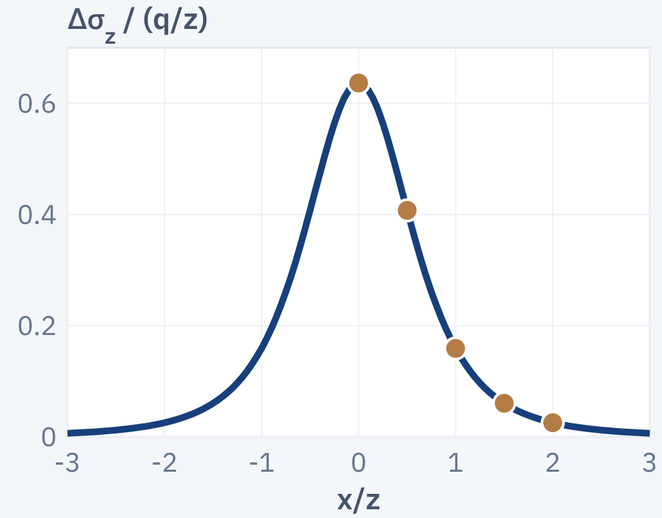
В точке x/z = 1 напряжение составляет **четверть** напряжения под нагрузкой (1.0610 / 4.2441 = 0.25).

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0.0	0.0	0.63662	4.2441
1.5	0.5	0.40744	2.7162
3.0	1.0	0.15915	**1.0610**
4.5	1.5	0.06027	0.4018
6.0	2.0	0.02546	0.1698

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ зависит только от x/z: одна и та же кривая используется для любых q и любых z. При x/z = 2 напряжение составляет 0.04 от напряжения под нагрузкой (0.1698 kPa).



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

ПРИМЕР

Дано

Нагрузка	$q = 10$ **kN/m; сосредоточенные нагрузки** $P = q\,h$ **вдоль линии с шагом** h **(**$h = 8; 4; 2; 1$ **m)**
Точка A	$x = 3$ **m,** $z = 4$ **m (горизонтальное расстояние до линии); Boussinesq:** $\Delta\sigma_z = 3Pz^3/(2\pi L^5)$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Сумма напряжений Boussinesq от сосредоточенных нагрузок (по слагаемым для h = 2 m); приближение к значению для линейной нагрузки при уменьшении h.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 $P = q\,h = 10(2) = 20$ kN; для каждой нагрузки $L_k^2 = x^2 + y_k^2 + z^2 = 9 + y_k^2 + 16$

k	y_k (m)	$L_k^2 = 25 + y_k^2$	L_k (m)	$\Delta\sigma_{z,k}$ (kPa)	Сколько нагрузок
0	0	25	5.000	0.19557	1
1	2	29	5.385	0.13494	2 (±k)
2	4	41	6.403	0.05678	2 (±k)
3	6	61	7.810	0.02103	2 (±k)
4	8	89	9.434	0.00818	2 (±k)
5	10	125	11.180	0.00350	2 (±k)

Примеры слагаемых: $k = 0$: $\Delta\sigma_{z,0} = 3(20)(4^3)/[2\pi(5)^5] = 0.19557$ kPa; сумма при $|k| \le 5$ равна 0.64443 kPa, остаток при $|k| \ge 6$ составляет 0.00748 kPa.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

h (m)	P = q h (kN)	Сумма $\Delta\sigma_z$ от сосредоточенных нагрузок (kPa)	Разница (%)
8	80	0.852175	30.72
4	40	0.660644	1.34
2	20	0.651907	0.0013
1	10	0.651899	< 0.0001
линейная нагрузка		**0.651899**	0

Для линейной нагрузки $\Delta\sigma_z = 2q\,z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = 2(10)(4^3)/[\pi(25)^2] =$ **0.651899 kPa**. Когда сосредоточенные силы расположены часто, например при $h \le z/2$, их сумма очень близка к этому значению (h = 2 m: 0.651907 kPa); при редком шаге, например h = 8 m, разница велика. Это показывает, что формула для линейной нагрузки является интегралом ряда сосредоточенных сил.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

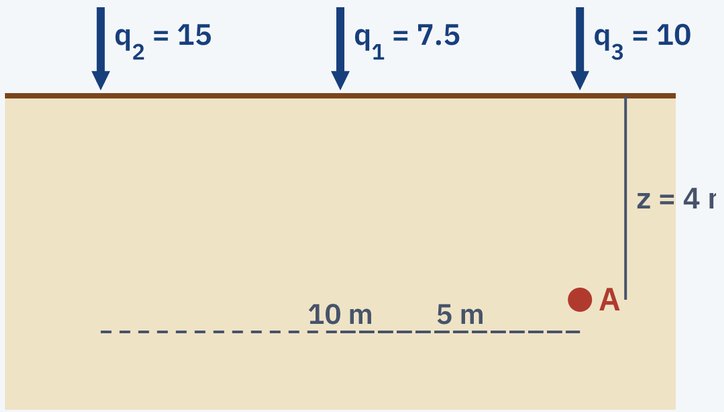
ПРИМЕР

Дано

Нагрузки	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ **kN/m** ($x_L = -5$ **m**); $q_3 = 10$ **kN/m** ($x_L = 5$ **m**)
Точки	**A:** $x_A = 5$ **m**, $z = 4$ **m (точно под нагрузкой 3); при** $z = 4$ **m:** $x = -7.5$ **…** 7.5 **m**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Вклад каждой нагрузки в точке A и суммарное $\Delta\sigma_z$; суммарное напряжение вдоль x на глубине z = 4 m.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Нагрузка 3 (x = 5 − 5 = 0): A находится точно под нагрузкой

$$\Delta\sigma_{z(3)} = \frac{2q_3}{\pi z} = \frac{2(10)}{\pi(4)} = \mathbf{1.59155}\ \text{kPa}$$

2 Нагрузка 1 (x = 5 m) и нагрузка 2 (x = 10 m): значения из примера 1

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542\ \text{kPa}$$

3 Суперпозиция

$$\Delta\sigma_z = 1.59155 + 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{1.81875}\ \text{kPa}$$

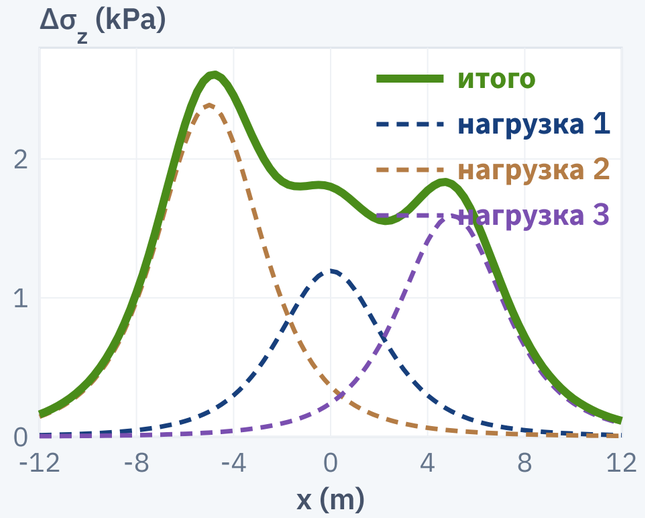
Нагрузка 3 даёт **87.5 процента** суммы: под линейной нагрузкой доминирует её собственное напряжение, а удалённые нагрузки вносят небольшой вклад. Третья нагрузка добавляет 1.592 kPa к значению 0.2272 kPa из Примера 1.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

x (m)	Нагрузка 1	Нагрузка 2	Нагрузка 3	Суммарное $\Delta\sigma_z$ (kPa)
−7.5	0.0585	1.2345	0.0137	1.3068
−5.0	0.1818	2.3873	0.0303	2.5994
−2.5	0.6173	1.2345	0.0781	1.9298
0.0	1.1937	0.3636	0.2424	1.7996
2.5	0.6173	0.1171	0.8230	1.5573
5.0	0.1818	0.0454	1.5915	**1.8188**
7.5	0.0585	0.0206	0.8230	0.9021

Суммарная кривая даёт пик вблизи каждой нагрузки (x ≈ −4.75; −0.50; 4.75 m); пики немного смещаются из-за влияния «хвостов» соседних нагрузок. Наибольший пик расположен вблизи самой интенсивной нагрузки (нагрузка 2, 15 kN/m): **2.5994 kPa** при x = −5 m; в точке A (x = 5 m) — 1.8188 kPa.



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

ПРИМЕР

Дано

Нагрузки	**линейная нагрузка $q = 50$ kN/m; сосредоточенная нагрузка $P = 50$ kN**
Точки	**под нагрузкой ($x = 0$, $r = 0$); $z = 1; 2; 3; 5; 10$ m**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

$\Delta\sigma_z$ под осью для двух видов нагрузки и скорость убывания с глубиной.

Решение

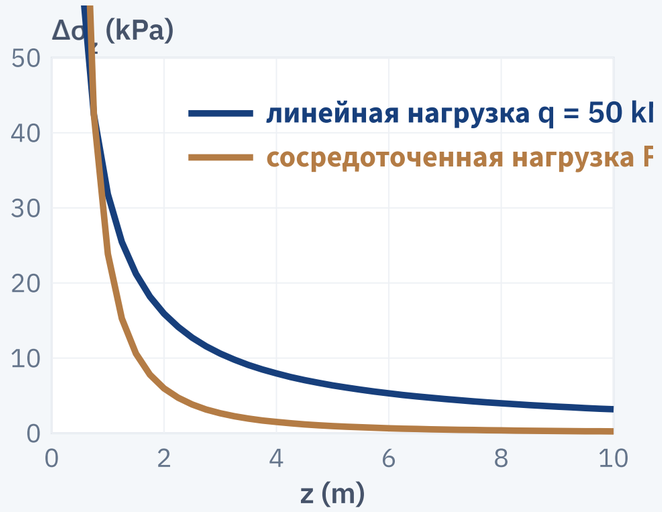
РЕШЕНИЕ

1 z = 5 m

$$\text{линейная: } \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(50)}{\pi(5)} = \mathbf{6.366}\ \text{kPa}$$

$$\text{одиночная: } \Delta\sigma_z = \frac{3}{2\pi}\frac{P}{z^2} = 0.4775\,\frac{50}{5^2} = \mathbf{0.955}\ \text{kPa}$$

z (m)	Линейная: 2q/(πz) (kPa)	Сосредоточенная: 0.4775 P/z² (kPa)	Отношение
1	31.831	23.873	1.3
2	15.915	5.968	2.7
3	10.610	2.653	4.0
5	6.366	0.955	6.7
10	3.183	0.239	13.3



Когда z изменяется 1 → 10 m, напряжение от линейной нагрузки уменьшается в **10 раз** (31.83 → 3.18 kPa), а напряжение от сосредоточенной нагрузки — в **100 раз** (23.87 → 0.24 kPa).

Проверить решение в GeoTerva ↗

Резюме

Главное

Линейная нагрузка (плоская деформация): $\Delta\sigma_z = 2q\, z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = (q/z) \cdot 2/\{\pi[(x/z)^2 + 1]^2\}$; под нагрузкой $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\, q/z$

Ряд сосредоточенных нагрузок: суммируются напряжения Boussinesq от сосредоточенных нагрузок $dP = q\, dy$; сосредоточенные нагрузки с шагом $h = 2$ m дают 0.65191 kPa, линейная нагрузка — 0.65190 kPa

Пример ($q_1 = 7.5$ kN/m, $q_2 = 15$ kN/m; A: $x = 5$, $z = 4$ m): $\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178$; $\Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542$; $\boldsymbol{\Delta\sigma_z = 0.22720}$ **kPa**

Безразмерная кривая: при $x/z = 1$ значение составляет одну четверть значения под нагрузкой; **суперпозиция**: напряжение от каждой нагрузки находится при её собственном горизонтальном расстоянии, и результаты суммируются (для трёх нагрузок в точке A — 1.8188 kPa)

Глубина: под нагрузкой напряжение убывает как $1/z$ (как $1/z^2$ при сосредоточенной нагрузке); в точке рядом с нагрузкой напряжение возрастает до глубины $z = \sqrt{3} \cdot x$

Список литературы

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels… Gauthier-Villars, Paris.

ПРИМЕЧАНИЕ

Все числовые примеры получены с помощью собственного расчётного ядра модуля; модуль даёт те же значения. Модуль открывается с двумя линейными нагрузками (7.5 и 15 kN/m) и точкой A (x = 5 m, z = 4 m).

GeoTerva

Геотехнические расчёты онлайн

От теории к практике

В GeoTerva вводятся собственные линейные нагрузки, их положение и точка; модуль выдаёт вклад каждой нагрузки, суммарное значение $\Delta\sigma_z$, профиль по глубине, изолинии напряжений, пошаговое решение и отчёт.

Открыть модуль →

Страница теории →

Открыть на телефоне

Для пробных модулей регистрация не требуется.