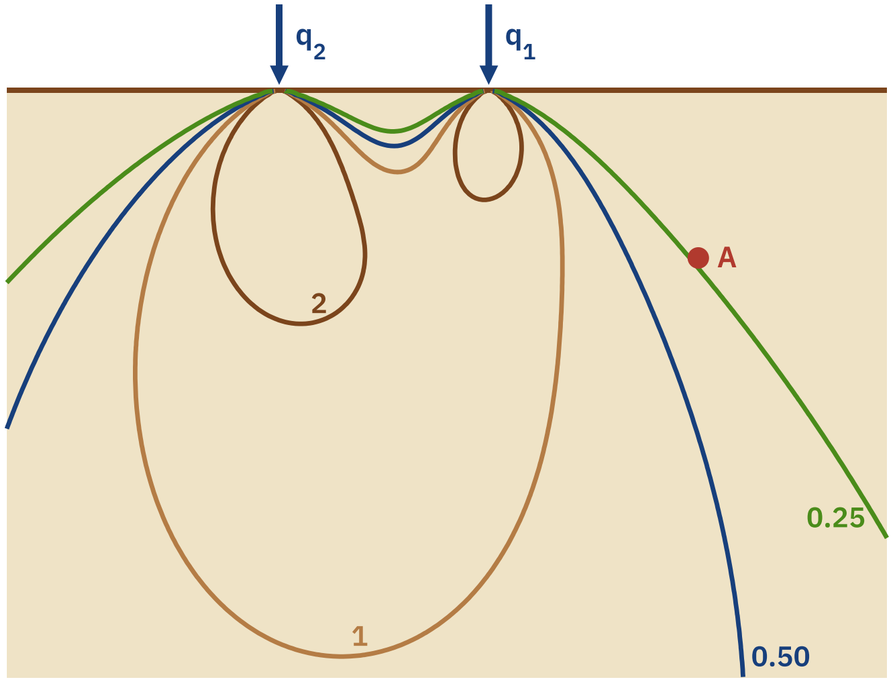
Apresentação de aula de geotecnia · Distribuição de tensões no solo

Tensão sob uma carga linear vertical

Aula: tensão vertical produzida no solo por uma carga linear vertical na superfície; o ponto inicial resolvido à mão de ponta a ponta, perfis em profundidade e laterais apresentados em tabelas.

- Estado plano de deformação
- Curva adimensional
- Superposição
- Sequência de cargas pontuais
- Curvas de isotensão



Baseia-se na página de teoria do GeoTerva · geoterva.com

Introdução

O que veremos nesta aula?

A carga linear em **estado plano de deformação**: a tensão depende apenas da distância horizontal **x**, medida a partir da vertical que passa pela carga, e da profundidade **z**

Somando a carga linear como uma **série de cargas concentradas**, obter a relação $\Delta\sigma_z = 2qz^3/[\pi(x^2 + z^2)^2]$

Diferença em relação à carga pontual: sob o eixo da carga, a tensão diminui apenas com **1/z**, $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$

Forma adimensional: uma única curva $\Delta\sigma_z/(q/z)$ e uma tabela de x/z; **superposição** para várias cargas paralelas

O exemplo inicial do módulo (duas cargas lineares) **de ponta a ponta, à mão**; variação com a profundidade e lateral em tabelas

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: fórmula e justificativa

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Exemplo: q_1 = 7.5 kN/m (x = 0) e q_2 = 15 kN/m (x = −5 m); ponto A: x = 5 m, z = 4 m.

Carga por unidade de comprimento ao longo de uma linha infinita

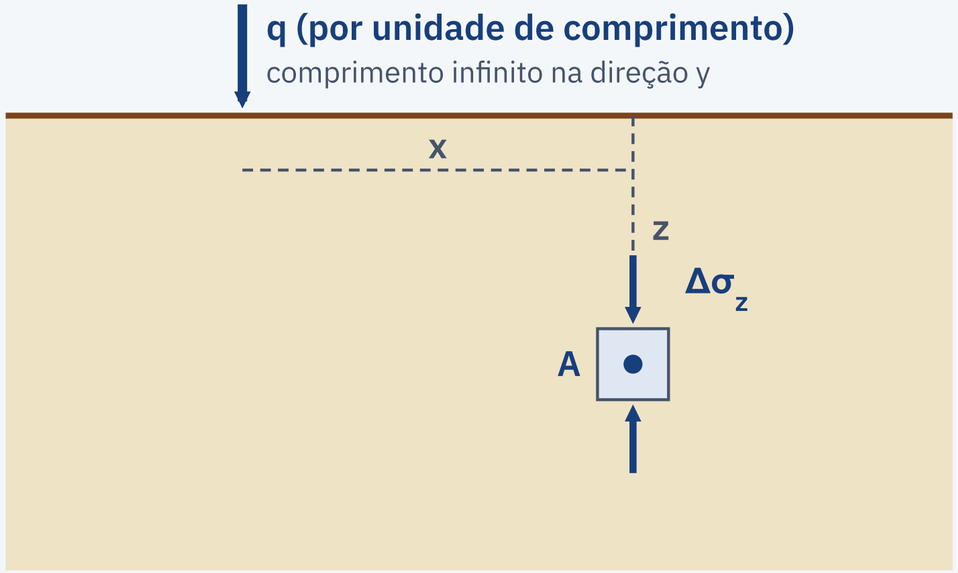
TEORIA

Carga linear é a carga de intensidade q por unidade de comprimento que atua ao longo de uma reta de comprimento infinito na superfície: um muro longo, um trilho ou uma faixa tão estreita que a sua largura pode ser desprezada.

Como toda seção perpendicular à reta é carregada da mesma forma, as tensões encontram-se em **estado plano de deformação** e dependem apenas da distância horizontal x e da profundidade z.

A carga é flexível, vertical e de comprimento infinito na direção y; o solo é admitido como um meio semi-infinito homogêneo, isotrópico e linearmente elástico.

$\Delta\sigma_z$ é o acréscimo causado pela carga; a tensão de sobrecarga do solo acima do ponto não está incluída.



De uma fileira de cargas pontuais a uma carga linear

TEORIA

Uma carga linear pode ser considerada uma fileira de cargas pontuais dP = q dy dispostas ao longo de y.

Cada carga pontual fornece a tensão de Boussinesq com $r^2 = x^2 + y^2$; quando essas contribuições são somadas ao longo da reta, o valor fechado da integral é $4/[3(x^2 + z^2)^2]$.

$$\Delta\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3q\,z^3}{2\pi\,(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{4}{3\,(x^2+z^2)^2} \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{2q\,z^3}{\pi\,(x^2+z^2)^2}$$

Diferentemente da carga pontual, a tensão diminui com a profundidade apenas na proporção de 1/z: no eixo, $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$.

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ e x/z

TEORIA

Dividindo por z e escrevendo x/z, a equação assume uma forma adimensional que fornece uma única curva para cada carga linear.

Assim, uma única curva de **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** é usada para todos os valores de x/z.

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

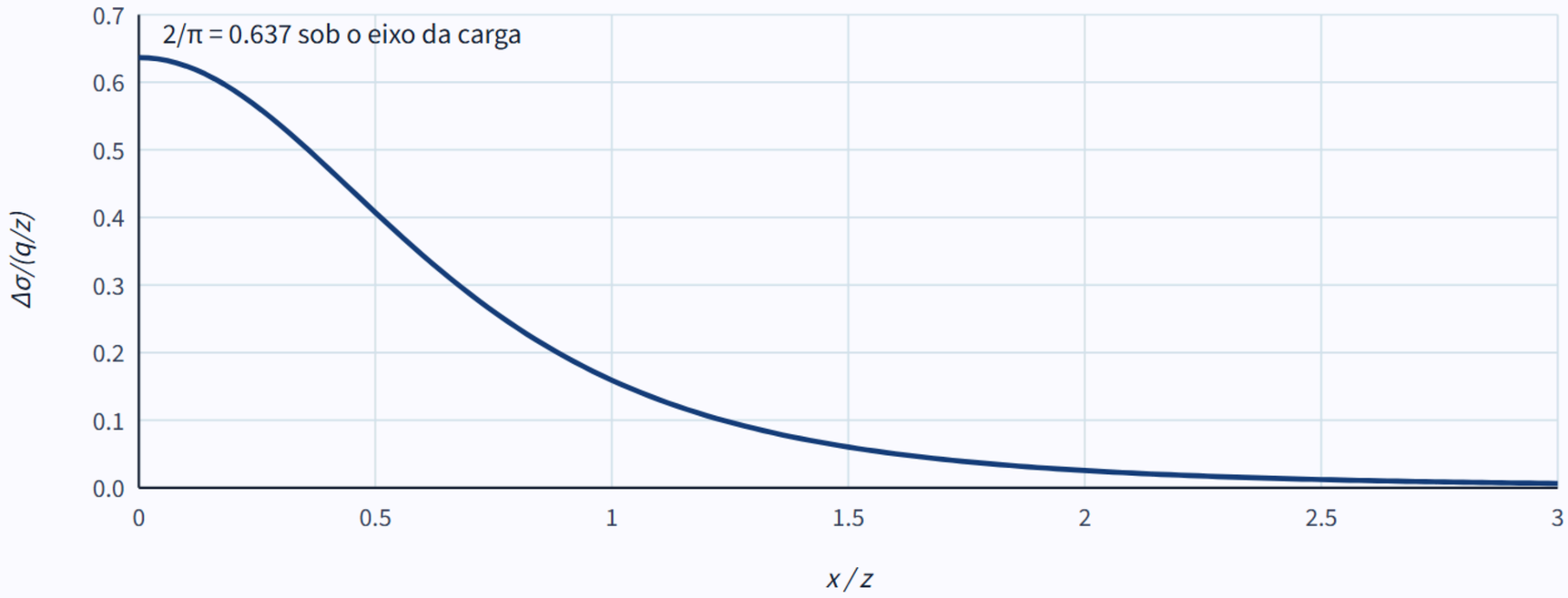
$$x = 0: \qquad \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = 0.637\,\frac{q}{z}$$

VALORES DE $\Delta\sigma_z/(q/z)$ (MÓDULO)

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.0	0.637	1.0	0.159
0.1	0.624	1.2	0.107
0.2	0.589	1.4	0.073
0.3	0.536	1.6	0.050
0.4	0.473	1.8	0.035
0.5	0.407	2.0	0.025
0.6	0.344	2.4	0.014
0.7	0.287	2.8	0.008
0.8	0.237	3.0	0.006
0.9	0.194	3.5	0.004

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ em função de x/z

TEORIA



Δσz/(q/z) em função de x/z, obtido pela equação. Para x/z = 1, o valor reduz-se a um quarto do observado no eixo; para x/z > 3, torna-se inferior a 0.01.

Superposição

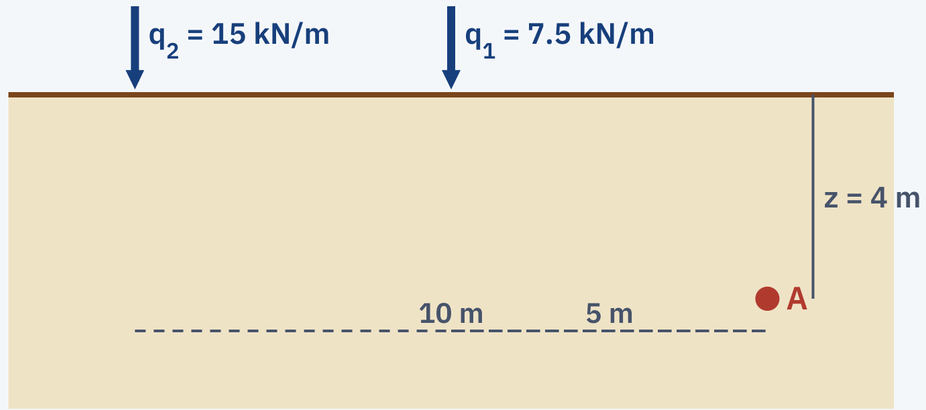
TEORIA

Como o solo é elástico, as tensões de várias cargas lineares são somadas por superposição.

A tensão no ponto A é a soma das tensões que cada carga produziria isoladamente, com sua própria distância horizontal ao ponto A.

O módulo admite no máximo oito cargas lineares paralelas; as cargas são inseridas uma a uma, com suas intensidades e posições, por meio de **Adicionar carga linear**, e não pode haver duas na mesma posição.

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{2\,q_k\,z^3}{\pi\,(x_k^2 + z^2)^2}$$



Enunciado

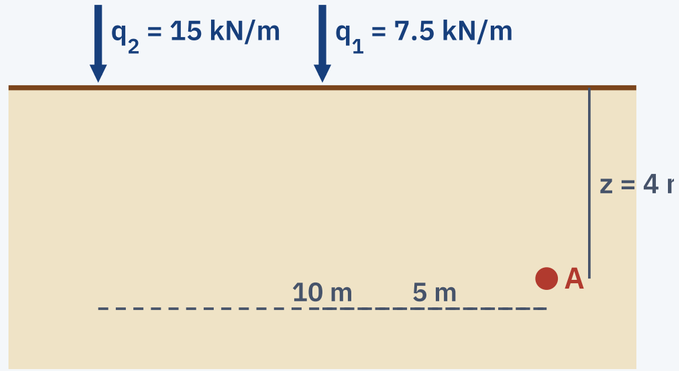
EXEMPLO

Dados

Cargas	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ **kN/m** ($x_L = -5$ **m**)
Ponto A	$x_A = 5$ **m**, $z = 4$ **m (a 5 m da carga 1, a 10 m da carga 2)**
Solo	**meio semi-infinito homogêneo e elástico; estado plano de deformação**

PEDE-SE

O $\Delta\sigma_z$ produzido por cada carga no ponto A e, por superposição, o $\Delta\sigma_z$ total.



Solução

SOLUÇÃO

1 Carga 1: x = $x_A - x_L$ = 5 − 0 = 5 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2q_1 z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(7.5)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{960}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

2 Carga 2: x = 5 − (−5) = 10 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}920}{\pi\,(13{,}456)} = \mathbf{0.04542}\ \text{kPa}$$

3 Superposição (solo elástico: as tensões se somam)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{0.22720}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa. Embora a carga 2 seja duas vezes maior, como está duas vezes mais distante de A, sua tensão é cerca de um quinto do total (razão 0.20). Verificação para a carga 1: x/z = 1.25 ⇒ 2/(π[1.25² + 1]²) = 0.09695; q_1/z = 1.875; 0.09695 · 1.875 = 0.18178. O módulo fornece o mesmo valor.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

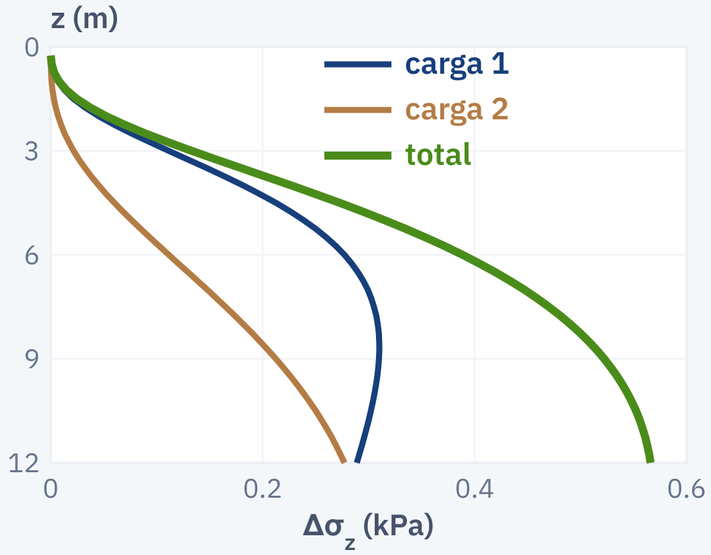
EXEMPLO

Dados

Cargas	**As duas cargas do Exemplo 1: $q_1 = 7.5$ kN/m ($x_L = 0$), $q_2 = 15$ kN/m ($x_L = -5$ m)**
Pontos	**$x_A = 5$ m; $z = 1.2; 2.4;$ ...; 12 m (linhas do perfil do módulo)**

PEDE-SE

Para cada profundidade, **$\Delta\sigma_{z(1)}$**, **$\Delta\sigma_{z(2)}$** e o total **$\Delta\sigma_z$**; solução detalhada para z = 8 m; profundidade da maior tensão.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Carga 1 (x = 5 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2(7.5)(8^3)}{\pi(5^2+8^2)^2} = \frac{7{,}680}{\pi\,(7{,}921)} = \mathbf{0.30863}\ \mathrm{kPa}$$

2 Carga 2 (x = 10 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(8^3)}{\pi(10^2+8^2)^2} = \frac{15{,}360}{\pi\,(26{,}896)} = \mathbf{0.18178}\ \mathrm{kPa}$$

3 Total

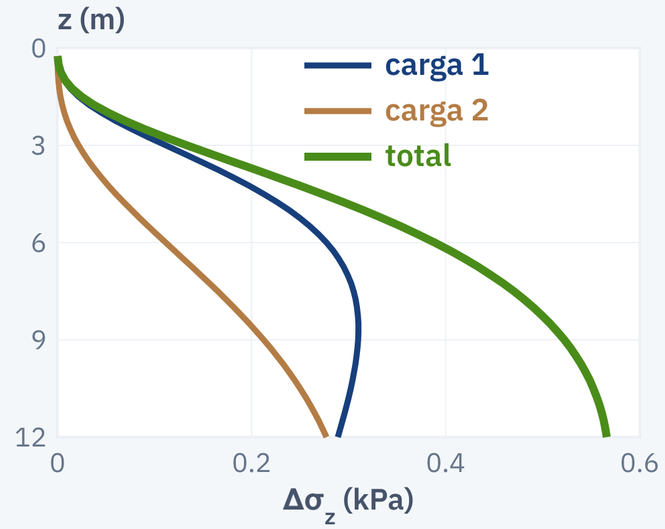
$$\Delta\sigma_z = 0.30863 + 0.18178 = \mathbf{0.49041}\ \mathrm{kPa}$$

Em z = 8 m, $\Delta\sigma_z$ = 0.49041 kPa; é muito maior que o valor em z = 4 m (0.22720 kPa): o ponto A está ao lado das cargas e a tensão continua a aumentar com a profundidade (a tabela está na página seguinte).

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

z (m)	$\Delta\sigma_{z(1)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(2)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
1.2	0.01180	0.00160	**0.01341**
2.4	0.06976	0.01180	**0.08156**
3.6	0.15460	0.03492	**0.18951**
4.8	0.22880	0.06976	**0.29856**
6.0	0.27716	0.11152	**0.38868**
7.2	0.30183	0.15460	**0.45643**
8.4	0.30990	0.19456	**0.50446**
9.6	0.30775	0.22880	**0.53655**
10.8	0.29981	0.25631	**0.55612**
12.0	0.28888	0.27716	**0.56604**



Para uma única carga, a tensão é máxima na profundidade $z = \sqrt{3}\cdot x$: para a carga 1, a 8.66 m (0.3101 kPa). A soma das duas cargas ainda está aumentando em 12 m; o maior total é 0.5687 kPa, à profundidade de 13.1 m.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

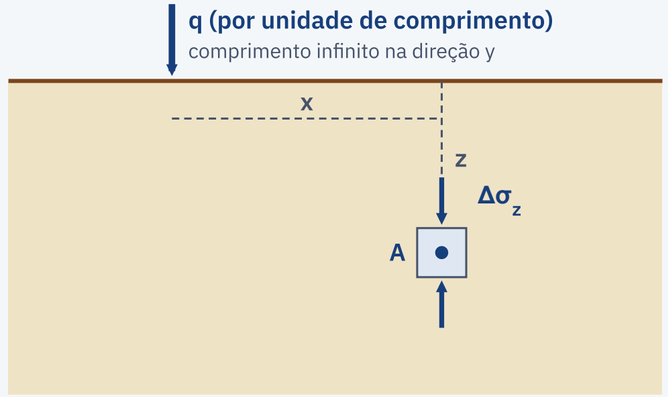
EXEMPLO

Dados

Carga	$q = 20$ **kN/m, carga linear vertical**
Pontos	$z = 3$ **m;** $x = 0; 1.5; 3; 4.5; 6$ **m**

PEDE-SE

Para cada ponto, **x/z**, **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** e **$\Delta\sigma_z$**; razão entre o valor no ponto x = z e o valor sob a carga.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Sob a carga (x = 0): x/z = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(20)}{\pi(3)} = \mathbf{4.2441}\ \text{kPa}$$

2 x = 3 m: x/z = 1

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[1^2+1\right]^2} = \frac{2}{4\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915 \cdot \frac{20}{3} = 6.6667 \cdot 0.15915 = \mathbf{1.0610}\ \text{kPa}$$

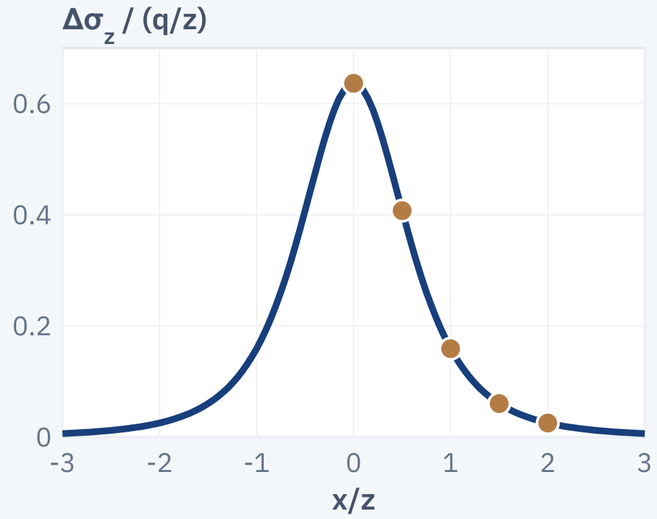
No ponto x/z = 1, a tensão é **um quarto** da existente sob a carga (1.0610 / 4.2441 = 0.25).

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0.0	0.0	0.63662	4.2441
1.5	0.5	0.40744	2.7162
3.0	1.0	0.15915	**1.0610**
4.5	1.5	0.06027	0.4018
6.0	2.0	0.02546	0.1698

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ depende apenas de x/z: a mesma curva serve para todo q e todo z. Em x/z = 2, a tensão é 0.04 vez a existente sob a carga (0.1698 kPa).



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

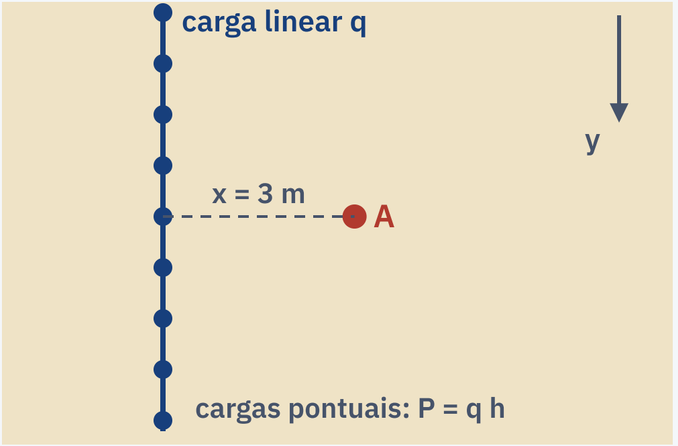
EXEMPLO

Dados

Carga	$q = 10$ **kN/m; cargas pontuais** $P = q\,h$ **espaçadas de** h **ao longo da linha (**$h = 8; 4; 2; 1$ **m)**
Ponto A	$x = 3$ **m,** $z = 4$ **m (distância horizontal da linha); Boussinesq:** $\Delta\sigma_z = 3Pz^3/(2\pi L^5)$

PEDE-SE

Soma das tensões de Boussinesq das cargas pontuais (termo a termo para h = 2 m); aproximação ao valor da carga linear à medida que h diminui.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 P = q h = 10(2) = 20 kN; para cada carga, $L_k^2 = x^2 + y_k^2 + z^2 = 9 + y_k^2 + 16$

k	y_k (m)	$L_k^2 = 25 + y_k^2$	L_k (m)	$\Delta\sigma_{z,k}$ (kPa)	Quantas cargas
0	0	25	5.000	0.19557	1
1	2	29	5.385	0.13494	2 (±k)
2	4	41	6.403	0.05678	2 (±k)
3	6	61	7.810	0.02103	2 (±k)
4	8	89	9.434	0.00818	2 (±k)
5	10	125	11.180	0.00350	2 (±k)

Termos do exemplo: k = 0: $\Delta\sigma_{z,0} = 3(20)(4^3)/[2\pi(5)^5] = 0.19557$ kPa; a soma para $|k| \le 5$ é 0.64443 kPa, e o resto para $|k| \ge 6$ é 0.00748 kPa.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

h (m)	P = q h (kN)	Soma de $\Delta\sigma_z$ das cargas pontuais (kPa)	Diferença (%)
8	80	0.852175	30.72
4	40	0.660644	1.34
2	20	0.651907	0.0013
1	10	0.651899	< 0.0001
carga linear		**0.651899**	0

Para uma carga linear, $\Delta\sigma_z = 2q\,z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = 2(10)(4^3)/[\pi(25)^2]$ = **0.651899 kPa**. Quando as cargas pontuais são tomadas com espaçamento pequeno, como $h \le z/2$, o total se aproxima muito desse valor (h = 2 m: 0.651907 kPa); já com espaçamento grande, como h = 8 m, a diferença é grande. Isso mostra que a fórmula da carga linear é a integral de uma fileira de cargas pontuais.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

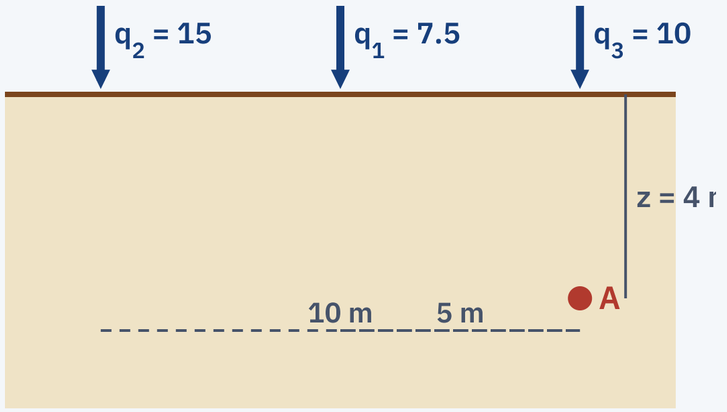
EXEMPLO

Dados

Cargas	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ **kN/m** ($x_L = -5$ **m**); $q_3 = 10$ **kN/m** ($x_L = 5$ **m**)
Pontos	**A:** $x_A = 5$ **m**, $z = 4$ **m (exatamente abaixo da carga 3); em** $z = 4$ **m,** $x = -7.5 \ldots 7.5$ **m**

PEDE-SE

A contribuição de cada carga no ponto A e o $\Delta\sigma_z$ total; a tensão total ao longo de x na profundidade z = 4 m.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Carga 3 (x = 5 – 5 = 0): A está diretamente abaixo da carga

$$\Delta\sigma_{z(3)} = \frac{2q_3}{\pi z} = \frac{2(10)}{\pi(4)} = \mathbf{1.59155}\ \mathrm{kPa}$$

2 Carga 1 (x = 5 m) e carga 2 (x = 10 m): valores do Exemplo 1

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542\ \mathrm{kPa}$$

3 Superposição

$$\Delta\sigma_z = 1.59155 + 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{1.81875}\ \mathrm{kPa}$$

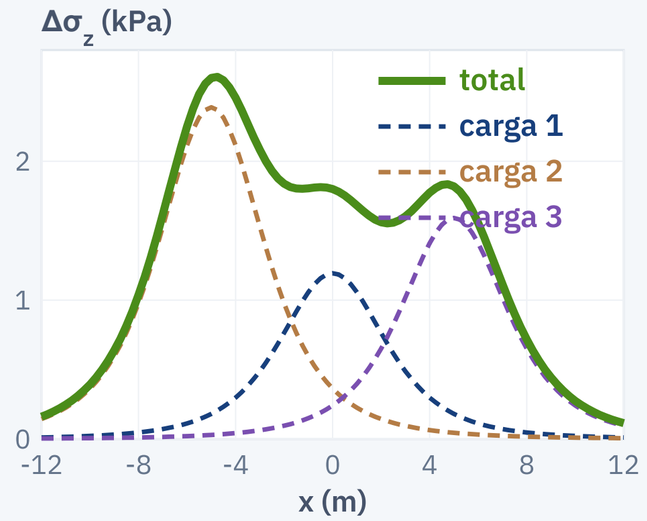
A carga 3 contribui com **87.5 por cento** do total: sob uma carga linear, a sua própria tensão é predominante, e as cargas distantes dão uma contribuição pequena. A terceira carga acrescenta 1.592 kPa ao valor de 0.2272 kPa do Exemplo 1.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

x (m)	Carga 1	Carga 2	Carga 3	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
−7.5	0.0585	1.2345	0.0137	1.3068
−5.0	0.1818	2.3873	0.0303	2.5994
−2.5	0.6173	1.2345	0.0781	1.9298
0.0	1.1937	0.3636	0.2424	1.7996
2.5	0.6173	0.1171	0.8230	1.5573
5.0	0.1818	0.0454	1.5915	**1.8188**
7.5	0.0585	0.0206	0.8230	0.9021

A curva total apresenta um pico próximo de cada carga (x ≈ −4.75; −0.50; 4.75 m); os picos deslocam-se ligeiramente devido às caudas das cargas vizinhas. O maior pico situa-se em torno da carga mais intensa (carga 2, 15 kN/m): **2.5994 kPa** em x = −5 m; no ponto A (x = 5 m), 1.8188 kPa.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Cargas	**carga linear $q = 50$ kN/m; carga pontual $P = 50$ kN**
Pontos	**sob a carga ($x = 0, r = 0$); $z = 1; 2; 3; 5; 10$ m**

PEDE-SE

$\Delta\sigma_z$ sob o eixo e taxa de decréscimo com a profundidade para os dois tipos de carga.

Solução

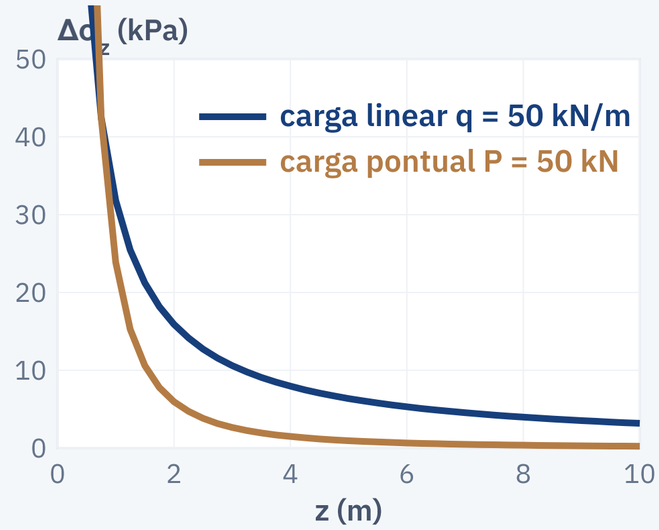
SOLUÇÃO

1 z = 5 m

$$\text{linear: } \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(50)}{\pi(5)} = \mathbf{6.366}\ \text{kPa}$$

$$\text{pontual: } \Delta\sigma_z = \frac{3}{2\pi}\frac{P}{z^2} = 0.4775\,\frac{50}{5^2} = \mathbf{0.955}\ \text{kPa}$$

z (m)	Carga linear: 2q/(πz) (kPa)	Carga pontual: 0.4775 P/z² (kPa)	Razão
1	31.831	23.873	1.3
2	15.915	5.968	2.7
3	10.610	2.653	4.0
5	6.366	0.955	6.7
10	3.183	0.239	13.3



Quando z passa de 1 para 10 m, a tensão da carga linear diminui por um fator de **10** (31.83 → 3.18 kPa) e a da carga pontual, por um fator de **100** (23.87 → 0.24 kPa).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Resumo

Pontos-chave

Carga linear (estado plano de deformação): $\Delta\sigma_z = 2q\, z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = (q/z) \cdot 2/\{\pi[(x/z)^2 + 1]^2\}$; sob a carga, $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\, q/z$

Fileira de cargas pontuais: somam-se as tensões de Boussinesq das cargas pontuais $dP = q\, dy$; cargas pontuais espaçadas de h = 2 m resultam em 0.65191 kPa, e a carga linear, em 0.65190 kPa

Exemplo (q_1 = 7.5 kN/m, q_2 = 15 kN/m; A: x = 5, z = 4 m): $\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178$; $\Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542$; **$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa**

Curva adimensional: para x/z = 1, o valor é um quarto do valor sob a carga; **superposição**: a tensão de cada carga é obtida com a sua própria distância horizontal e somada (com três cargas, 1.8188 kPa em A)

Profundidade: sob uma carga, a tensão diminui com 1/z ($1/z^2$ para carga pontual); em um ponto ao lado da carga, a tensão aumenta até a profundidade $z = \sqrt{3} \cdot x$

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels... Gauthier-Villars, Paris.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o próprio motor de cálculo do módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O módulo abre com duas cargas lineares (7.5 e 15 kN/m) e o ponto A (x = 5 m, z = 4 m).

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Informar as próprias cargas lineares, as suas posições e o ponto de interesse no GeoTerva; o módulo fornece, em conjunto, a contribuição de cada carga, o valor total de $\Delta\sigma_z$, o perfil em profundidade, as curvas de isotensão, a solução passo a passo e o relatório.

Abrir o módulo → | **Página de teoria →**

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.