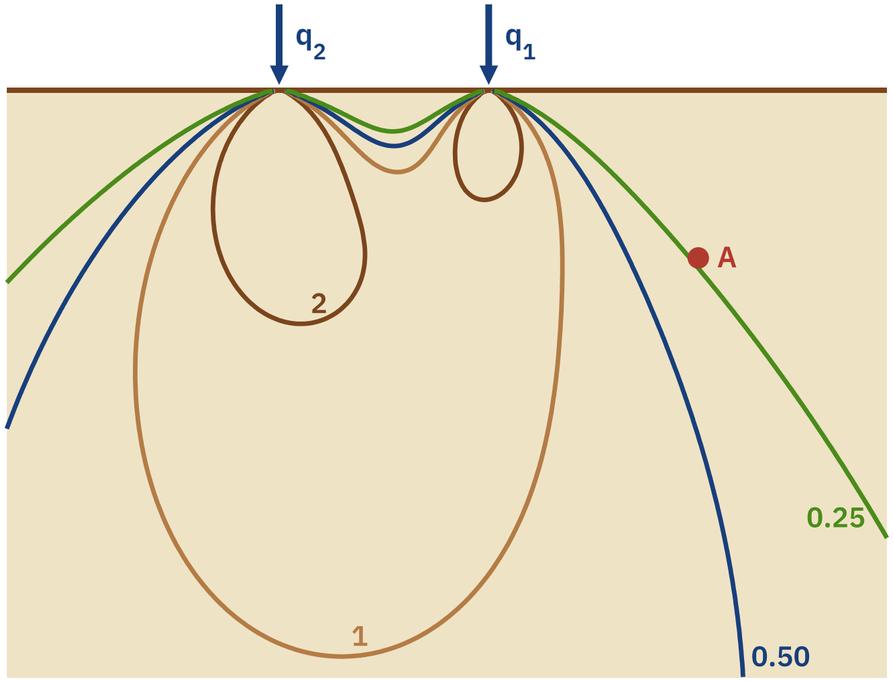
Geotechnisch college · spanningsspreiding in de ondergrond

Spanning onder een verticale lijnbelasting

College: de verticale spanning die een verticale lijnbelasting aan het maaiveld in de grond veroorzaakt; het startpunt volledig met de hand uitgewerkt, diepte- en laterale profielen met tabellen.

Vlakke vervorming | Dimensieloze curve | Superpositie | Reeks puntbelastingen | Iso-spanningscontouren



Inleiding

Wat leren we in dit college?

Een lijnbelasting onder **vlakke vervorming**: de spanning hangt alleen af van de horizontale afstand **x** loodrecht eronder en van de diepte **z**

Door de lijnlast op te vatten als een **reeks puntlasten** volgt de betrekking $\Delta\sigma_z = 2qz^3/[\pi(x^2 + z^2)^2]$

Verschil met een puntbelasting: onder de belastingsas neemt de spanning slechts af met **1/z**, $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$

Dimensieloze vorm: één enkele $\Delta\sigma_z/(q/z)$-kromme en een x/z-tabel; **superpositie** voor meerdere evenwijdige belastingen

Het openingsvoorbeeld van de module (twee lijnbelastingen) **volledig met de hand**; diepte- en laterale variatie in tabellen

COLLEGESTRUCTUUR

Elk onderwerp wordt in **drie stappen** behandeld:

1 · **Theorie**: formule en onderbouwing

2 · **Opgave**: gegeven en gevraagd

3 · **Oplossing**: stap voor stap, met getallen

Voorbeeld: q_1 = 7.5 kN/m (x = 0) en q_2 = 15 kN/m (x = −5 m); punt A: x = 5 m, z = 4 m.

Belasting per eenheid lengte langs een oneindig lange lijn

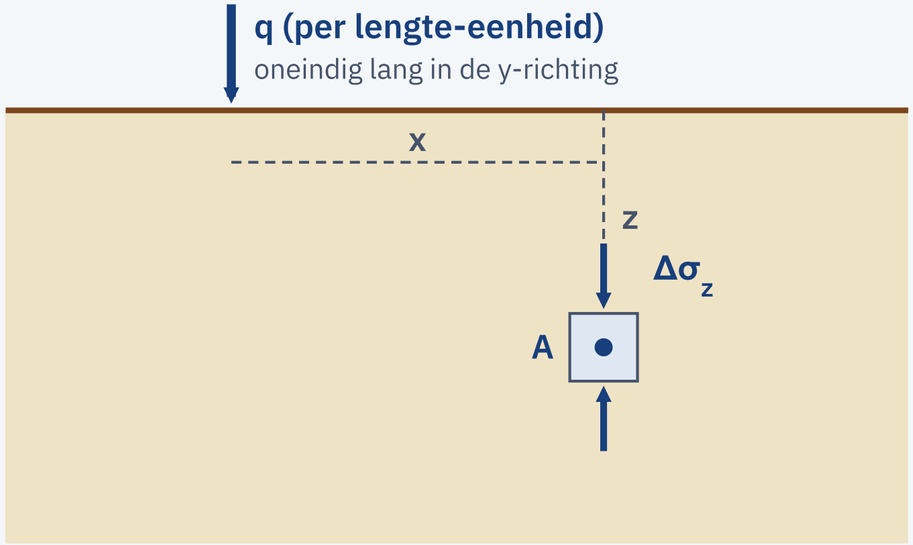
THEORIE

Een lijnbelasting is een belasting met intensiteit q per lengte-eenheid die langs een oneindig lange lijn op het maaiveld aangrijpt: een lange muur, een rail of een strook die zo smal is dat de breedte verwaarloosd kan worden.

Omdat elke doorsnede loodrecht op de lijn op dezelfde wijze wordt belast, verkeren de spanningen in een toestand van **vlakke vervorming** en zijn ze alleen afhankelijk van de horizontale afstand x en de diepte z.

De belasting is flexibel, verticaal en oneindig lang in de y-richting; de grond wordt als een homogeen, isotroop en lineair elastisch half-oneindig medium beschouwd.

$\Delta\sigma_z$ is de toename veroorzaakt door de belasting; de deklaag van de grond boven het punt is hierbij niet inbegrepen.



Van een rij puntlasten naar een lijnlast

THEORIE

Een lijnbelasting kan worden beschouwd als een reeks puntlasten dP = q dy die langs y zijn opgesteld.

Elke puntlast levert de Boussinesq-spanning met $r^2 = x^2 + y^2$; wanneer deze bijdragen langs de lijn worden gesommeerd, wordt de gesloten vorm van de integraal $4/[3(x^2 + z^2)^2]$.

$$\Delta\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3q\,z^3}{2\pi\,(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{4}{3\,(x^2+z^2)^2} \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{2q\,z^3}{\pi\,(x^2+z^2)^2}$$

Anders dan bij een puntbelasting neemt de spanning met de diepte slechts af met 1/z: op de as geldt $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$.

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ en x/z

THEORIE

Na deling door z en substitutie van x/z krijgt de vergelijking een dimensieloze vorm die voor elke lijnbelasting één enkele curve geeft.

Zo wordt één enkele **$\Delta\sigma_z/(q/z)$**-kromme gebruikt voor elke waarde van x/z.

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

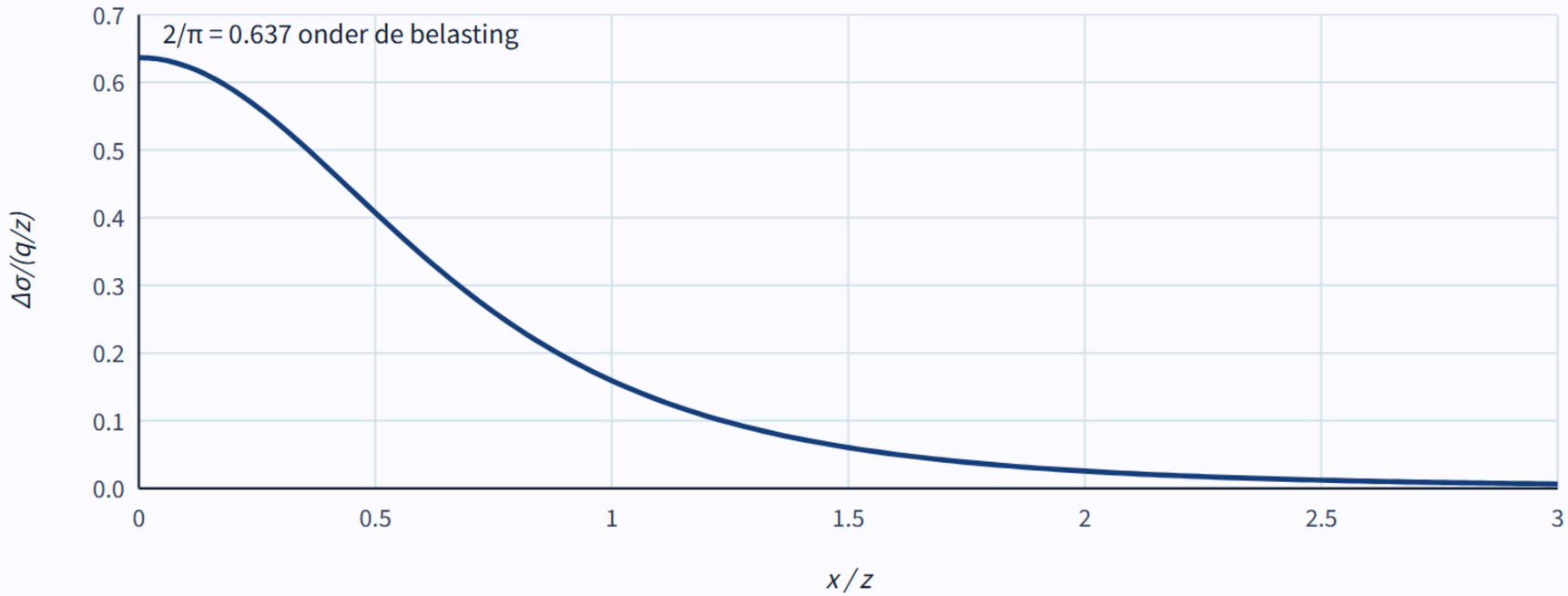
$$x = 0: \qquad \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = 0.637\,\frac{q}{z}$$

$\Delta\sigma_z/(q/z)$-waarden (module)

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.0	0.637	1.0	0.159
0.1	0.624	1.2	0.107
0.2	0.589	1.4	0.073
0.3	0.536	1.6	0.050
0.4	0.473	1.8	0.035
0.5	0.407	2.0	0.025
0.6	0.344	2.4	0.014
0.7	0.287	2.8	0.008
0.8	0.237	3.0	0.006
0.9	0.194	3.5	0.004

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ tegen x/z

THEORIE



Δσz/(q/z) als functie van x/z, berekend volgens de formule. Bij x/z = 1 bedraagt de spanning een kwart van de waarde direct onder de lijnbelasting; voorbij x/z = 3 is deze kleiner dan 0.01.

Superpositie

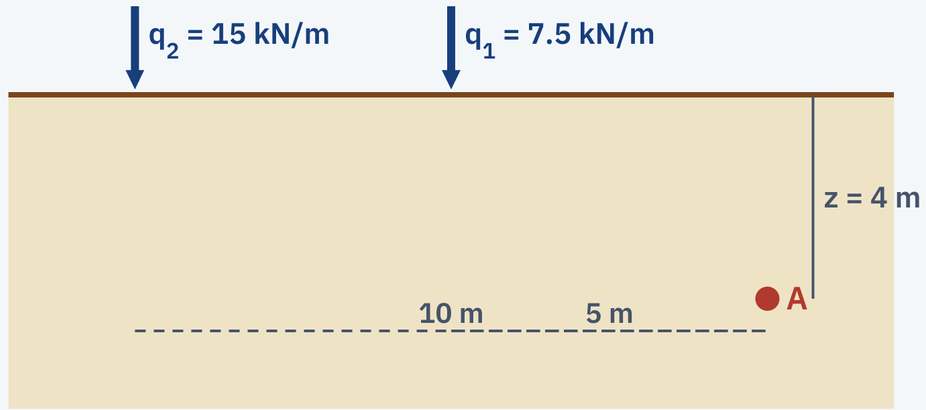
THEORIE

Omdat de grond elastisch is, worden de spanningen van meerdere lijnbelastingen door superpositie gesommeerd.

De spanning in punt A is de som van de spanningen die elke belasting afzonderlijk veroorzaakt, met de eigen horizontale afstand tot punt A.

De module accepteert ten hoogste acht evenwijdige lijnlasten; de lasten worden één voor één met hun intensiteit en positie ingevoerd via **Lijnlast toevoegen**, en geen twee ervan mogen op dezelfde positie liggen.

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{2\,q_k\,z^3}{\pi\,(x_k^2 + z^2)^2}$$



Opgave

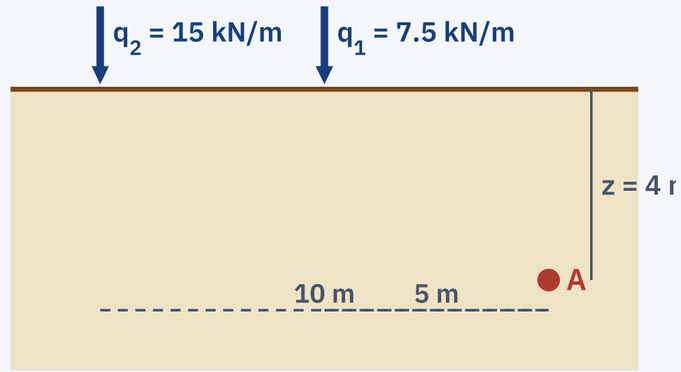
VOORBEELD

Gegeven

Belastingen	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$)**;** $q_2 = 15$ **kN/m (** $x_L = -5$ **m)**
Punt A	$x_A = 5$ **m,** $z = 4$ **m (belasting 1 op** 5 **m, belasting 2 op** 10 **m)**
Grond	**homogeen, elastisch halfruimte; vlakke vervormingstoestand**

GEVRAAGD

De **$\Delta\sigma_z$** die elke belasting in punt A veroorzaakt en, door superpositie, de totale **$\Delta\sigma_z$**.



Oplossing

OPLOSSING

1 Belasting 1: x = $x_A - x_L$ = 5 − 0 = 5 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2q_1 z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(7.5)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{960}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.18178}\ \mathrm{kPa}$$

2 Belasting 2: x = 5 − (−5) = 10 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}920}{\pi\,(13{,}456)} = \mathbf{0.04542}\ \mathrm{kPa}$$

3 Superpositie (elastische grond: spanningen worden gesommeerd)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{0.22720}\ \mathrm{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa. Hoewel belasting 2 twee keer zo groot is, staat zij twee keer zo ver van A, zodat haar spanning ongeveer een vijfde van het totaal bedraagt (verhouding 0.20). Toets voor belasting 1: x/z = 1.25 ⇒ 2/(π[1.25² + 1]²) = 0.09695; q_1/z = 1.875; 0.09695 · 1.875 = 0.18178. De module geeft dezelfde waarde.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

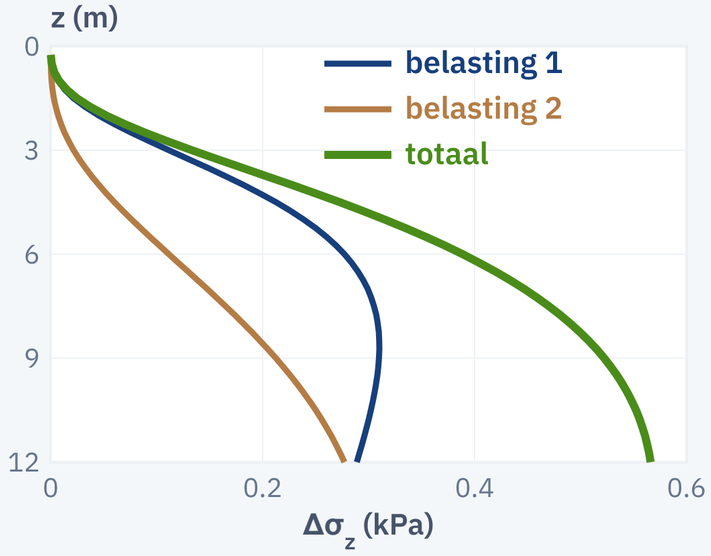
VOORBEELD

Gegeven

Belastingen	**De twee belastingen uit Voorbeeld 1:** $q_1 = 7.5$ **kN/m (**$x_L = 0$**),** $q_2 = 15$ **kN/m (**$x_L = -5$ **m)**
Punten	$x_A = 5$ **m;** $z = 1.2; 2.4;$ **...;** 12 **m (profielregels van de module)**

GEVRAAGD

Voor elke diepte $\Delta\sigma_{z(1)}$, $\Delta\sigma_{z(2)}$ en de totale $\Delta\sigma_z$; uitgewerkte oplossing voor z = 8 m; de diepte van de grootste spanning.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Belasting 1 (x = 5 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2(7.5)(8^3)}{\pi(5^2+8^2)^2} = \frac{7{,}680}{\pi\,(7{,}921)} = \mathbf{0.30863}\ \mathrm{kPa}$$

2 Belasting 2 (x = 10 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(8^3)}{\pi(10^2+8^2)^2} = \frac{15{,}360}{\pi\,(26{,}896)} = \mathbf{0.18178}\ \mathrm{kPa}$$

3 Totaal

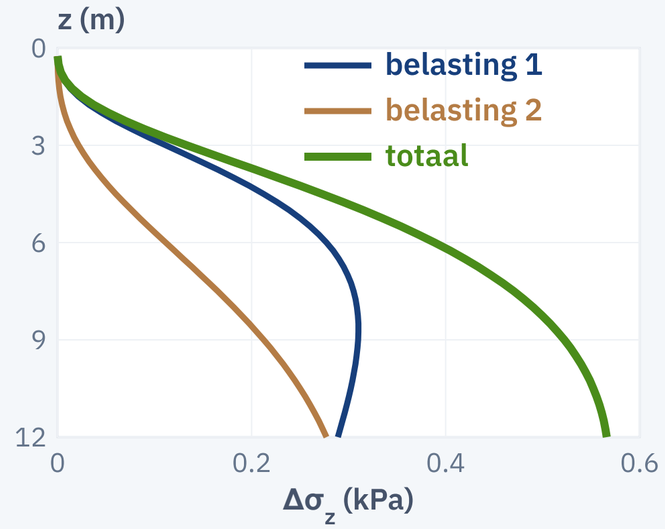
$$\Delta\sigma_z = 0.30863 + 0.18178 = \mathbf{0.49041}\ \mathrm{kPa}$$

Op z = 8 m is $\Delta\sigma_z$ = 0.49041 kPa; dit is veel groter dan de waarde op z = 4 m (0.22720 kPa): punt A ligt naast de belastingen en de spanning blijft met de diepte toenemen (de tabel staat op de volgende pagina).

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

z (m)	$\Delta\sigma_{z(1)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(2)}$ (kPa)	Totaal $\Delta\sigma_z$ (kPa)
1.2	0.01180	0.00160	**0.01341**
2.4	0.06976	0.01180	**0.08156**
3.6	0.15460	0.03492	**0.18951**
4.8	0.22880	0.06976	**0.29856**
6.0	0.27716	0.11152	**0.38868**
7.2	0.30183	0.15460	**0.45643**
8.4	0.30990	0.19456	**0.50446**
9.6	0.30775	0.22880	**0.53655**
10.8	0.29981	0.25631	**0.55612**
12.0	0.28888	0.27716	**0.56604**



Voor een enkele belasting is de spanning het grootst op diepte $z = \sqrt{3}\cdot x$: voor belasting 1 op 8.66 m (0.3101 kPa). De som van de twee belastingen neemt op 12 m nog steeds toe; het maximum van de som is 0.5687 kPa op een diepte van 13.1 m.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

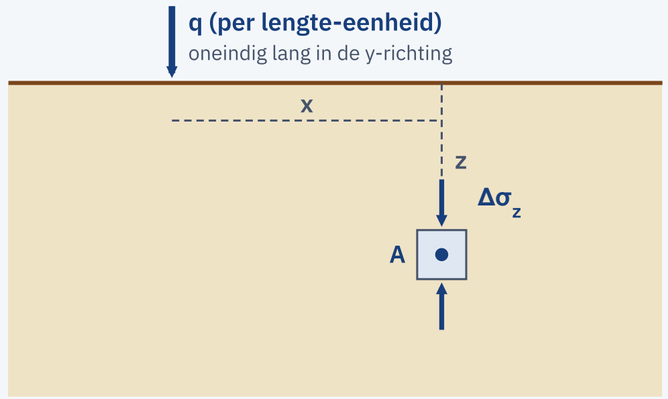
VOORBEELD

Gegeven

Belasting	$q = 20$ **kN/m, verticale lijnbelasting**
Punten	$z = 3$ **m;** $x = 0; 1.5; 3; 4.5; 6$ **m**

GEVRAAGD

Voor elk punt **x/z**, **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** en **$\Delta\sigma_z$**; de verhouding van de waarde in het punt x = z tot de waarde onder de belasting.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Onder de belasting (x = 0): x/z = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(20)}{\pi(3)} = \mathbf{4.2441}\ \mathrm{kPa}$$

2 x = 3 m: x/z = 1

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[1^2+1\right]^2} = \frac{2}{4\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915 \cdot \frac{20}{3} = 6.6667 \cdot 0.15915 = \mathbf{1.0610}\ \mathrm{kPa}$$

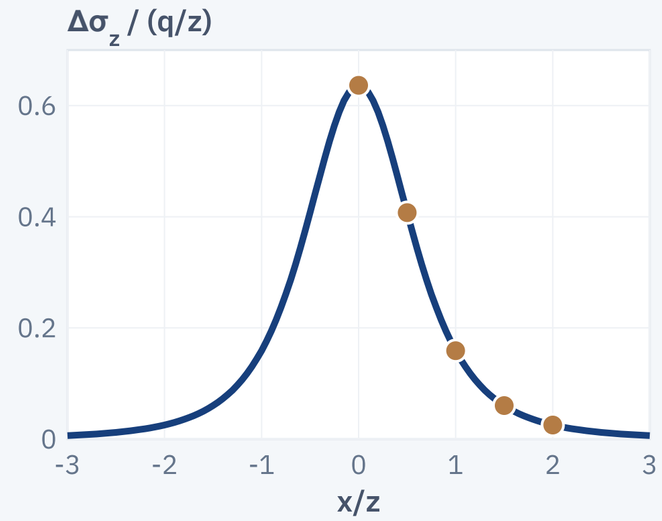
In het punt x/z = 1 is de spanning **een kwart** van die onder de belasting (1.0610 / 4.2441 = 0.25).

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0.0	0.0	0.63662	4.2441
1.5	0.5	0.40744	2.7162
3.0	1.0	0.15915	**1.0610**
4.5	1.5	0.06027	0.4018
6.0	2.0	0.02546	0.1698

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ hangt alleen af van x/z: dezelfde curve wordt gebruikt voor elke q en elke z. Bij x/z = 2 is de spanning 0.04 maal die onder de belasting (0.1698 kPa).



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

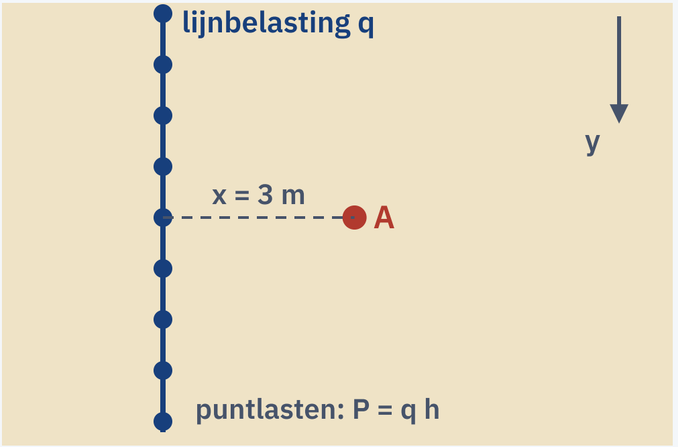
VOORBEELD

Gegeven

Belasting	$q = 10$ **kN/m; losse puntlasten** $P = q\,h$ **met tussenafstand** h **langs de lijn (**$h = 8; 4; 2; 1$ **m)**
Punt A	$x = 3$ **m,** $z = 4$ **m (horizontale afstand van de lijn); Boussinesq:** $\Delta\sigma_z = 3Pz^3/(2\pi L^5)$

GEVRAAGD

Som van de Boussinesq-spanningen van de puntbelastingen (termsgewijs voor h = 2 m); toenadering tot de waarde van de lijnbelasting naarmate h afneemt.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 P = q h = 10(2) = 20 kN; voor elke belasting $L_k^2 = x^2 + y_k^2 + z^2 = 9 + y_k^2 + 16$

k	y_k (m)	$L_k^2 = 25 + y_k^2$	L_k (m)	$\Delta\sigma_{z,k}$ (kPa)	Aantal belastingen
0	0	25	5.000	0.19557	1
1	2	29	5.385	0.13494	2 (±k)
2	4	41	6.403	0.05678	2 (±k)
3	6	61	7.810	0.02103	2 (±k)
4	8	89	9.434	0.00818	2 (±k)
5	10	125	11.180	0.00350	2 (±k)

Voorbeeldtermen: k = 0: $\Delta\sigma_{z,0} = 3(20)(4^3)/[2\pi(5)^5] = 0.19557$ kPa; de som voor $|k| \le 5$ is 0.64443 kPa, en de rest voor $|k| \ge 6$ is 0.00748 kPa.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

h (m)	P = q h (kN)	Som van de afzonderlijke belastingen $\Delta\sigma_z$ (kPa)	Verschil (%)
8	80	0.852175	30.72
4	40	0.660644	1.34
2	20	0.651907	0.0013
1	10	0.651899	< 0.0001
lijnbelasting		**0.651899**	0

Voor een lijnbelasting geldt $\Delta\sigma_z = 2q\,z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = 2(10)(4^3)/[\pi(25)^2] =$ **0.651899 kPa**.

Worden de puntlasten dicht bij elkaar genomen als $h \leq z/2$, dan nadert de som deze waarde sterk (h = 2 m: 0.651907 kPa); bij een ruime onderlinge afstand zoals h = 8 m is het verschil echter groot. Dit toont aan dat de formule voor een lijnbelasting de integraal is van een rij puntlasten.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

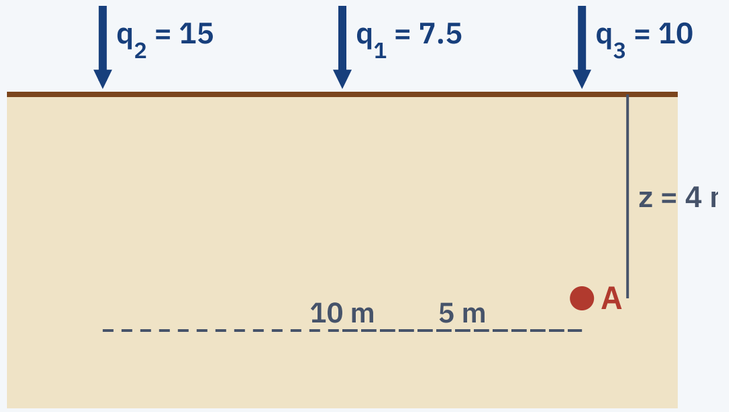
VOORBEELD

Gegeven

Belastingen	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ **kN/m** ($x_L = -5$ **m**); $q_3 = 10$ **kN/m** ($x_L = 5$ **m**)
Punten	**A:** $x_A = 5$ **m**, $z = 4$ **m (direct onder belasting 3); bij** $z = 4$ **m**, $x = -7.5$ **…** 7.5 **m**

GEVRAAGD

De bijdrage van elke belasting in punt A en de totale $\Delta\sigma_z$; de totale spanning langs x op diepte z = 4 m.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Belasting 3 (x = 5 – 5 = 0): A ligt recht onder de belasting

$$\Delta\sigma_{z(3)} = \frac{2q_3}{\pi z} = \frac{2(10)}{\pi(4)} = \mathbf{1.59155}\ \mathrm{kPa}$$

2 Belasting 1 (x = 5 m) en belasting 2 (x = 10 m): waarden uit Voorbeeld 1

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542\ \mathrm{kPa}$$

3 Superpositie

$$\Delta\sigma_z = 1.59155 + 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{1.81875}\ \mathrm{kPa}$$

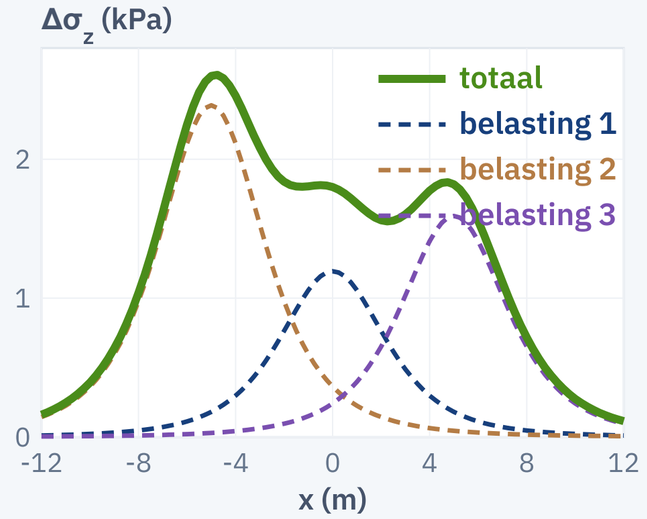
Belasting 3 levert **87.5 procent** van het totaal: onder een lijnbelasting domineert de eigen spanning, terwijl verder gelegen belastingen een kleine bijdrage leveren. De derde belasting voegt 1.592 kPa toe aan de waarde 0.2272 kPa van Voorbeeld 1.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

x (m)	Belasting 1	Belasting 2	Belasting 3	Totaal $\Delta\sigma_z$ (kPa)
−7.5	0.0585	1.2345	0.0137	1.3068
−5.0	0.1818	2.3873	0.0303	2.5994
−2.5	0.6173	1.2345	0.0781	1.9298
0.0	1.1937	0.3636	0.2424	1.7996
2.5	0.6173	0.1171	0.8230	1.5573
5.0	0.1818	0.0454	1.5915	**1.8188**
7.5	0.0585	0.0206	0.8230	0.9021

De totale kromme geeft nabij elke belasting een piek (x ≈ −4.75; −0.50; 4.75 m); de pieken verschuiven enigszins door de staarten van de aangrenzende belastingen. De hoogste piek ligt rond de zwaarste belasting (belasting 2, 15 kN/m): **2.5994 kPa** bij x = −5 m; in punt A (x = 5 m) 1.8188 kPa.



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Belastingen	**lijnbelasting $q = 50$ kN/m; puntbelasting $P = 50$ kN**
Punten	**onder de belasting ($x = 0, r = 0$); $z = 1; 2; 3; 5; 10$ m**

GEVRAAGD

$\Delta\sigma_z$ onder de as en de afnamesnelheid met de diepte voor de twee belastingstypen.

Oplossing

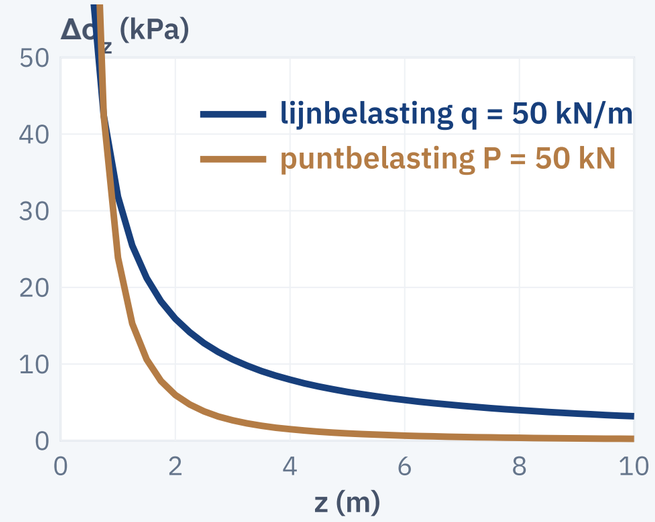
OPLOSSING

1 z = 5 m

$$\text{lijnvormig: } \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(50)}{\pi(5)} = \mathbf{6.366}\ \text{kPa}$$

$$\text{enkel: } \Delta\sigma_z = \frac{3}{2\pi}\frac{P}{z^2} = 0.4775\,\frac{50}{5^2} = \mathbf{0.955}\ \text{kPa}$$

z (m)	Lijnbelasting: 2q/(πz) (kPa)	Puntbelasting: 0.4775 P/z² (kPa)	Verhouding
1	31.831	23.873	1.3
2	15.915	5.968	2.7
3	10.610	2.653	4.0
5	6.366	0.955	6.7
10	3.183	0.239	13.3



Als z van 1 → 10 m gaat, neemt de spanning door de lijnbelasting **10 keer** af (31.83 → 3.18 kPa) en de spanning door de puntbelasting **100 keer** (23.87 → 0.24 kPa).

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Samenvatting

Belangrijkste punten

Lijnbelasting (vlakke vervorming): $\Delta\sigma_z = 2q\, z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = (q/z) \cdot 2/\{\pi[(x/z)^2 + 1]^2\}$; onder de belasting $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$

Rij puntlasten: de Boussinesq-spanningen van de puntlasten $dP = q\, dy$ worden gesommeerd; puntlasten met tussenafstand $h = 2$ m geven 0.65191 kPa, de lijnlast 0.65190 kPa

Voorbeeld ($q_1 = 7.5$ kN/m, $q_2 = 15$ kN/m; A: $x = 5$, $z = 4$ m): $\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178$; $\Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542$; **$\Delta\sigma_z = 0.22720$ kPa**

Dimensieloze kromme: voor $x/z = 1$ is de waarde een kwart van die onder de belasting; **superpositie**: de spanning van elke belasting wordt met de eigen horizontale afstand bepaald en gesommeerd (bij drie belastingen 1.8188 kPa in A)

Diepte: onder een belasting neemt de spanning af met $1/z$ (bij een puntbelasting met $1/z^2$); in een punt naast de belasting neemt de spanning toe tot een diepte van $z = \sqrt{3} \cdot x$

Literatuur

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels... Gauthier-Villars, Paris.

OPMERKING

Alle numerieke voorbeelden zijn met de eigen berekeningsmotor van de module geproduceerd; de module geeft dezelfde waarden. De module opent met twee lijnbelastingen (7.5 en 15 kN/m) en punt A (x = 5 m, z = 4 m).

GeoTerva

Online geotechnische berekeningen

Van theorie naar praktijk

Voer uw eigen lijnbelastingen, hun posities en uw punt in GeoTerva in; de module geeft de bijdrage van elke belasting, de totale $\Delta\sigma_z$-waarde, het diepteprofiel, de iso-spanningscontouren, de stapsgewijze oplossing en het rapport samen.

Module openen → | **Theoriepagina →**



Openen op de smartphone
Proefmodules vereisen geen registratie.

Wilt u ze in uw colleges gebruiken: info@geoterva.com