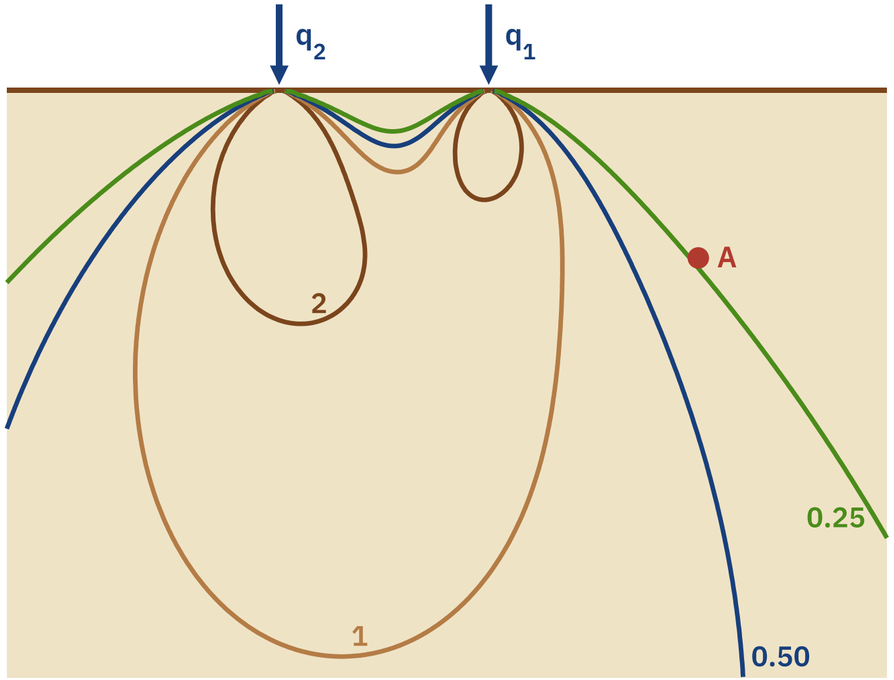
GeoTerva

지반공학 강의 자료 · 지반 내 응력분포

연직 선하중 아래의 응력

강의: 지표면의 연직 선하중이 지반에 일으키는 연직응력; 초기 지점을 처음부터 끝까지 손으로 풀고, 깊이 및 횡방향 분포는 표로 제시한다.

평면변형률 · 무차원 곡선 · 중첩 · 집중하중 배열 · 등응력선



개요

이 강의에서 다루는 내용

평면변형률 조건에서의 선하중: 응력은 바로 아래 지점으로부터의 수평 거리 **x**와 깊이 **z**에만 의존한다

선하중을 **집중하중 열**로 합산하여 $\Delta\sigma_z = 2qz^3/[\pi(x^2 + z^2)^2]$ 관계식을 얻는 방법

집중하중과의 차이: 하중 축 아래에서 응력은 **1/z**로만 감소하며, $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$

무차원 형식: 단일 $\Delta\sigma_z/(q/z)$ 곡선과 x/z 표; 여러 평행 하중에 대한 **중첩**

모듈의 초기 예제(선하중 두 개)를 **처음부터 끝까지 수계산**하기; 깊이와 수평 방향 변화는 표로

강의 흐름

각 주제는 **세 단계**로 다룬다:

1 · **이론**: 공식과 그 근거

2 · **문제**: 조건과 구하는 값

3 · **풀이**: 단계별 수치 계산

예제: q_1 = 7.5 kN/m (x = 0) 및 q_2 = 15 kN/m (x = −5 m); A점: x = 5 m, z = 4 m.

무한히 긴 선을 따른 단위 길이당 하중

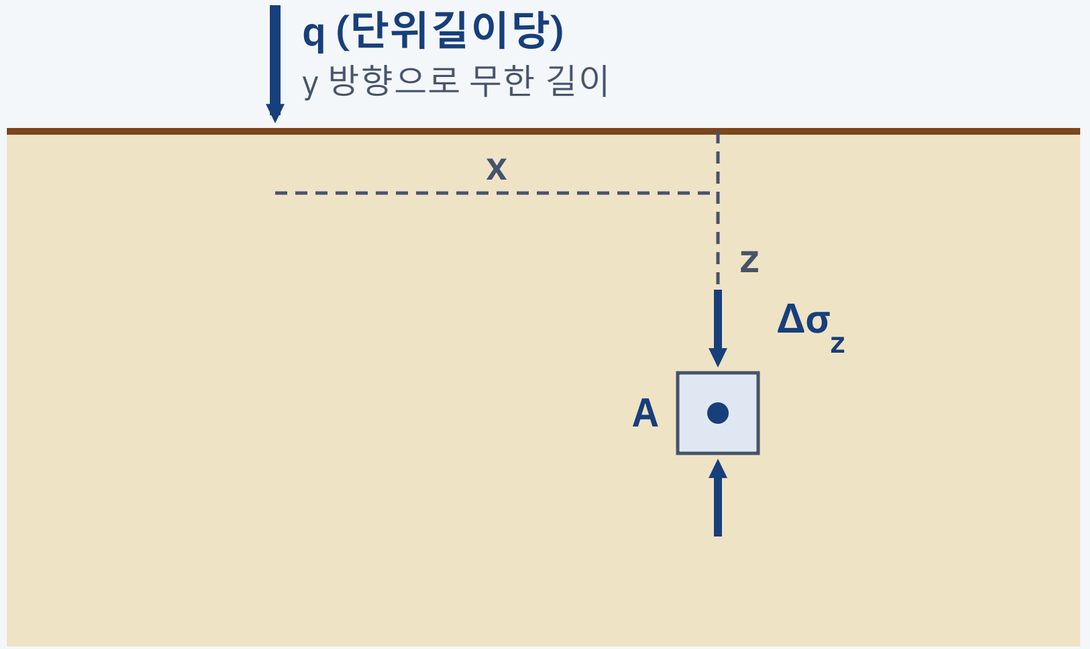
이론

선하중은 지표면에서 무한히 긴 직선을 따라 작용하는, 단위길이당 크기가 q인 하중이다. 긴 벽, 레일, 또는 폭을 무시할 수 있을 만큼 좁은 띠가 이에 해당한다.

선에 직각인 모든 단면이 동일하게 하중을 받으므로 응력은 **평면변형률** 상태이며 수평 거리 x와 깊이 z에만 의존한다.

하중은 연성이며 연직이고 y 방향으로 무한히 길다; 지반은 균질, 등방, 선형 탄성의 반무한 매질로 가정한다.

$\Delta\sigma_z$는 하중에 의한 증가량이며, 해당 지점 위 지반의 상재압력은 포함하지 않는다.



집중하중 한 열에서 선하중으로

이론

선하중은 y 방향을 따라 늘어선 집중하중 dP = q dy의 열로 볼 수 있다.

각 집중하중에 의한 Boussinesq 응력은 $r^2 = x^2 + y^2$을 이용하여 구하며, 이 기여분들을 직선을 따라 합하면 적분의 닫힌 형태 값은 $4/[3(x^2 + z^2)^2]$와 같다.

$$\Delta\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3q\,z^3}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} = \frac{4}{3\left(x^2+z^2\right)^2} \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{2q\,z^3}{\pi\left(x^2+z^2\right)^2}$$

집중하중과 달리 응력은 깊이에 따라 1/z 비율로만 감소한다: 축 상에서 $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$.

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ 및 x/z

이론

z로 나누고 x/z를 대입하면 방정식은 각 선하중에 대해 하나의 곡선을 주는 무차원 형태가 된다.

따라서 하나의 **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** 곡선을 x/z의 모든 값에 사용할 수 있다.

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

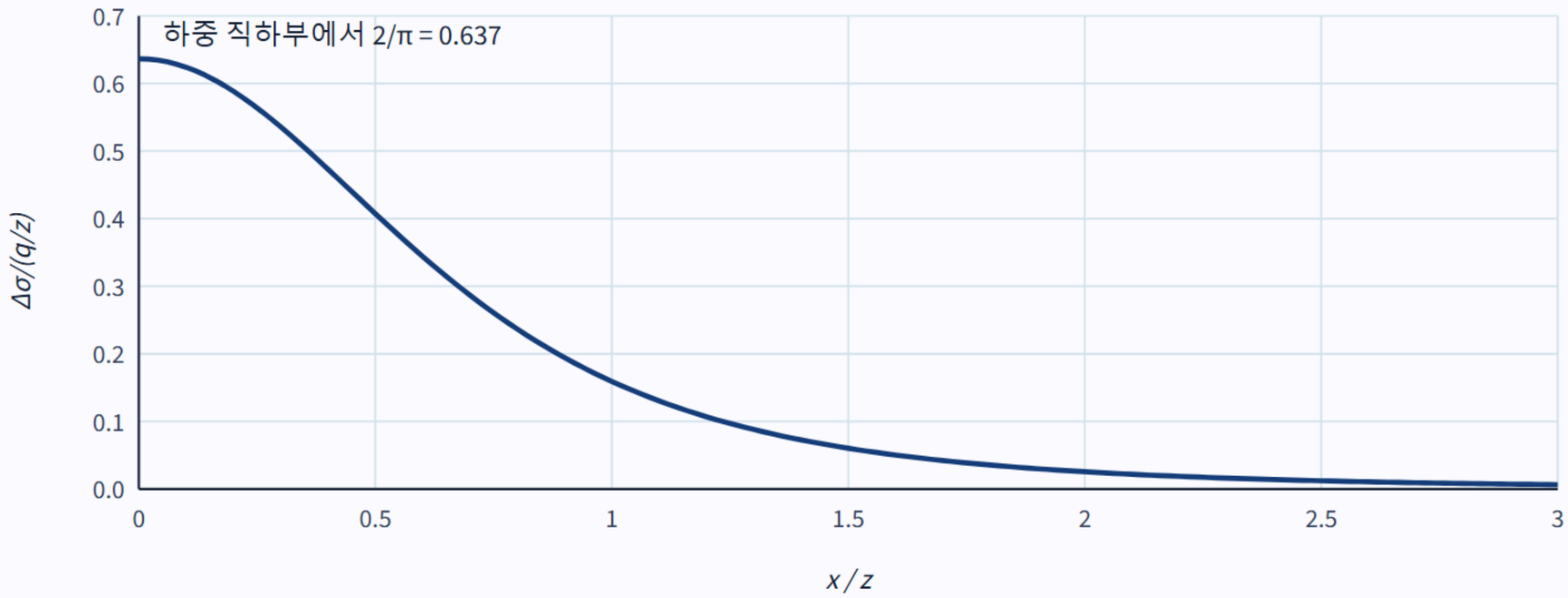
$$x = 0: \qquad \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = 0.637\,\frac{q}{z}$$

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ 값 (모듈)

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.0	0.637	1.0	0.159
0.1	0.624	1.2	0.107
0.2	0.589	1.4	0.073
0.3	0.536	1.6	0.050
0.4	0.473	1.8	0.035
0.5	0.407	2.0	0.025
0.6	0.344	2.4	0.014
0.7	0.287	2.8	0.008
0.8	0.237	3.0	0.006
0.9	0.194	3.5	0.004

x/z에 따른 $\Delta\sigma_z/(q/z)$

이론



방정식으로부터 산정된 x/z에 대한 Δσz/(q/z). x/z = 1에서 하중 직하부 값의 1/4이 되며, x/z = 3을 넘어서면 0.01 미만이 된다.

중첩

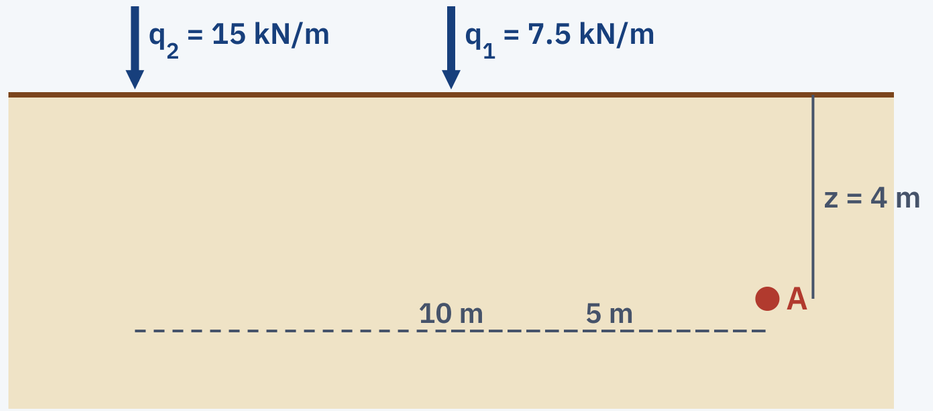
이론

지반이 탄성체이므로 여러 선하중에 의한 응력은 중첩의 원리로 합산한다.

A점의 응력은 각 하중이 자신의 A점까지의 수평거리로 단독 작용할 때 생기는 응력의 합이다.

모듈은 평행한 선하중을 최대 8개까지 받는다. 하중은 **선하중 추가**로 크기와 위치를 지정하여 하나씩 입력하며, 어떤 두 하중도 같은 위치에 있을 수 없다.

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{2\,q_k\,z^3}{\pi\,(x_k^2 + z^2)^2}$$



문제

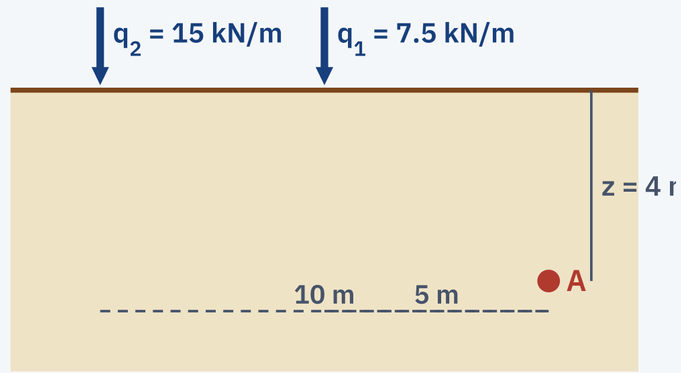
예제

조건

하중	$q_1 = 7.5$ kN/m ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ kN/m ($x_L = -5$ m)
점 A	$x_A = 5$ m, $z = 4$ m (하중 1에서 5 m, 하중 2에서 10 m 떨어짐)
지반	균질한 탄성 반무한 매질; 평면변형률

구하는 값

각 하중이 A점에 일으키는 $\Delta\sigma_z$와 중첩으로 구한 전체 $\Delta\sigma_z$.



풀이

풀이

1 하중 1: x = $x_A - x_L$ = 5 − 0 = 5 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2q_1 z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(7.5)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{960}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

2 하중 2: x = 5 − (−5) = 10 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}920}{\pi\,(13{,}456)} = \mathbf{0.04542}\ \text{kPa}$$

3 중첩 (지반이 탄성이므로 응력을 합산한다)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{0.22720}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa이다. 하중 2는 두 배 크지만 A에서 두 배 멀리 있으므로 그 응력은 합계의 약 5분의 1이다(비 0.20). 하중 1에 대한 검토: x/z = 1.25 ⇒ 2/(π[1.25² + 1]²) = 0.09695; q_1/z = 1.875; 0.09695 · 1.875 = 0.18178. 모듈도 같은 값을 제시한다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

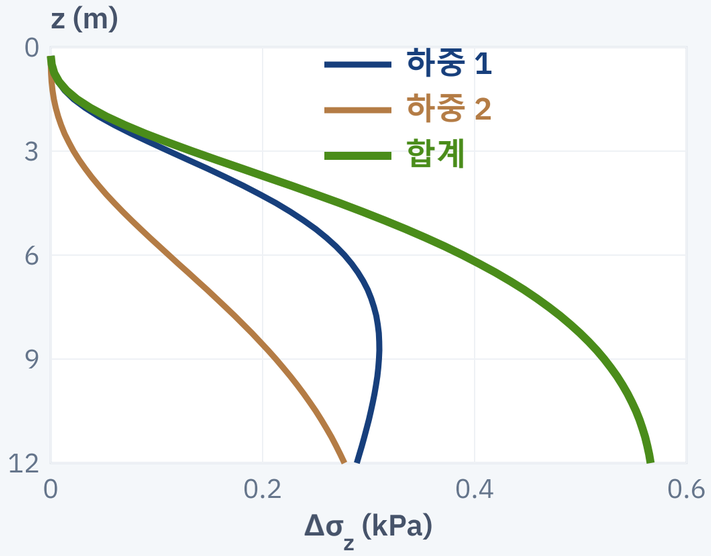
예제

조건

하중	**예제 1의 두 하중: $q_1 = 7.5$ kN/m ($x_L = 0$), $q_2 = 15$ kN/m ($x_L = -5$ m)**
점	**$x_A = 5$ m; $z = 1.2; 2.4;$ …; 12 m (모듈의 프로필 행)**

구하는 값

각 깊이에 대한 $\Delta\sigma_{z(1)}$, $\Delta\sigma_{z(2)}$와 합 $\Delta\sigma_z$; z = 8 m에 대한 상세 풀이; 최대 응력이 발생하는 깊이.



풀이 (1/2)

풀이

1 하중 1 (x = 5 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2(7.5)(8^3)}{\pi(5^2+8^2)^2} = \frac{7{,}680}{\pi\,(7{,}921)} = \mathbf{0.30863}\ \text{kPa}$$

2 하중 2 (x = 10 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(8^3)}{\pi(10^2+8^2)^2} = \frac{15{,}360}{\pi\,(26{,}896)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

3 합계

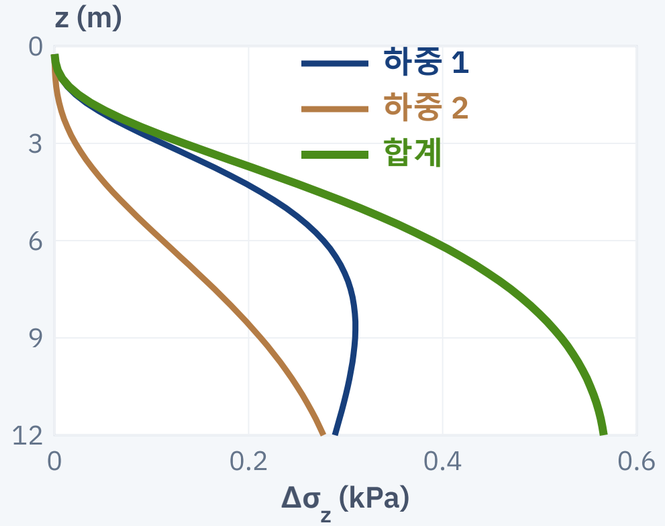
$$\Delta\sigma_z = 0.30863 + 0.18178 = \mathbf{0.49041}\ \text{kPa}$$

z = 8 m에서 $\Delta\sigma_z$ = 0.49041 kPa이며, z = 4 m의 값(0.22720 kPa)보다 훨씬 크다: A점은 하중의 옆에 있고 응력은 깊이에 따라 계속 증가한다(표는 다음 페이지).

풀이 (2/2)

풀이

z (m)	$\Delta\sigma_{z(1)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(2)}$ (kPa)	합계 $\Delta\sigma_z$ (kPa)
1.2	0.01180	0.00160	**0.01341**
2.4	0.06976	0.01180	**0.08156**
3.6	0.15460	0.03492	**0.18951**
4.8	0.22880	0.06976	**0.29856**
6.0	0.27716	0.11152	**0.38868**
7.2	0.30183	0.15460	**0.45643**
8.4	0.30990	0.19456	**0.50446**
9.6	0.30775	0.22880	**0.53655**
10.8	0.29981	0.25631	**0.55612**
12.0	0.28888	0.27716	**0.56604**



단일 하중에 의한 응력은 깊이 $z = \sqrt{3}\cdot x$에서 최대이며, 하중 1의 경우 8.66 m(0.3101 kPa)이다. 두 하중의 합은 12 m에서도 여전히 증가하고 있으며, 합계의 최댓값은 깊이 13.1 m에서 0.5687 kPa이다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

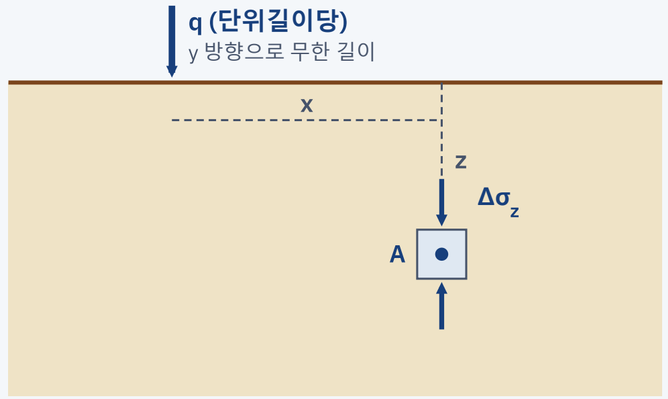
예제

조건

하중	$q = 20$ **kN/m, 연직 선하중**
점	$z = 3$ **m;** $x = 0; 1.5; 3; 4.5; 6$ **m**

구하는 값

각 점에 대해 **x/z**, **$\Delta\sigma_z/(q/z)$**, **$\Delta\sigma_z$**; x = z인 점의 값과 하중 아래 값의 비.



풀이 (1/2)

풀이

1 하중 아래 (x = 0): x/z = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(20)}{\pi(3)} = \mathbf{4.2441}\ \text{kPa}$$

2 x = 3 m: x/z = 1

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[1^2+1\right]^2} = \frac{2}{4\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915 \cdot \frac{20}{3} = 6.6667 \cdot 0.15915 = \mathbf{1.0610}\ \text{kPa}$$

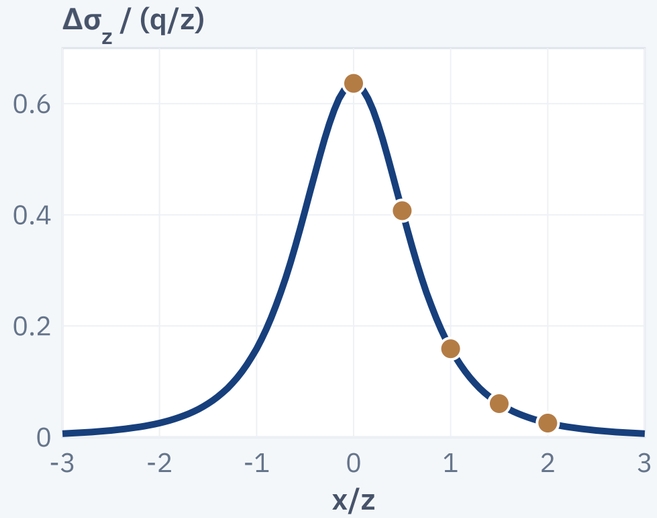
x/z = 1인 점에서 응력은 하중 바로 아래 값의 **4분의 1**이다(1.0610 / 4.2441 = 0.25).

풀이 (2/2)

풀이

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0.0	0.0	0.63662	4.2441
1.5	0.5	0.40744	2.7162
3.0	1.0	0.15915	**1.0610**
4.5	1.5	0.06027	0.4018
6.0	2.0	0.02546	0.1698

$\Delta\sigma_z/(q/z)$는 x/z에만 의존한다: 동일한 곡선을 모든 q와 모든 z에 사용한다. x/z = 2에서 응력은 하중 직하 응력의 0.04배이다(0.1698 kPa).



GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

예제

조건

하중	$q = 10$ kN/m; 선을 따라 h 간격으로 배치된 집중하중 $P = q\,h$ ($h = 8; 4; 2; 1$ m)
점 A	$x = 3$ m, $z = 4$ m (선의 수평 거리); Boussinesq: $\Delta\sigma_z = 3Pz^3/(2\pi L^5)$

구하는 값

집중하중들의 Boussinesq 응력의 합 (h = 2 m에 대해 항별로); h가 작아질수록 선하중 값에 접근.



풀이 (1/2)

풀이

1 $P = q\,h = 10(2) = 20$ kN; 각 하중에 대해 $L_k^2 = x^2 + y_k^2 + z^2 = 9 + y_k^2 + 16$

k	y_k (m)	$L_k^2 = 25 + y_k^2$	L_k (m)	$\Delta\sigma_{z,k}$ (kPa)	하중 수
0	0	25	5.000	0.19557	1
1	2	29	5.385	0.13494	2 (±k)
2	4	41	6.403	0.05678	2 (±k)
3	6	61	7.810	0.02103	2 (±k)
4	8	89	9.434	0.00818	2 (±k)
5	10	125	11.180	0.00350	2 (±k)

예제 항: $k = 0$: $\Delta\sigma_{z,0} = 3(20)(4^3)/[2\pi(5)^5] = 0.19557$ kPa; $|k| \le 5$의 합은 0.64443 kPa이고, $|k| \ge 6$에 대한 나머지는 0.00748 kPa이다.

풀이 (2/2)

풀이

h (m)	P = q h (kN)	집중하중들의 합 $\Delta\sigma_z$ (kPa)	차이 (%)
8	80	0.852175	30.72
4	40	0.660644	1.34
2	20	0.651907	0.0013
1	10	0.651899	< 0.0001
선하중		**0.651899**	0

선하중에 대해 $\Delta\sigma_z = 2q\,z^3/[\pi(x^2+z^2)^2] = 2(10)(4^3)/[\pi(25)^2] =$ **0.651899 kPa**이다. 집중하중을 $h \le z/2$처럼 조밀하게 취하면 합계는 이 값에 매우 가까워지고($h = 2$ m: 0.651907 kPa), $h = 8$ m와 같이 간격이 성기면 차이가 크다. 이는 선하중 공식이 집중하중 열의 적분임을 보여준다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

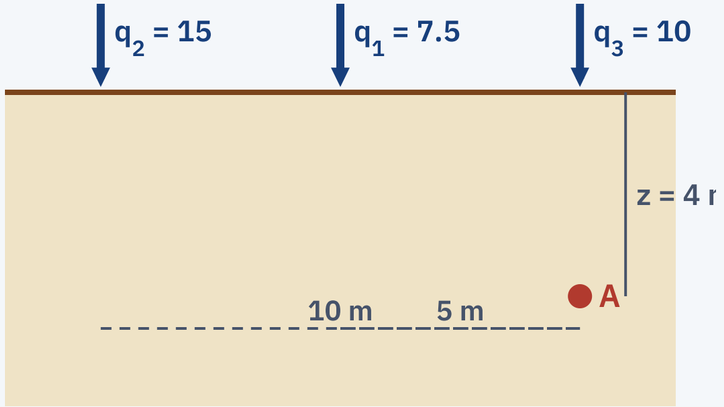
예제

조건

하중	$q_1 = 7.5$ kN/m ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ kN/m ($x_L = -5$ m); $q_3 = 10$ kN/m ($x_L = 5$ m)
점	A: $x_A = 5$ m, $z = 4$ m (하중 3의 바로 아래); $z = 4$ m에서 $x = -7.5 \ldots 7.5$ m

구하는 값

A점에서 각 하중의 기여분과 전체 $\Delta\sigma_z$; 깊이 z = 4 m에서 x 방향을 따른 전체 응력.



풀이 (1/2)

풀이

1 하중 3 (x = 5 – 5 = 0): A는 하중 바로 아래에 있다

$$\Delta\sigma_{z(3)} = \frac{2q_3}{\pi z} = \frac{2(10)}{\pi(4)} = \mathbf{1.59155}\ \text{kPa}$$

2 하중 1 (x = 5 m) 및 하중 2 (x = 10 m): 예제 1의 값

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542\ \text{kPa}$$

3 중첩

$$\Delta\sigma_z = 1.59155 + 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{1.81875}\ \text{kPa}$$

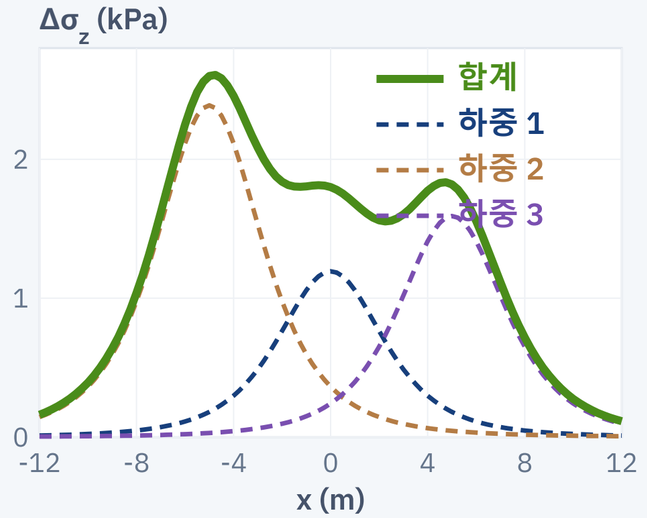
하중 3이 합계의 **87.5%**를 차지한다. 선하중 아래에서는 자신의 응력이 지배적이고 멀리 있는 하중의 기여는 작다. 세 번째 하중은 예제 1의 0.2272 kPa에 1.592 kPa를 더한다.

풀이 (2/2)

풀이

x (m)	하중 1	하중 2	하중 3	합계 $\Delta\sigma_z$ (kPa)
−7.5	0.0585	1.2345	0.0137	1.3068
−5.0	0.1818	2.3873	0.0303	2.5994
−2.5	0.6173	1.2345	0.0781	1.9298
0.0	1.1937	0.3636	0.2424	1.7996
2.5	0.6173	0.1171	0.8230	1.5573
5.0	0.1818	0.0454	1.5915	**1.8188**
7.5	0.0585	0.0206	0.8230	0.9021

합산 곡선은 각 하중 부근에서 정점을 보인다(x ≈ −4.75; −0.50; 4.75 m); 정점은 이웃한 하중의 꼬리 영향으로 약간 이동한다. 가장 높은 정점은 가장 큰 하중(하중 2, 15 kN/m) 부근이며, x = −5 m에서 **2.5994 kPa**이다; A점(x = 5 m)에서는 1.8188 kPa이다.



GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

예제

조건

하중	**선하중 $q = 50$ kN/m; 집중하중 $P = 50$ kN**
점	**하중 아래 ($x = 0, r = 0$); $z = 1; 2; 3; 5; 10$ m**

구하는 값

두 하중 유형에 대한 축 아래의 **$\Delta\sigma_z$**와 깊이에 따른 감소 속도.

풀이

풀이

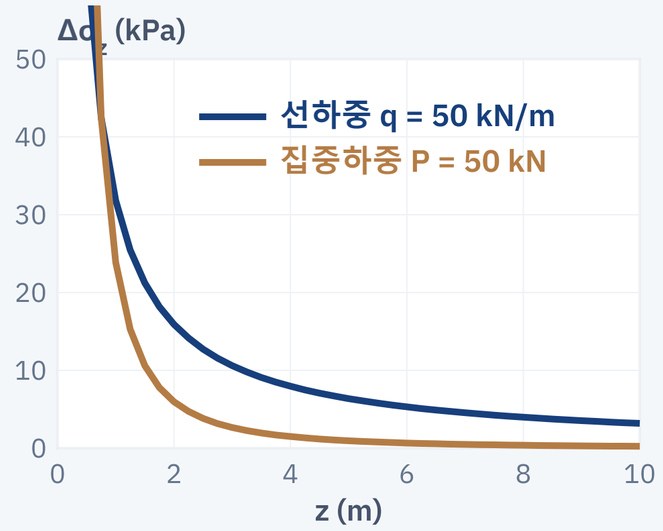
1 z = 5 m

$$\text{선하중: } \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(50)}{\pi(5)} = \mathbf{6.366}\ \text{kPa}$$

$$\text{단일: } \Delta\sigma_z = \frac{3}{2\pi}\frac{P}{z^2} = 0.4775\,\frac{50}{5^2} = \mathbf{0.955}\ \text{kPa}$$

z (m)	선하중: 2q/(πz) (kPa)	집중하중: 0.4775 P/z² (kPa)	비율
1	31.831	23.873	1.3
2	15.915	5.968	2.7
3	10.610	2.653	4.0
5	6.366	0.955	6.7
10	3.183	0.239	13.3

z가 1 → 10 m로 변하면 선하중에 의한 응력은 **10배**(31.83 → 3.18 kPa), 집중하중에 의한 응력은 **100배**(23.87 → 0.24 kPa) 감소한다.



GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

요약

핵심 정리

선하중(평면변형률): $\Delta\sigma_z = 2q\,z^3/[\pi(x^2+z^2)^2] = (q/z)\cdot 2/\{\pi[(x/z)^2+1]^2\}$; 하중 직하에서 $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\,q/z$

집중하중 열: $dP = q\,dy$인 집중하중의 Boussinesq 응력을 합산한다; 간격 $h = 2$ m의 집중하중은 0.65191 kPa, 선하중은 0.65190 kPa이다

예제($q_1 = 7.5$ kN/m, $q_2 = 15$ kN/m; A: $x = 5$, $z = 4$ m): $\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178$; $\Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542$; **$\Delta\sigma_z = 0.22720$ kPa**

무차원 곡선: $x/z = 1$에서의 값은 하중 바로 아래 값의 4분의 1이다; **중첩**: 각 하중의 응력은 해당 하중의 수평 거리로 구하여 합산한다(하중 3개일 때 A점에서 1.8188 kPa)

깊이: 하중 아래에서 응력은 $1/z$에 따라 감소하며(집중하중에서는 $1/z^2$), 하중 옆의 점에서는 응력이 $z = \sqrt{3}\cdot x$ 깊이까지 증가한다

참고문헌

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels… Gauthier-Villars, Paris.

참고

수치 예제는 모두 모듈 자체의 계산 엔진으로 산출하였으며, 모듈도 같은 값을 제시한다. 모듈의 초기 예제는 두 선하중(7.5 및 15 kN/m)과 A점(x = 5 m, z = 4 m)이다.

GeoTerva

온라인 지반공학 계산

이론에서 실무로

사용자의 선하중과 그 위치, 검토할 점을 GeoTerva에 입력하면 모듈이 각 하중의 기여분, 전체 $\Delta\sigma_z$ 값, 깊이별 분포, 등응력선, 단계별 풀이, 보고서를 함께 제공한다.

모듈 열기 →

이론 페이지 →

스마트폰으로 열기

체험 모듈은 가입 없이 이용할 수 있습니다.