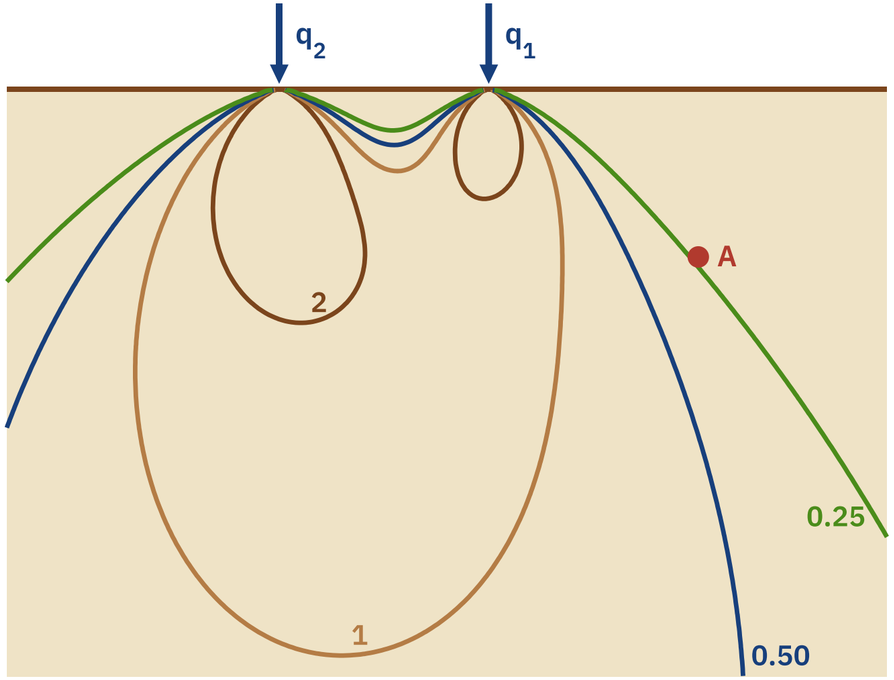
地盤工学の講義資料・地盤中の応力分布

# 鉛直線荷重下の応力

講義：地表面の鉛直線荷重が地盤中に生じさせる鉛直応力。開始点を端から端まで手計算し、深さ方向および水平方向の分布を表で示す。

平面ひずみ　無次元曲線　重ね合わせ　集中荷重の順序　等応力曲線



はじめに

# この講義で学ぶこと

線荷重を**平面ひずみ**状態で考える：応力は直下の水平距離**x**と深さ**z**のみに依存する

線荷重を**集中荷重の列**として集計することにより、$\Delta\sigma_z = 2qz^3/[\pi(x^2+z^2)^2]$ の関係を

集中荷重との違い：荷重軸直下では応力は**1/z**でのみ減少し、$\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\,q/z$

**無次元表示**：単一の $\Delta\sigma_z/(q/z)$ 曲線とx/zの表；複数の平行荷重には**重ね合わせ**を適用する

モジュールの初期例（2本の線荷重）を**端から端まで手計算**で；深さ方向および水平方向の変化を表に示す

### 講義の流れ

各項目は**3つの手順**で扱う：

1 · **理論**：式とその根拠

2 · **問題**：与条件と求めるもの

3 · **解答**：数値を用いて手順ごとに

例：$q_1 = 7.5$ kN/m（$x = 0$）および$q_2 = 15$ kN/m（$x = -5$ m）；点A：$x = 5$ m、$z = 4$ m。

# 無限直線に沿う単位長さ当たりの荷重

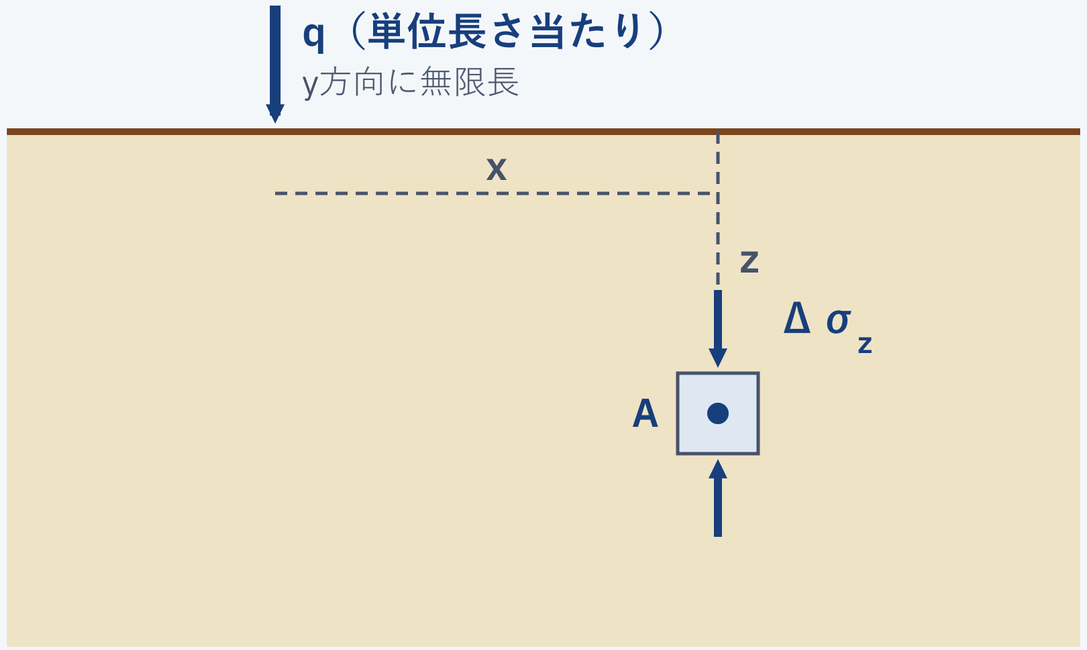
理論

**線荷重**とは、地表面に沿って無限に長い直線上に作用する、単位長さ当たり q の大きさの荷重である。長い壁、レール、あるいは幅が無視できるほど狭い帯状のものである。

直線に直交する各断面が同じように載荷されるため、応力は**平面ひずみ**状態にあり、水平距離xと深さzのみに依存する。

載荷重は柔軟で鉛直、y方向に無限の長さをもつ。地盤は均質・等方・線形弾性の半無限体と仮定する。

$\Delta \sigma_z$は荷重による増分であり；その点より上の地盤の上載荷重は含まれていない。



# 1列の集中荷重から線荷重へ

理論

線荷重は、y方向に並んだdP = q dyの集中荷重の列と考えることができる。

各集中荷重は$r^2 = x^2 + y^2$を用いてBoussinesq応力を与える。これらの寄与を線に沿って合計すると、積分の閉形式の値は$4/[3(x^2 + z^2)^2]$となる。

$$\Delta\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3q\,z^3}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} = \frac{4}{3\left(x^2+z^2\right)^2} \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{2q\,z^3}{\pi\left(x^2+z^2\right)^2}$$

集中荷重と異なり、応力は深さとともに1/zの割合でしか減少しない：軸上で$\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\,q/z$。

# Δ σz/(q/z)とx/z

理論

zで除し、x/zを代入すると、式は各線荷重に対して単一の曲線を与える無次元の形になる。

したがって、x/zの各値に対して単一のΔ σz/(q/z)曲線を用いる。

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

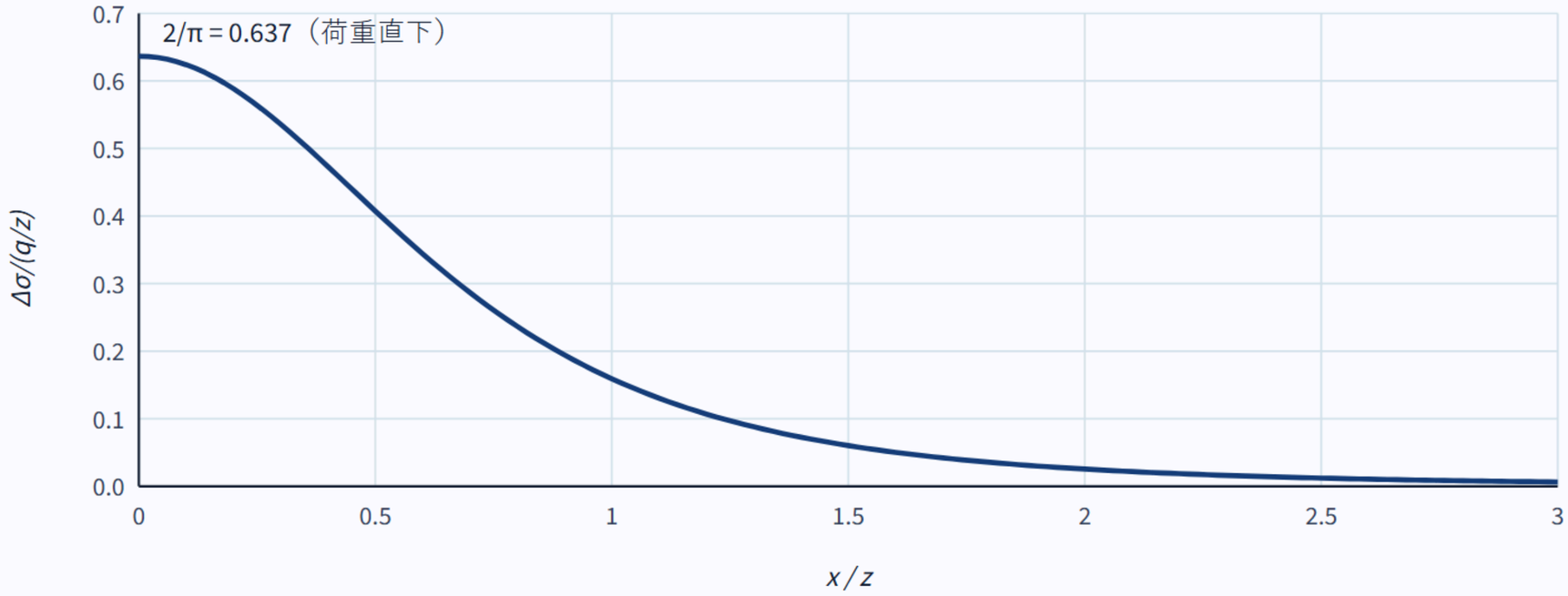
$$x = 0: \qquad \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = 0.637\,\frac{q}{z}$$

Δ σz/(q/z) の値（モジュール）

| x/z | Δ σz/(q/z) | x/z | Δ σz/(q/z) |
|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.637 | 1.0 | 0.159 |
| 0.1 | 0.624 | 1.2 | 0.107 |
| 0.2 | 0.589 | 1.4 | 0.073 |
| 0.3 | 0.536 | 1.6 | 0.050 |
| 0.4 | 0.473 | 1.8 | 0.035 |
| 0.5 | 0.407 | 2.0 | 0.025 |
| 0.6 | 0.344 | 2.4 | 0.014 |
| 0.7 | 0.287 | 2.8 | 0.008 |
| 0.8 | 0.237 | 3.0 | 0.006 |
| 0.9 | 0.194 | 3.5 | 0.004 |

# Δ σz/(q/z)とx/z

理論




式によるΔ σz/(q/z)とx/zの関係。x/z = 1では荷重直下の値の4分の1となり、x/z = 3を超えると0.01を下回る。

# 重ね合わせ

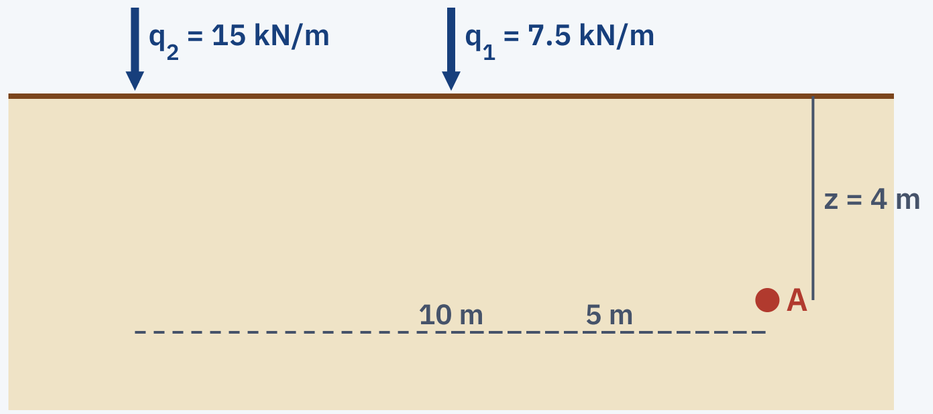
理論

地盤は弾性であるため、複数の線荷重による応力は重ね合わせで合計する。

点Aにおける応力は、各荷重が点Aまでのそれぞれの水平距離を用いて単独で生じさせる応力の和である。

モジュールは最大8本の平行な線状荷重を受け付ける；荷重はその強度と位置を**線状荷重を追加**により1本ずつ入力し、2本が同じ位置にあってはならない。

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{2\,q_k\,z^3}{\pi\left(x_k^2 + z^2\right)^2}$$



# 問題

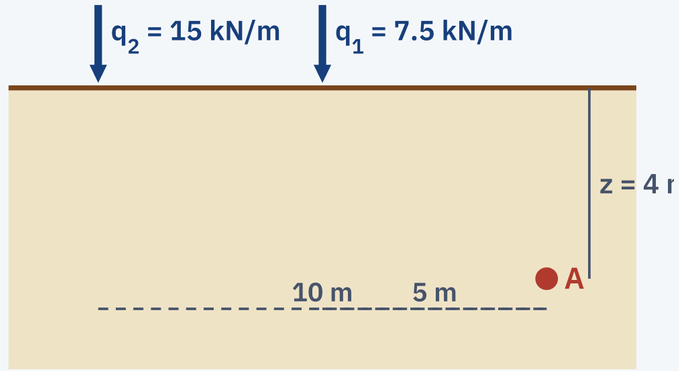
例題

## 与条件

| | |
|---|---|
| 荷重 | $q_1 = 7.5$ kN/m ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ kN/m ($x_L = -5$ m) |
| 点A | $x_A = 5$ m、$z = 4$ m（荷重1から5 m、荷重2から10 mの距離） |
| 地盤 | 均質な弾性半無限体；平面ひずみ |

## 求めるもの

各荷重が点Aに生じさせる$\Delta\sigma_z$、および重ね合わせによる全$\Delta\sigma_z$。



# 解答

解答

**1** 荷重1：x = $x_A - x_L$ = 5 − 0 = 5 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2q_1 z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(7.5)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{960}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

**2** 荷重2：x = 5 − (−5) = 10 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}920}{\pi\,(13{,}456)} = \mathbf{0.04542}\ \text{kPa}$$

**3** 重ね合わせ（地盤を弾性と仮定：応力を加算する）

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{0.22720}\ \text{kPa}$$

**Δ $\sigma_z$ = 0.22720 kPa**。荷重2は2倍の大きさであるがAから2倍離れているため、その応力は合計の約5分の1である（比0.20）。荷重1について照査する：x/z = 1.25 ⇒ 2/(π [1.25² + 1]²) = 0.09695；$q_1$/z = 1.875；0.09695 · 1.875 = 0.18178。モジュールも同じ値を与える。

GeoTervaで解答を確認する ↗

# 問題

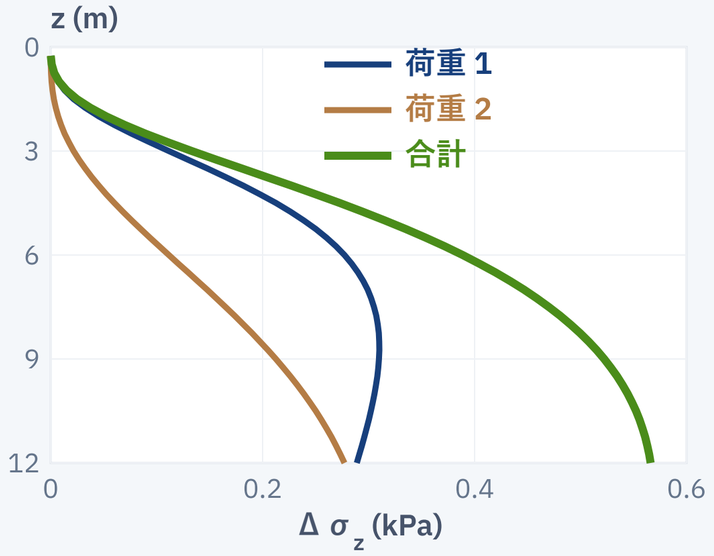
例題

## 与条件

| | |
|---|---|
| 荷重 | **例題1の2つの荷重：$q_1 = 7.5$ kN/m（$x_L = 0$）、$q_2 = 15$ kN/m（$x_L = -5$ m）** |
| 点 | $x_A = 5$ m；$z = 1.2$；$2.4$；…；$12$ m（**モジュールの土層構成行**） |

## 求めるもの

各深さにおける $\Delta\sigma_{z(1)}$、$\Delta\sigma_{z(2)}$および合計 $\Delta\sigma_z$；z = 8 mに対する詳細な解答；最大応力の深さ。



# 解答 (1/2)

解答

**1** 荷重1（x = 5 m）：z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2(7.5)(8^3)}{\pi(5^2+8^2)^2} = \frac{7{,}680}{\pi\,(7{,}921)} = \mathbf{0.30863}\ \text{kPa}$$

**2** 荷重2（x = 10 m）：z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(8^3)}{\pi(10^2+8^2)^2} = \frac{15{,}360}{\pi\,(26{,}896)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

**3** 合計

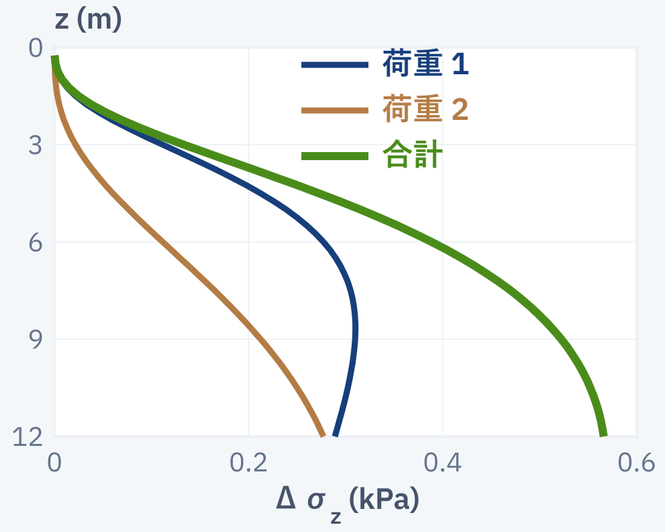
$$\Delta\sigma_z = 0.30863 + 0.18178 = \mathbf{0.49041}\ \text{kPa}$$

z = 8 mで Δ $\sigma_z$ = 0.49041 kPaであり、z = 4 mの値（0.22720 kPa）よりはるかに大きい。A点は荷重のそばにあり、応力は深部で増加し続ける（表は次ページ）。

# 解答 (2/2)

解答

| z (m) | Δ $\sigma_{z(1)}$ (kPa) | Δ $\sigma_{z(2)}$ (kPa) | 全Δ $\sigma_z$ (kPa) |
|---|---|---|---|
| 1.2 | 0.01180 | 0.00160 | **0.01341** |
| 2.4 | 0.06976 | 0.01180 | **0.08156** |
| 3.6 | 0.15460 | 0.03492 | **0.18951** |
| 4.8 | 0.22880 | 0.06976 | **0.29856** |
| 6.0 | 0.27716 | 0.11152 | **0.38868** |
| 7.2 | 0.30183 | 0.15460 | **0.45643** |
| 8.4 | 0.30990 | 0.19456 | **0.50446** |
| 9.6 | 0.30775 | 0.22880 | **0.53655** |
| 10.8 | 0.29981 | 0.25631 | **0.55612** |
| 12.0 | 0.28888 | 0.27716 | **0.56604** |




単一荷重では応力は深さz = √3·xで最大となる：荷重1では8.66 m（0.3101 kPa）。2つの荷重の合計は12 mでもなお増加しており、最大合計は深さ13.1 mで0.5687 kPaである。

GeoTervaで解答を確認する ↗

# 問題

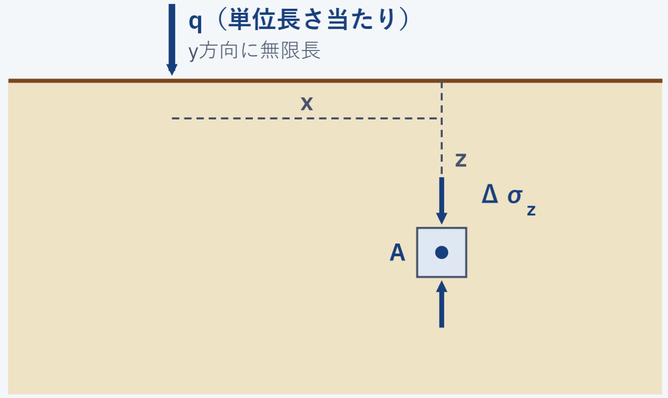
例題

## 与条件

| | |
|---|---|
| 荷重 | $q = 20$ kN/m、鉛直線荷重 |
| 点 | $z = 3$ m; $x = 0; 1.5; 3; 4.5; 6$ m |

## 求めるもの

各点について**x/z**、**Δ $\sigma_z$/(q/z)**および**Δ $\sigma_z$**；x = zの点における値の、荷重下の値に対する比。



# 解答 (1/2)

解答

**1** 荷重直下（x = 0）：x/z = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(20)}{\pi(3)} = \mathbf{4.2441}\ \text{kPa}$$

**2** x = 3 m: x/z = 1

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[1^2+1\right]^2} = \frac{2}{4\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915 \cdot \frac{20}{3} = 6.6667 \cdot 0.15915 = \mathbf{1.0610}\ \text{kPa}$$

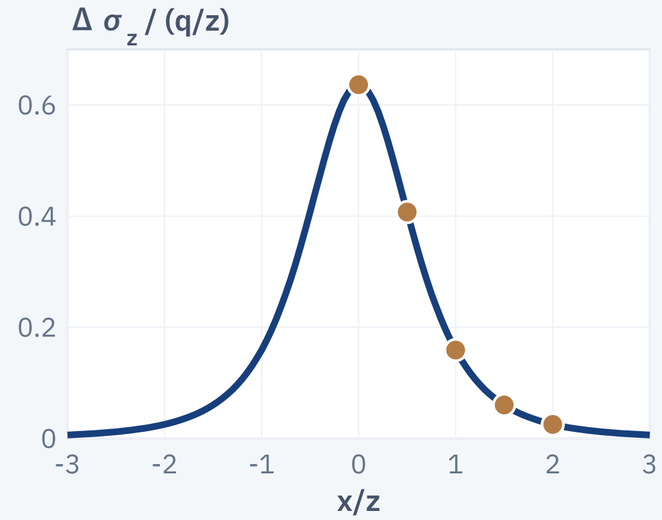
x/z = 1の点における応力は、荷重直下の**4分の1**である（1.0610 / 4.2441 = 0.25）。

# 解答 (2/2)

解答

| x (m) | x/z | $\Delta\sigma_z/(q/z)$ | $\Delta\sigma_z$ (kPa) |
|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0 | 0.63662 | 4.2441 |
| 1.5 | 0.5 | 0.40744 | 2.7162 |
| 3.0 | 1.0 | 0.15915 | **1.0610** |
| 4.5 | 1.5 | 0.06027 | 0.4018 |
| 6.0 | 2.0 | 0.02546 | 0.1698 |

$\Delta\sigma_z/(q/z)$はx/zのみに依存する：同じ曲線をすべてのqとすべてのzに用いる。x/z = 2では応力は荷重直下の0.04倍である（0.1698 kPa）。




GeoTervaで解答を確認する ↗

# 問題

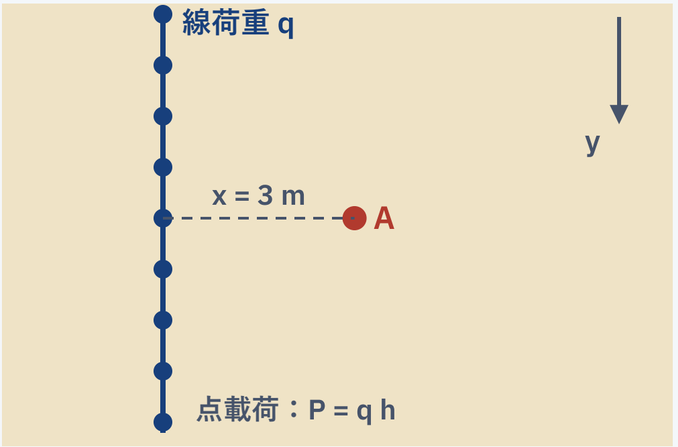
例題

## 与条件

| | |
|---|---|
| 荷重 | $q = 10$ kN/m；線に沿って$h$間隔の集中荷重$P = q\,h$（$h = 8$；$4$；$2$；$1$ m） |
| 点A | $x = 3$ m、$z = 4$ m（線荷重の水平距離）；Boussinesq：$\Delta\sigma_z = 3Pz^3/(2\pi L^5)$ |

## 求めるもの

集中荷重のBoussinesq応力の合計（h = 2 mについて項ごとに）。hが小さくなるにつれて線荷重の値に近づく。



# 解答 (1/2)

解答

1 $P = q\,h = 10(2) = 20$ kN。各荷重について$L_k^2 = x^2 + y_k^2 + z^2 = 9 + y_k^2 + 16$

| k | $y_k$ (m) | $L_k^2 = 25 + y_k^2$ | $L_k$ (m) | $\Delta\,\sigma_{z,k}$ (kPa) | 載荷重の数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 25 | 5.000 | 0.19557 | 1 |
| 1 | 2 | 29 | 5.385 | 0.13494 | 2 (±k) |
| 2 | 4 | 41 | 6.403 | 0.05678 | 2 (±k) |
| 3 | 6 | 61 | 7.810 | 0.02103 | 2 (±k) |
| 4 | 8 | 89 | 9.434 | 0.00818 | 2 (±k) |
| 5 | 10 | 125 | 11.180 | 0.00350 | 2 (±k) |

計算例の項：k = 0：$\Delta\,\sigma_{z,0} = 3(20)(4^3)/[2\,\pi\,(5)^5] = 0.19557$ kPa。$|k| \le 5$の総和は0.64443 kPa、$|k| \ge 6$の残りは0.00748 kPa。

# 解答 (2/2)

解答

| h (m) | P = q h (kN) | 個々の荷重の総和 $\Delta \sigma_z$ (kPa) | 差 (%) |
|---|---|---|---|
| 8 | 80 | 0.852175 | 30.72 |
| 4 | 40 | 0.660644 | 1.34 |
| 2 | 20 | 0.651907 | 0.0013 |
| 1 | 10 | 0.651899 | < 0.0001 |
| **線荷重** | | **0.651899** | 0 |

線荷重に対して $\Delta \sigma_z = 2q z^3/[\pi (x^2 + z^2)^2] = 2(10)(4^3)/[\pi (25)^2]$ = **0.651899 kPa**。集中荷重を $h \le z/2$のように密に取ると、合計はこの値に非常に近づく（h = 2 m：0.651907 kPa）。しかしh = 8 mのような粗い間隔では差が大きい。これは線荷重の式が集中荷重列の積分であることを示す。

GeoTervaで解答を確認する ↗

# 問題

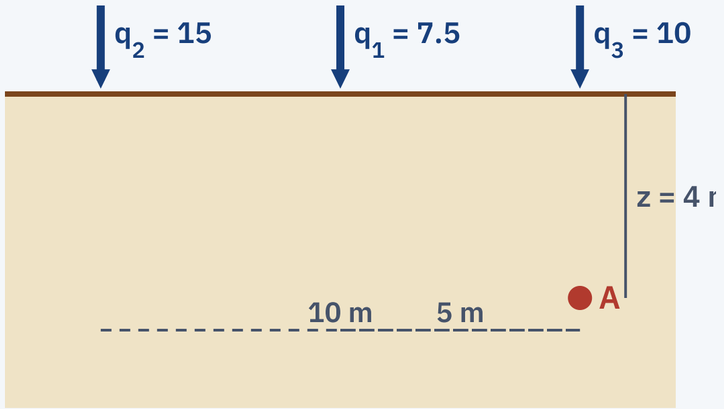
例題

## 与条件

| | |
|---|---|
| 荷重 | $q_1 = 7.5$ kN/m ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ kN/m ($x_L = -5$ m); $q_3 = 10$ kN/m ($x_L = 5$ m) |
| 点 | A：$x_A = 5$ m、$z = 4$ m（載荷重3の直下）；$z = 4$ mでは$x = -7.5 \ldots 7.5$ m |

## 求めるもの

点Aにおける各荷重の寄与と合計$\Delta \sigma_z$；深さz = 4 mにおけるx方向の全応力。



# 解答 (1/2)

解答

**1** 荷重3（x = 5 − 5 = 0）：Aは荷重の直下にある

$$\Delta\sigma_{z(3)} = \frac{2q_3}{\pi z} = \frac{2(10)}{\pi(4)} = \mathbf{1.59155}\ \text{kPa}$$

**2** 荷重1（x = 5 m）と荷重2（x = 10 m）：例題1の値

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542\ \text{kPa}$$

**3** 重ね合わせ

$$\Delta\sigma_z = 1.59155 + 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{1.81875}\ \text{kPa}$$

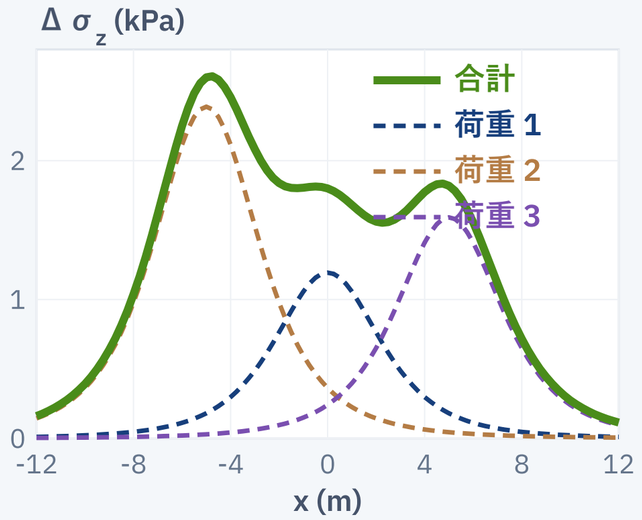
荷重3は合計の**87.5パーセント**を与える：線荷重の直下ではそれ自身の応力が支配的であり、遠方の荷重は小さな寄与しかなさない。第3の荷重は例題1の0.2272 kPaの値に1.592 kPaを加える。

# 解答 (2/2)

解答

| x (m) | 荷重 1 | 荷重 2 | 荷重 3 | 全 $\Delta\sigma_z$ (kPa) |
|---|---|---|---|---|
| −7.5 | 0.0585 | 1.2345 | 0.0137 | 1.3068 |
| −5.0 | 0.1818 | 2.3873 | 0.0303 | 2.5994 |
| −2.5 | 0.6173 | 1.2345 | 0.0781 | 1.9298 |
| 0.0 | 1.1937 | 0.3636 | 0.2424 | 1.7996 |
| 2.5 | 0.6173 | 0.1171 | 0.8230 | 1.5573 |
| 5.0 | 0.1818 | 0.0454 | 1.5915 | **1.8188** |
| 7.5 | 0.0585 | 0.0206 | 0.8230 | 0.9021 |

合計曲線は各荷重の近くにピークを示す（x ≈ −4.75、−0.50、4.75 m）。ピークは隣接荷重の裾の影響でわずかに移動する。最も高いピークは最も大きい荷重（荷重2、15 kN/m）の周辺にあり、x = −5 mで**2.5994 kPa**、点A（x = 5 m）では1.8188 kPaである。




GeoTervaで解答を確認する ↗

# 問題

例題

**与条件**

| | |
|---|---|
| 荷重 | **線荷重$q = 50$ kN/m；集中荷重$P = 50$ kN** |
| 点 | **載荷部直下（$x = 0$、$r = 0$）；$z = 1$；$2$；$3$；$5$；$10$ m** |

**求めるもの**

2種類の荷重に対する軸下の$\Delta \sigma_z$と、深さに伴う減少の速さ。

# 解答

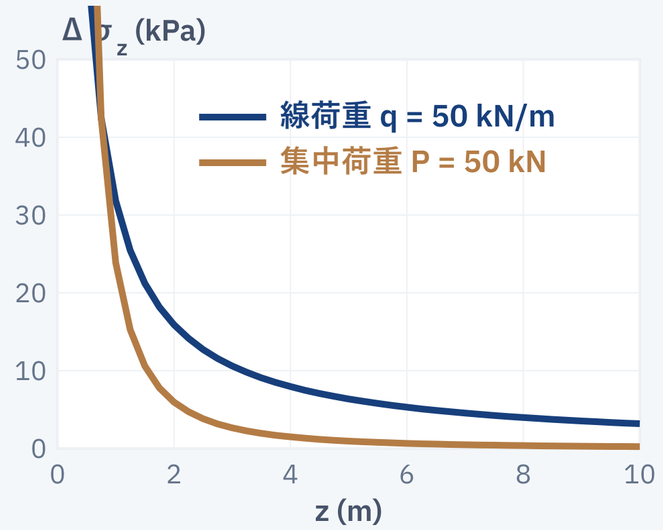
解答

**1** z = 5 m

$$\text{線状：}\ \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(50)}{\pi(5)} = \mathbf{6.366}\ \text{kPa}$$

$$\text{単独：}\ \Delta\sigma_z = \frac{3}{2\pi}\frac{P}{z^2} = 0.4775\,\frac{50}{5^2} = \mathbf{0.955}\ \text{kPa}$$

| z (m) | 線状荷重：2q/(π z) (kPa) | 集中荷重：0.4775 P/z² (kPa) | 比 |
|---|---|---|---|
| 1 | 31.831 | 23.873 | 1.3 |
| 2 | 15.915 | 5.968 | 2.7 |
| 3 | 10.610 | 2.653 | 4.0 |
| 5 | 6.366 | 0.955 | 6.7 |
| 10 | 3.183 | 0.239 | 13.3 |




zが1 → 10 mになると、線荷重による応力は**10倍**（31.83 → 3.18 kPa）、集中荷重による応力は**100倍**（23.87 → 0.24 kPa）減少する。

GeoTervaで解答を確認する ↗

まとめ

# ポイントのまとめ

**線荷重**（平面ひずみ）：$\Delta\sigma_z = 2q\,z^3/[\pi(x^2+z^2)^2] = (q/z)\cdot 2/\{\pi[(x/z)^2+1]^2\}$；荷重直下では$\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\,q/z$

**集中荷重の列**：dP = q dyの集中荷重によるBoussinesq応力を合計する；h = 2 m間隔の集中荷重は0.65191 kPaを与え、線荷重は0.65190 kPaとなる

**例題（$q_1$ = 7.5 kN/m、$q_2$ = 15 kN/m、A点：x = 5、z = 4 m）**：$\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178$、$\Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542$、**$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa**

**無次元曲線**：x/z = 1 のとき値は荷重直下の4分の1である；**重ね合わせ**：各荷重による応力はそれぞれの水平距離を用いて求め、合計する（3つの荷重の場合、A点で1.8188 kPa）

**深さ**：荷重下の応力は1/zで減少する（集中荷重では$1/z^2$）。荷重の側方の点では応力は$z = \sqrt{3}\cdot x$の深さまで増大する。

# 参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels... Gauthier-Villars, Paris.

**注記**

数値例はすべてモジュール自身の計算エンジンで作成された；モジュールは同じ値を与える。モジュールは2つの線荷重（7.5および15 kN/m）と点A（x = 5 m、z = 4 m）で開く。

GeoTerva

オンライン地盤工学計算

# 理論から実務へ

自身の線荷重、その位置および着目点をGeoTervaに入力する；モジュールは各荷重の寄与、合計の $\Delta\sigma_z$ 値、深さ方向の分布、等応力曲線、手順ごとの解答およびレポートをまとめて出力する。

**モジュールを開く →**

**理論ページ →**

**スマートフォンで開く**
お試しモジュールは登録不要です。

講義で使用したい場合：info@geoterva.com