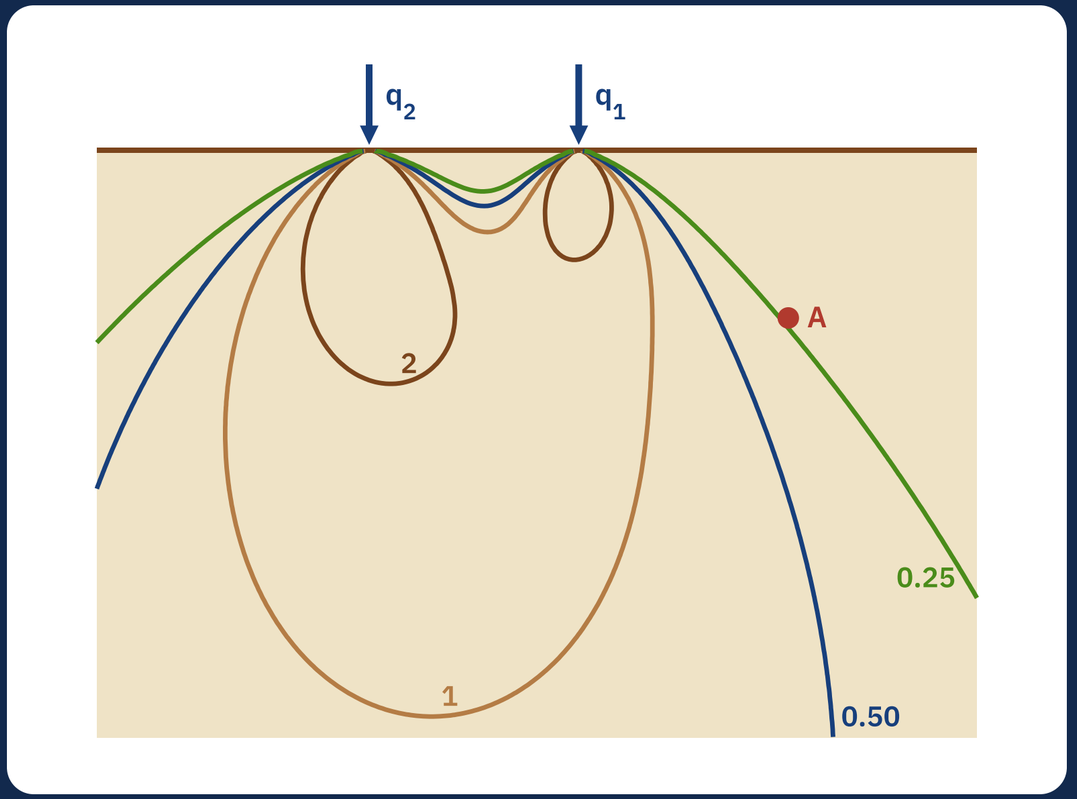
Presentazione didattica di geotecnica · Distribuzione delle tensioni nel terreno

Tensione sotto un carico lineare verticale

Lezione: tensione verticale indotta nel terreno da un carico lineare verticale in superficie; il punto di apertura svolto a mano dall'inizio alla fine, profili di profondità e laterali con tabelle.

- Deformazione piana
- Curva adimensionale
- Sovrapposizione
- Sequenza di carichi concentrati
- Curve isostatiche



Introduzione

Che cosa si impara in questa lezione?

- Il carico lineare in **deformazione piana**: la tensione dipende solo dalla distanza orizzontale **x** direttamente al di sotto e dalla profondità **z**
- Sommando il carico lineare come una **serie di carichi concentrati**, la relazione $\Delta\sigma_z = 2qz^3/[\pi(x^2 + z^2)^2]$
- Differenza rispetto al carico concentrato: lungo l'asse del carico la tensione diminuisce solo con **1/z**, $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$
- **Forma adimensionale**: un'unica curva $\Delta\sigma_z/(q/z)$ e una tabella x/z; **sovrapposizione** per più carichi paralleli
- L'esempio iniziale del modulo (due carichi lineari) **dall'inizio alla fine a mano**; la variazione in profondità e in direzione laterale in tabelle

SVOLGIMENTO DELLA LEZIONE

Ogni argomento è trattato in **tre passaggi**:

1 · **Teoria**: formula e relativa motivazione

2 · **Traccia**: dati e richiesto

3 · **Soluzione**: passo per passo, con i numeri

Esempio: q_1 = 7.5 kN/m (x = 0) e q_2 = 15 kN/m (x = −5 m); punto A: x = 5 m, z = 4 m.

Carico per unità di lunghezza lungo una linea infinita

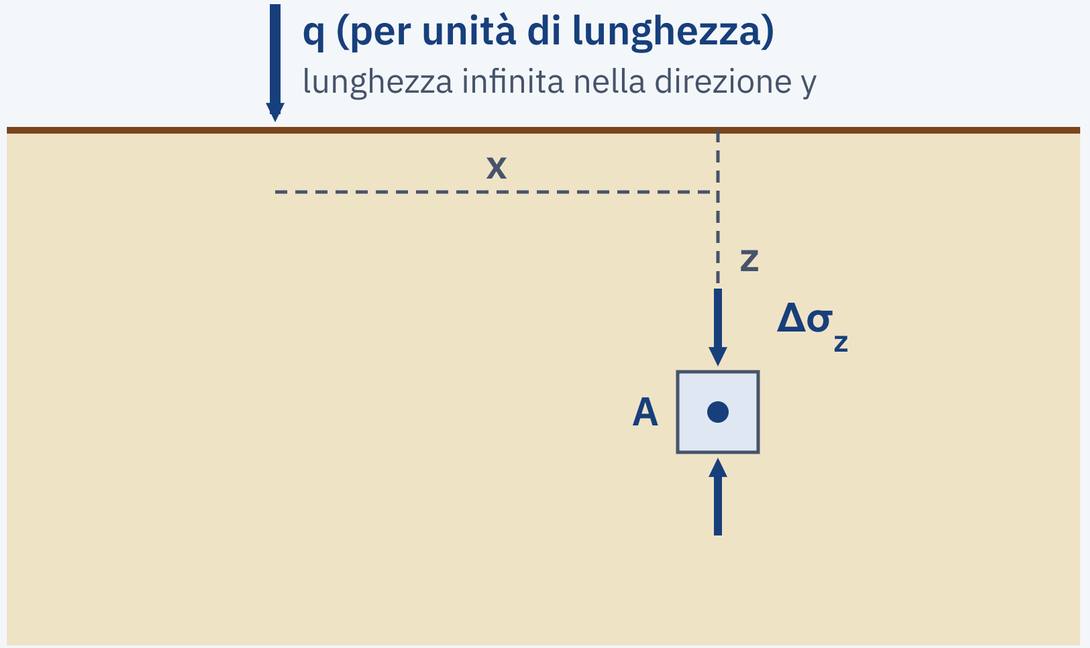
TEORIA

Un carico lineare è un carico di intensità q per unità di lunghezza agente lungo una linea infinitamente lunga sulla superficie: un muro lungo, una rotaia o una striscia così stretta che la sua larghezza può essere trascurata.

Poiché ogni sezione perpendicolare alla linea è caricata allo stesso modo, le tensioni si trovano in uno stato di **deformazione piana** e dipendono soltanto dalla distanza orizzontale x e dalla profondità z.

Il carico è flessibile, verticale e di lunghezza infinita nella direzione y; il terreno è assunto come semispazio omogeneo, isotropo e elastico lineare.

$\Delta\sigma_z$ è l'incremento dovuto al carico; il sovraccarico del terreno al di sopra del punto non è incluso.



Da una fila di carichi concentrati al carico lineare

TEORIA

Un carico lineare può essere considerato come una fila di carichi concentrati dP = q dy disposti lungo y.

Ogni carico concentrato fornisce la tensione di Boussinesq con $r^2 = x^2 + y^2$; sommando tali contributi lungo la linea, il valore in forma chiusa dell'integrale diventa $4/[3(x^2 + z^2)^2]$.

$$\Delta\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3q\,z^3}{2\pi\,(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{4}{3\,(x^2+z^2)^2} \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{2q\,z^3}{\pi\,(x^2+z^2)^2}$$

A differenza di un carico concentrato, la tensione diminuisce con la profondità solo come 1/z: sull'asse $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$.

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ e x/z

TEORIA

Dividendo per z e sostituendo x/z, l'equazione assume una forma adimensionale che fornisce un'unica curva per ciascun carico lineare.

Pertanto si utilizza un'unica curva **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** per ogni valore di x/z.

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

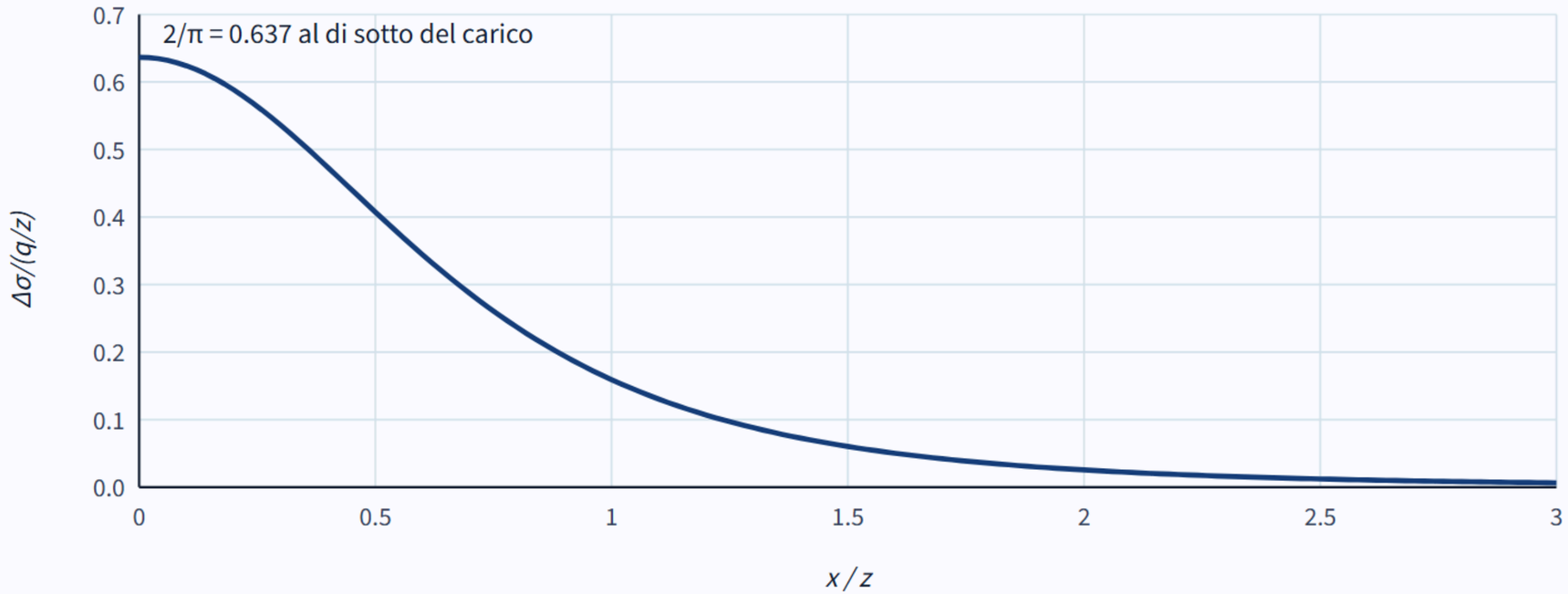
$$x = 0: \qquad \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = 0.637\,\frac{q}{z}$$

VALORI DI $\Delta\sigma_z/(q/z)$ (MODULO)

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.0	0.637	1.0	0.159
0.1	0.624	1.2	0.107
0.2	0.589	1.4	0.073
0.3	0.536	1.6	0.050
0.4	0.473	1.8	0.035
0.5	0.407	2.0	0.025
0.6	0.344	2.4	0.014
0.7	0.287	2.8	0.008
0.8	0.237	3.0	0.006
0.9	0.194	3.5	0.004

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ in funzione di x/z

TEORIA



Δσz/(q/z) in funzione di x/z ricavato dall'equazione. Per x/z = 1 il valore si riduce a un quarto di quello registrato sotto il carico; oltre x/z = 3 risulta inferiore a 0.01.

Sovrapposizione

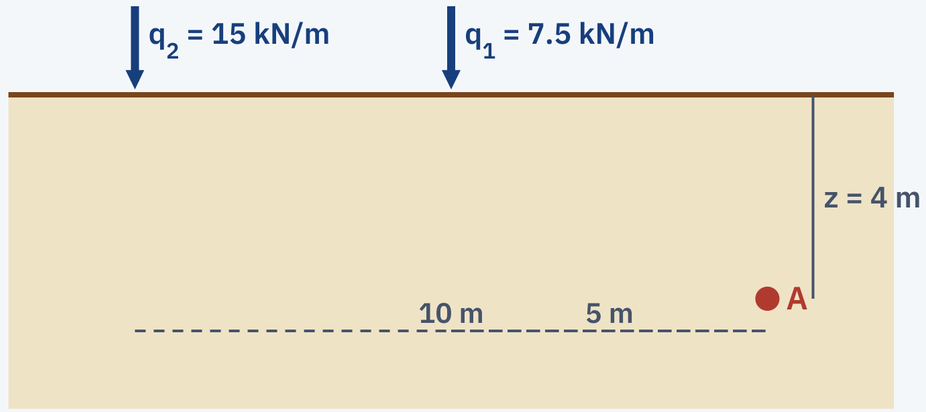
TEORIA

Poiché il terreno è elastico, le tensioni di più carichi lineari si sommano per sovrapposizione.

La tensione nel punto A è la somma delle tensioni prodotte singolarmente da ciascun carico, utilizzando la propria distanza orizzontale dal punto A.

Il modulo accetta al massimo otto carichi lineari paralleli; i carichi si inseriscono uno per uno con le loro intensità e posizioni tramite **Aggiungi carico lineare**, e nessuno di essi può trovarsi nella stessa posizione di un altro.

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{2\,q_k\,z^3}{\pi\,(x_k^2 + z^2)^2}$$



Traccia

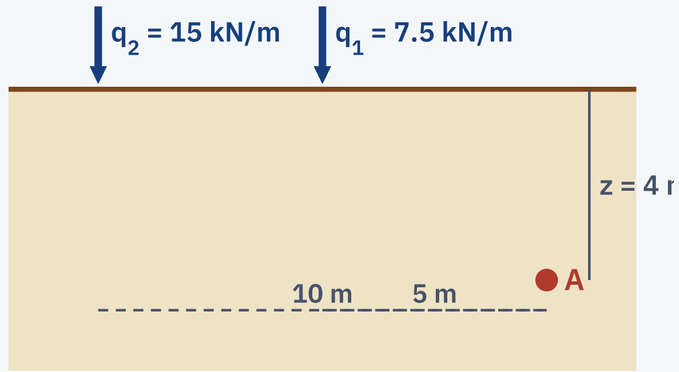
ESEMPIO

Dati

Carichi	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$)**;** $q_2 = 15$ **kN/m** ($x_L = -5$ **m)**
Punto A	$x_A = 5$ **m,** $z = 4$ **m (carico 1 a** 5 **m, carico 2 a** 10 **m)**
Terreno	**mezzo semispazio elastico omogeneo; deformazione piana**

RICHIESTO

La **$\Delta\sigma_z$** prodotta da ciascun carico nel punto A e, per sovrapposizione, la **$\Delta\sigma_z$** totale.



Soluzione

SOLUZIONE

1 Carico 1: x = $x_A - x_L$ = 5 − 0 = 5 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2q_1 z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(7.5)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{960}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.18178}\ \mathrm{kPa}$$

2 Carico 2: x = 5 − (−5) = 10 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}920}{\pi\,(13{,}456)} = \mathbf{0.04542}\ \mathrm{kPa}$$

3 Sovrapposizione (terreno elastico: le tensioni si sommano)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{0.22720}\ \mathrm{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa. Sebbene il carico 2 sia doppio, esso è due volte più lontano da A, pertanto la sua tensione è circa un quinto del totale (rapporto 0.20). Verifica per il carico 1: x/z = 1.25 ⇒ 2/(π[1.25² + 1]²) = 0.09695; q_1/z = 1.875; 0.09695 · 1.875 = 0.18178. Il modulo restituisce lo stesso valore.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

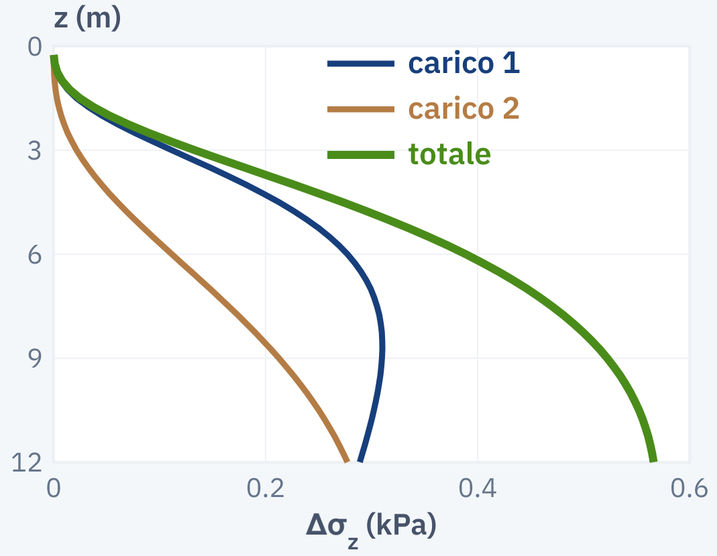
ESEMPIO

Dati

Carichi	**I due carichi dell'Esempio 1: $q_1 = 7.5$ kN/m ($x_L = 0$), $q_2 = 15$ kN/m ($x_L = -5$ m)**
Punti	**$x_A = 5$ m; $z = 1.2; 2.4;$ ...; 12 m (righe del profilo del modulo)**

RICHIESTO

Per ogni profondità **$\Delta\sigma_{z(1)}$**, **$\Delta\sigma_{z(2)}$** e il totale **$\Delta\sigma_z$**; soluzione dettagliata per z = 8 m; la profondità della tensione massima.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Carico 1 (x = 5 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2(7.5)(8^3)}{\pi(5^2+8^2)^2} = \frac{7{,}680}{\pi\,(7{,}921)} = \mathbf{0.30863}\ \text{kPa}$$

2 Carico 2 (x = 10 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(8^3)}{\pi(10^2+8^2)^2} = \frac{15{,}360}{\pi\,(26{,}896)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

3 Totale

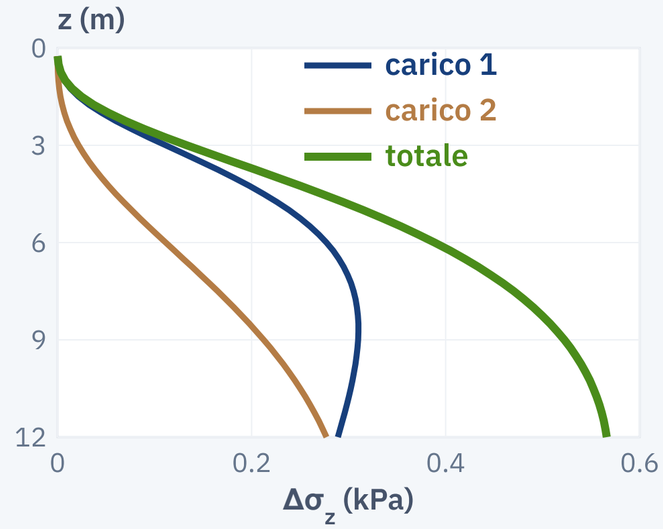
$$\Delta\sigma_z = 0.30863 + 0.18178 = \mathbf{0.49041}\ \text{kPa}$$

A z = 8 m si ha $\Delta\sigma_z$ = 0.49041 kPa; è molto maggiore del valore a z = 4 m (0.22720 kPa): il punto A è a fianco dei carichi e la tensione continua ad aumentare con la profondità (la tabella è nella pagina successiva).

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

z (m)	$\Delta\sigma_{z(1)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(2)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$ totale (kPa)
1.2	0.01180	0.00160	**0.01341**
2.4	0.06976	0.01180	**0.08156**
3.6	0.15460	0.03492	**0.18951**
4.8	0.22880	0.06976	**0.29856**
6.0	0.27716	0.11152	**0.38868**
7.2	0.30183	0.15460	**0.45643**
8.4	0.30990	0.19456	**0.50446**
9.6	0.30775	0.22880	**0.53655**
10.8	0.29981	0.25631	**0.55612**
12.0	0.28888	0.27716	**0.56604**



Per un singolo carico la tensione è massima alla profondità $z = \sqrt{3}\cdot x$: per il carico 1, a 8.66 m (0.3101 kPa). La somma dei due carichi è ancora crescente a 12 m; il massimo totale è 0.5687 kPa alla profondità di 13.1 m.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

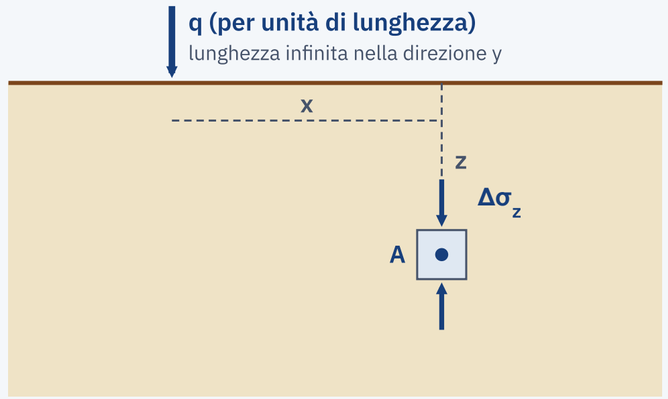
ESEMPIO

Dati

Carico	$q = 20$ **kN/m, carico lineare verticale**
Punti	$z = 3$ **m;** $x = 0; 1.5; 3; 4.5; 6$ **m**

RICHIESTO

Per ogni punto: **x/z**, **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** e **$\Delta\sigma_z$**; rapporto tra il valore nel punto x = z e il valore sotto il carico.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Sotto il carico (x = 0): x/z = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(20)}{\pi(3)} = \mathbf{4.2441}\ \text{kPa}$$

2 x = 3 m: x/z = 1

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[1^2+1\right]^2} = \frac{2}{4\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915 \cdot \frac{20}{3} = 6.6667 \cdot 0.15915 = \mathbf{1.0610}\ \text{kPa}$$

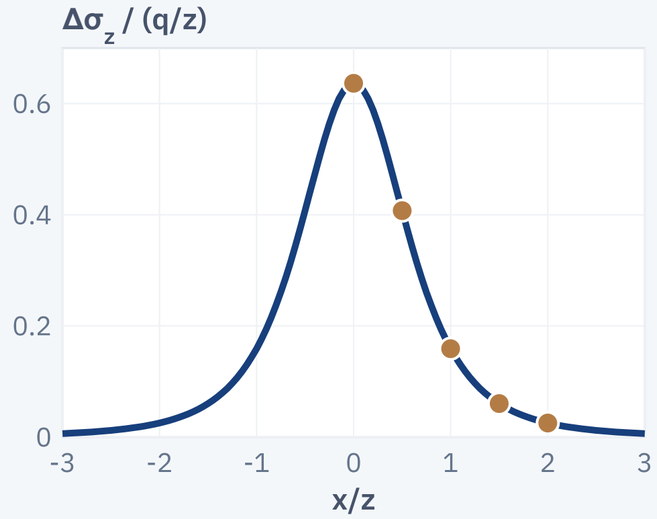
Nel punto x/z = 1 la tensione è **un quarto** di quella sotto il carico (1.0610 / 4.2441 = 0.25).

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0.0	0.0	0.63662	4.2441
1.5	0.5	0.40744	2.7162
3.0	1.0	0.15915	**1.0610**
4.5	1.5	0.06027	0.4018
6.0	2.0	0.02546	0.1698

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ dipende solo da x/z: la stessa curva è utilizzata per ogni q e per ogni z. Per x/z = 2 la tensione è 0.04 volte quella sotto il carico (0.1698 kPa).



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

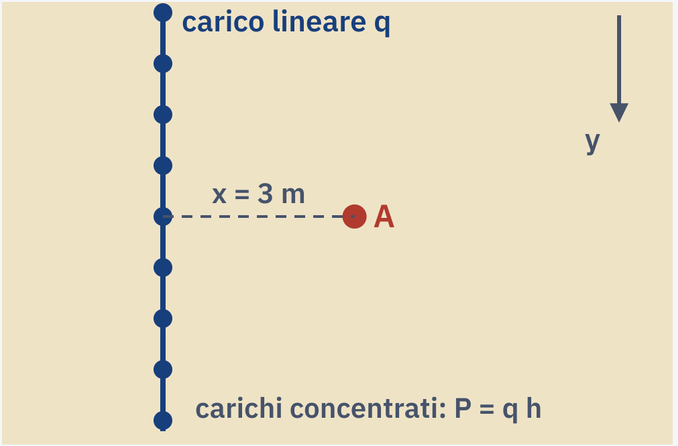
ESEMPIO

Dati

Carico	$q = 10$ **kN/m; carichi concentrati** $P = q\,h$ **distanziati di** h **lungo la linea (**$h = 8$**;** 4**;** 2**;** 1 **m)**
Punto A	$x = 3$ **m,** $z = 4$ **m (distanza orizzontale della linea); Boussinesq:** $\Delta\sigma_z = 3Pz^3/(2\pi L^5)$

RICHIESTO

Somma delle tensioni di Boussinesq dei carichi concentrati (termine per termine per h = 2 m); avvicinamento al valore del carico lineare al diminuire di h.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 $P = q\,h = 10(2) = 20$ kN; per ciascun carico $L_k^2 = x^2 + y_k^2 + z^2 = 9 + y_k^2 + 16$

k	y_k (m)	$L_k^2 = 25 + y_k^2$	L_k (m)	$\Delta\sigma_{z,k}$ (kPa)	Numero di carichi
0	0	25	5.000	0.19557	1
1	2	29	5.385	0.13494	2 (±k)
2	4	41	6.403	0.05678	2 (±k)
3	6	61	7.810	0.02103	2 (±k)
4	8	89	9.434	0.00818	2 (±k)
5	10	125	11.180	0.00350	2 (±k)

Termini di esempio: k = 0: $\Delta\sigma_{z,0} = 3(20)(4^3)/[2\pi(5)^5] = 0.19557$ kPa; la somma per $|k| \le 5$ vale 0.64443 kPa, mentre il resto per $|k| \ge 6$ vale 0.00748 kPa.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

h (m)	P = q h (kN)	Somma dei singoli carichi $\Delta\sigma_z$ (kPa)	Differenza (%)
8	80	0.852175	30.72
4	40	0.660644	1.34
2	20	0.651907	0.0013
1	10	0.651899	< 0.0001
carico lineare		**0.651899**	0

Per il carico lineare, $\Delta\sigma_z = 2q\, z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = 2(10)(4^3)/[\pi(25)^2]$ = **0.651899 kPa**. Quando i carichi concentrati sono presi a interasse fitto, con $h \le z/2$, il totale si avvicina molto a questo valore (h = 2 m: 0.651907 kPa); con un interasse rado, come h = 8 m, la differenza è invece grande. Ciò mostra che la formula del carico lineare è l'integrale di una fila di carichi concentrati.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

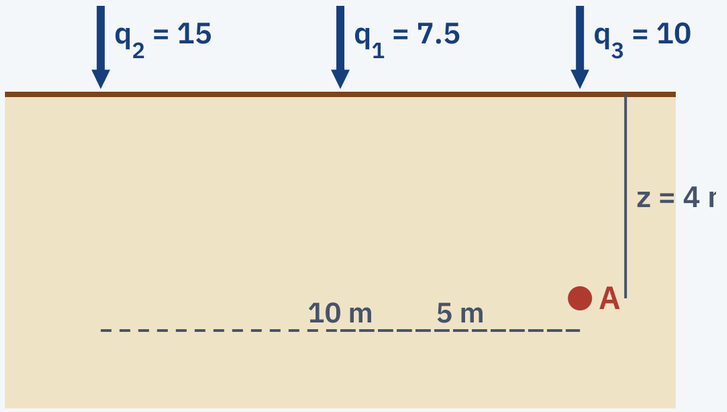
ESEMPIO

Dati

Carichi	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ **kN/m** ($x_L = -5$ **m**); $q_3 = 10$ **kN/m** ($x_L = 5$ **m**)
Punti	**A:** $x_A = 5$ **m**, $z = 4$ **m (direttamente sotto il carico 3); a** $z = 4$ **m,** $x = -7.5$ **…** 7.5 **m**

RICHIESTO

Il contributo di ciascun carico nel punto A e il totale $\Delta\sigma_z$; la tensione totale lungo x alla profondità z = 4 m.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Carico 3 (x = 5 – 5 = 0): A è direttamente sotto il carico

$$\Delta\sigma_{z(3)} = \frac{2q_3}{\pi z} = \frac{2(10)}{\pi(4)} = \mathbf{1.59155}\ \mathrm{kPa}$$

2 Carico 1 (x = 5 m) e carico 2 (x = 10 m): valori dell'Esempio 1

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542\ \mathrm{kPa}$$

3 Sovrapposizione

$$\Delta\sigma_z = 1.59155 + 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{1.81875}\ \mathrm{kPa}$$

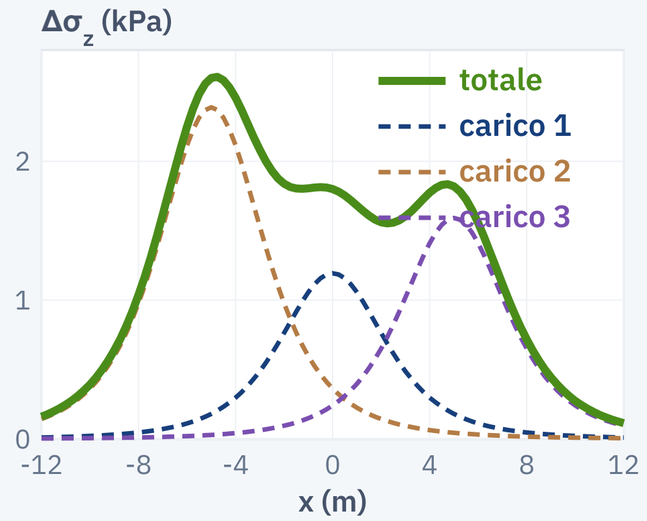
Il carico 3 fornisce il **87.5 percento** del totale: al di sotto di un carico lineare la sua stessa tensione è dominante, mentre i carichi distanti danno un contributo modesto. Il terzo carico aggiunge 1.592 kPa al valore di 0.2272 kPa dell'Esempio 1.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

x (m)	Carico 1	Carico 2	Carico 3	$\Delta\sigma_z$ totale (kPa)
−7.5	0.0585	1.2345	0.0137	1.3068
−5.0	0.1818	2.3873	0.0303	2.5994
−2.5	0.6173	1.2345	0.0781	1.9298
0.0	1.1937	0.3636	0.2424	1.7996
2.5	0.6173	0.1171	0.8230	1.5573
5.0	0.1818	0.0454	1.5915	**1.8188**
7.5	0.0585	0.0206	0.8230	0.9021

La curva totale presenta un picco in prossimità di ciascun carico (x ≈ −4.75; −0.50; 4.75 m); i picchi si spostano leggermente per effetto delle code dei carichi adiacenti. Il picco più alto si ha intorno al carico più severo (carico 2, 15 kN/m): **2.5994 kPa** a x = −5 m; nel punto A (x = 5 m) 1.8188 kPa.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

ESEMPIO

Dati

Carichi	**carico lineare $q = 50$ kN/m; carico concentrato $P = 50$ kN**
Punti	**sotto il carico ($x = 0$, $r = 0$); $z = 1$; 2; 3; 5; 10 m**

RICHIESTO

$\Delta\sigma_z$ sotto l'asse e velocità di riduzione con la profondità per i due tipi di carico.

Soluzione

SOLUZIONE

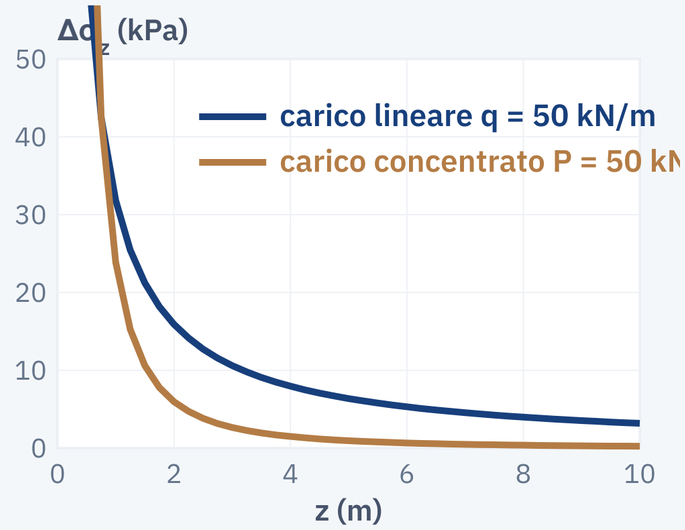
1 z = 5 m

$$\text{lineare: } \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(50)}{\pi(5)} = \mathbf{6.366}\ \text{kPa}$$

$$\text{concentrato: } \Delta\sigma_z = \frac{3}{2\pi}\frac{P}{z^2} = 0.4775\,\frac{50}{5^2} = \mathbf{0.955}\ \text{kPa}$$

z (m)	Carico lineare: 2q/(πz) (kPa)	Carico concentrato: 0.4775 P/z² (kPa)	Rapporto
1	31.831	23.873	1.3
2	15.915	5.968	2.7
3	10.610	2.653	4.0
5	6.366	0.955	6.7
10	3.183	0.239	13.3

Passando z da 1 → 10 m, la tensione da carico lineare diminuisce di **10 volte** (31.83 → 3.18 kPa), quella da carico concentrato di **100 volte** (23.87 → 0.24 kPa).



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Sintesi

Punti chiave

Carico lineare (deformazione piana): $\Delta\sigma_z = 2q\, z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = (q/z) \cdot 2/\{\pi[(x/z)^2 + 1]^2\}$; sotto il carico $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$

Fila di carichi concentrati: si sommano le tensioni di Boussinesq dei carichi concentrati $dP = q\, dy$; carichi concentrati distanziati di $h = 2$ m danno 0.65191 kPa, il carico lineare 0.65190 kPa

Esempio ($q_1 = 7.5$ kN/m, $q_2 = 15$ kN/m; A: $x = 5$, $z = 4$ m): $\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178$; $\Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542$; **$\Delta\sigma_z = 0.22720$ kPa**

Curva adimensionale: per $x/z = 1$ il valore è un quarto di quello sotto il carico; **sovrapposizione**: la tensione di ciascun carico si determina con la propria distanza orizzontale e si somma (con tre carichi, 1.8188 kPa in A)

Profondità: sotto un carico la tensione diminuisce con $1/z$ ($1/z^2$ per un carico concentrato); in un punto a lato del carico la tensione aumenta fino alla profondità $z = \sqrt{3} \cdot x$

Bibliografia

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels… Gauthier-Villars, Paris.

NOTA

Tutti gli esempi numerici sono stati prodotti con il motore di calcolo del modulo stesso; il modulo restituisce gli stessi valori. Il modulo si apre con due carichi lineari (7.5 e 15 kN/m) e il punto A (x = 5 m, z = 4 m).

GeoTerva

Calcoli geotecnici online

Dalla teoria alla pratica

Inserire in GeoTerva i propri carichi lineari, le loro posizioni e il punto di interesse; il modulo fornisce insieme il contributo di ciascun carico, il valore totale di $\Delta\sigma_z$, il profilo con la profondità, le curve isobare, la soluzione passo per passo e la relazione.

Aprire il modulo → **Pagina di teoria →**

Aprire dallo smartphone
I moduli di prova non richiedono registrazione.

Se si desidera utilizzarli nelle proprie lezioni: info@geoterva.com