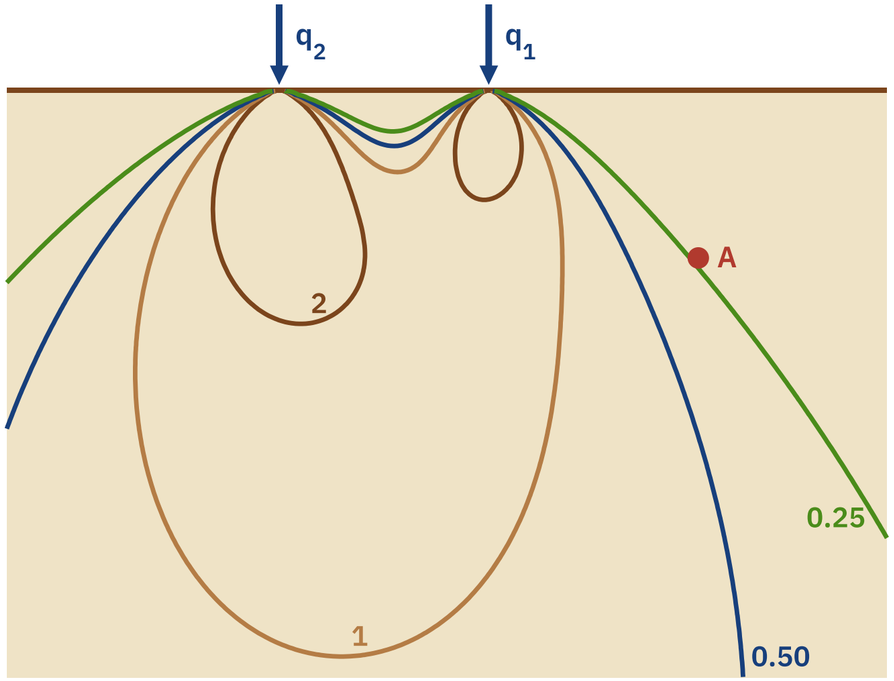
GeoTerva

भू-तकनीकी व्याख्यान स्लाइड · मृदा में प्रतिबल वितरण

ऊर्ध्वाधर रेखा भार के अधीन प्रतिबल

व्याख्यान: सतह पर ऊर्ध्वाधर रेखा भार द्वारा मृदा में उत्पन्न ऊर्ध्वाधर प्रतिबल; प्रारंभिक बिंदु को शुरू से अंत तक हाथ से हल किया गया है, गहराई और पार्श्व प्रोफ़ाइल तालिकाओं के साथ।

समतल विकृति · विमाहीन वक्र · अध्यारोपण · बिंदु भारों का क्रम · सम-प्रतिबल वक्र



परिचय

इस व्याख्यान में हम क्या सीखेंगे?

समतल विकृति के अंतर्गत रेखा भार: प्रतिबल केवल रेखा से क्षैतिज दूरी **x** और गहराई **z** पर निर्भर करता है

रेखा भार को **बिंदु भारों की श्रेणी** के रूप में जोड़कर $\Delta\sigma_z = 2qz^3/[\pi(x^2 + z^2)^2]$ संबंध प्राप्त करना

बिंदु भार से अंतर: भार अक्ष के नीचे प्रतिबल केवल **1/z** के अनुसार घटता है, $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$

विमाहीन रूप: एकल $\Delta\sigma_z/(q/z)$ वक्र और x/z तालिका; अनेक समांतर भारों के लिए **अध्यारोपण**

मॉड्यूल का प्रारंभिक उदाहरण (दो रेखा भार) **आरंभ से अंत तक हाथ से** हल करना; गहराई और पार्श्व परिवर्तन तालिकाओं में

व्याख्यान प्रवाह

प्रत्येक विषय **तीन चरणों में** पढ़ाया जाता है:

1 · **सिद्धांत**: सूत्र और उसका औचित्य

2 · **प्रश्न**: दिया गया है और ज्ञात करना है

3 · **हल**: चरण-दर-चरण, संख्याओं सहित

उदाहरण: $q_1 = 7.5$ kN/m ($x = 0$) और $q_2 = 15$ kN/m ($x = -5$ m); बिंदु A: $x = 5$ m, $z = 4$ m।

अनंत रेखा के अनुदिश प्रति इकाई लंबाई भार

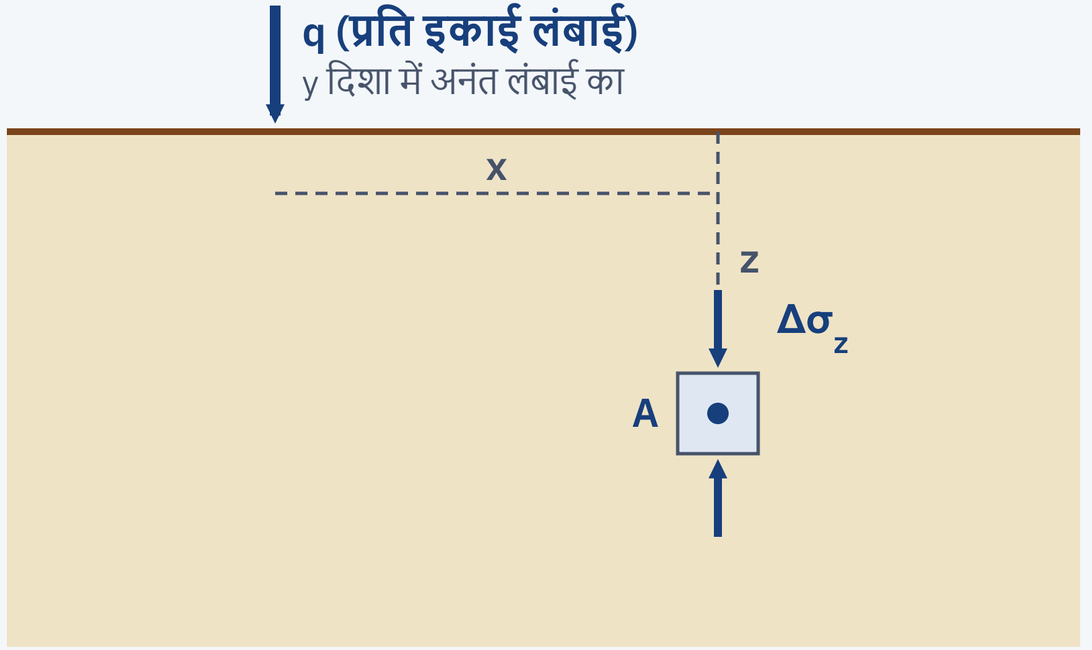
सिद्धांत

रेखा भार वह भार है जो सतह पर अनंत लंबाई की एक सरल रेखा के अनुदिश, प्रति इकाई लंबाई q तीव्रता से कार्य करता है: जैसे कोई लंबी दीवार, रेल की पटरी, या इतनी संकरी स्ट्रिप कि उसकी चौड़ाई की उपेक्षा की जा सके।

रेखा के लंबवत प्रत्येक काट पर भार एक ही प्रकार से लगा होने के कारण प्रतिबल **समतल विकृति** की अवस्था में होते हैं और केवल क्षैतिज दूरी x तथा गहराई z पर निर्भर करते हैं।

भार नम्य, ऊर्ध्वाधर और y दिशा में अनंत लंबाई का है; मृदा को समांग, समदैशिक और रैखिक प्रत्यास्थ अर्ध-अनंत माध्यम माना गया है।

$\Delta\sigma_z$ भार के कारण होने वाली वृद्धि है; बिंदु के ऊपर की मृदा का ओवरबर्डन भार सम्मिलित नहीं किया गया है।



बिंदु भार की एक पंक्ति से रेखा भार तक

सिद्धांत

रेखा भार को y के अनुदिश पंक्तिबद्ध dP = q dy बिंदु भारों की एक पंक्ति के रूप में माना जा सकता है।

प्रत्येक बिंदु भार $r^2 = x^2 + y^2$ के साथ Boussinesq प्रतिबल देता है; इन योगदानों को रेखा के अनुदिश जोड़ने पर समाकल का संवृत मान $4/[3(x^2 + z^2)^2]$ होता है।

$$\Delta\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3q\,z^3}{2\pi\,(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{4}{3\,(x^2+z^2)^2} \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{2q\,z^3}{\pi\,(x^2+z^2)^2}$$

बिंदु भार के विपरीत, प्रतिबल गहराई के साथ केवल 1/z के अनुपात में घटता है: अक्ष पर $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$।

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ और x/z

सिद्धांत

z से भाग देने और x/z रखने पर समीकरण एक विमाहीन रूप ले लेता है, जो प्रत्येक रेखा भार के लिए एक ही वक्र देता है।

इस प्रकार एक ही **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** वक्र x/z के प्रत्येक मान के लिए उपयोग किया जाता है।

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

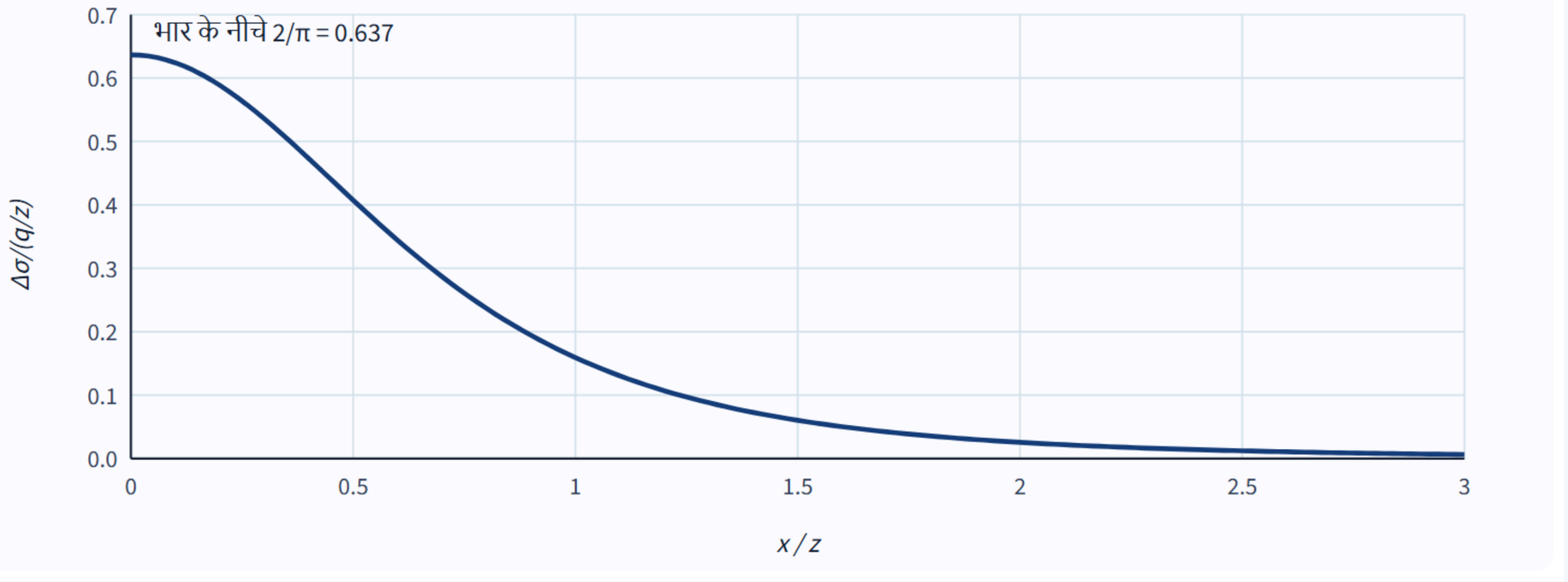
$$x = 0: \qquad \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = 0.637\,\frac{q}{z}$$

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ के मान (मॉड्यूल)

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.0	0.637	1.0	0.159
0.1	0.624	1.2	0.107
0.2	0.589	1.4	0.073
0.3	0.536	1.6	0.050
0.4	0.473	1.8	0.035
0.5	0.407	2.0	0.025
0.6	0.344	2.4	0.014
0.7	0.287	2.8	0.008
0.8	0.237	3.0	0.006
0.9	0.194	3.5	0.004

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ बनाम x/z

सिद्धांत



समीकरण से x/z के विरुद्ध Δσz/(q/z)। x/z = 1 पर यह भार के नीचे अपने मान का एक चौथाई होता है; x/z = 3 से आगे यह 0.01 से नीचे होता है।

अध्यारोपण

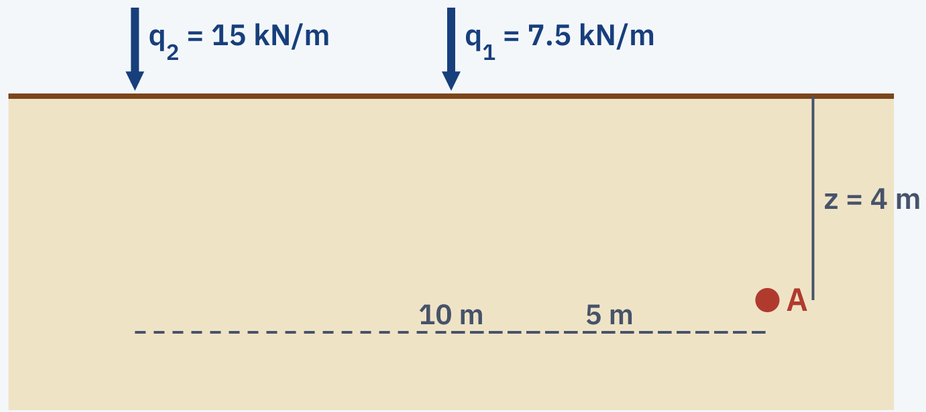
सिद्धांत

चूँकि मृदा प्रत्यास्थ है, इसलिए अनेक रेखा भारों के प्रतिबल अध्यारोपण द्वारा जोड़े जाते हैं।

बिंदु A पर प्रतिबल, प्रत्येक भार द्वारा बिंदु A से अपनी क्षैतिज दूरी के अनुसार अकेले उत्पन्न किए जाने वाले प्रतिबलों का योग होता है।

मॉड्यूल अधिकतम आठ समानांतर रेखा भार स्वीकार करता है; भार अपनी तीव्रता और स्थिति के साथ **रेखा भार जोड़ें** से एक-एक करके दर्ज किए जाते हैं और कोई भी दो भार एक ही स्थिति में नहीं हो सकते।

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{2\,q_k\,z^3}{\pi\,(x_k^2 + z^2)^2}$$



प्रश्न

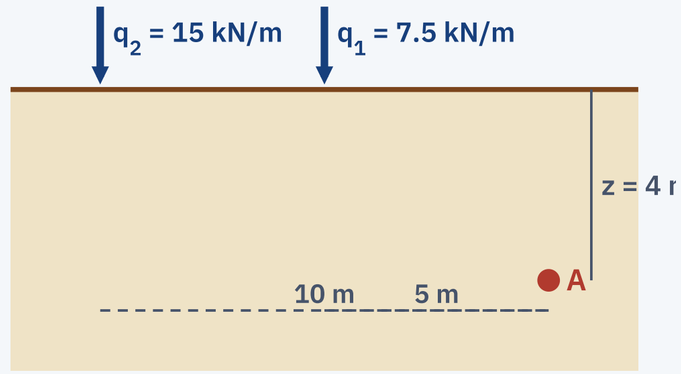
उदाहरण

दिया गया है

भार	$q_1 = 7.5$ kN/m ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ kN/m ($x_L = -5$ m)
बिंदु A	$x_A = 5$ m, $z = 4$ m (भार 1 से 5 m, भार 2 से 10 m की दूरी पर)
मृदा	समांगी, प्रत्यास्थ अर्ध-अनंत माध्यम; समतल विकृति

ज्ञात करना है

प्रत्येक भार द्वारा बिंदु A पर उत्पन्न $\Delta\sigma_z$ और अध्यारोपण से कुल $\Delta\sigma_z$।



हल

हल

1 भार 1: x = $x_A - x_L$ = 5 − 0 = 5 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2q_1 z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(7.5)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{960}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

2 भार 2: x = 5 − (−5) = 10 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}920}{\pi\,(13{,}456)} = \mathbf{0.04542}\ \text{kPa}$$

3 अध्यारोपण (मृदा प्रत्यास्थ: प्रतिबल जोड़े जाते हैं)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{0.22720}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa। यद्यपि भार 2 दोगुना बड़ा है, परंतु वह A से दोगुनी दूरी पर है, इसलिए उसका प्रतिबल कुल का लगभग पाँचवाँ भाग है (अनुपात 0.20)। भार 1 के लिए जाँच: x/z = 1.25 ⇒ $2/(\pi[1.25^2+1]^2)$ = 0.09695; q_1/z = 1.875; 0.09695 · 1.875 = 0.18178। मॉड्यूल यही मान देता है।

हल की जाँच GeoTerva में करें ↗

प्रश्न

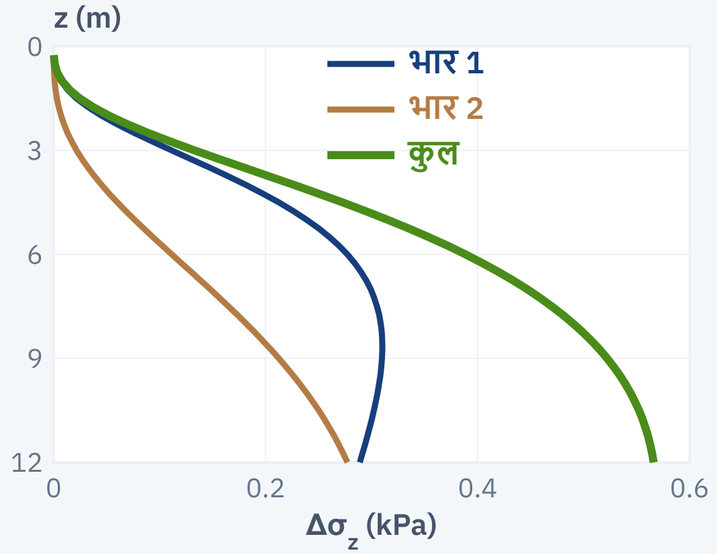
उदाहरण

दिया गया है

भार	**उदाहरण 1 के दो भार:** $q_1 = 7.5$ **kN/m (** $x_L = 0$**),** $q_2 = 15$ **kN/m (**$x_L = -5$ **m)**
बिंदु	$x_A = 5$ **m;** $z = 1.2; 2.4;$ **...;** 12 **m (मॉड्यूल की प्रोफ़ाइल पंक्तियाँ)**

ज्ञात करना है

प्रत्येक गहराई के लिए $\Delta\sigma_{z(1)}$, $\Delta\sigma_{z(2)}$ और कुल $\Delta\sigma_z$; z = 8 m के लिए विस्तृत हल; अधिकतम प्रतिबल की गहराई।



हल (1/2)

हल

1 भार 1 (x = 5 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2(7.5)(8^3)}{\pi(5^2+8^2)^2} = \frac{7{,}680}{\pi\,(7{,}921)} = \mathbf{0.30863}\ \text{kPa}$$

2 भार 2 (x = 10 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(8^3)}{\pi(10^2+8^2)^2} = \frac{15{,}360}{\pi\,(26{,}896)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

3 कुल

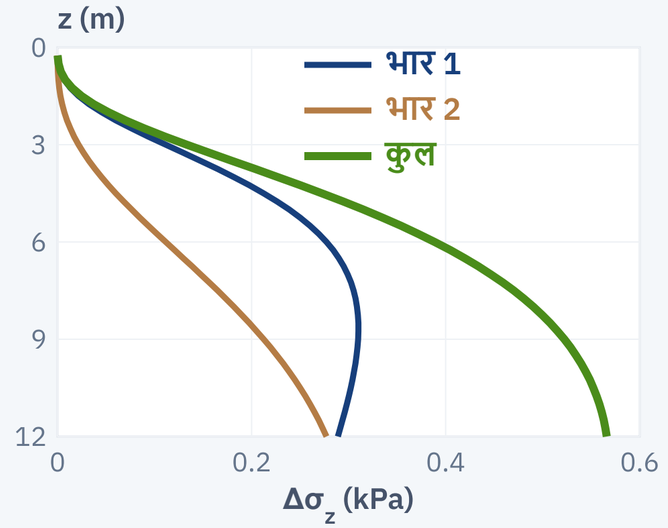
$$\Delta\sigma_z = 0.30863 + 0.18178 = \mathbf{0.49041}\ \text{kPa}$$

z = 8 m पर $\Delta\sigma_z$ = 0.49041 kPa; यह z = 4 m वाले मान (0.22720 kPa) से बहुत अधिक है: बिंदु A भारों के बगल में है और प्रतिबल गहराई में बढ़ता जाता है (सारणी अगले पृष्ठ पर)।

हल (2/2)

हल

z (m)	$\Delta\sigma_{z(1)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(2)}$ (kPa)	कुल $\Delta\sigma_z$ (kPa)
1.2	0.01180	0.00160	**0.01341**
2.4	0.06976	0.01180	**0.08156**
3.6	0.15460	0.03492	**0.18951**
4.8	0.22880	0.06976	**0.29856**
6.0	0.27716	0.11152	**0.38868**
7.2	0.30183	0.15460	**0.45643**
8.4	0.30990	0.19456	**0.50446**
9.6	0.30775	0.22880	**0.53655**
10.8	0.29981	0.25631	**0.55612**
12.0	0.28888	0.27716	**0.56604**



एकल भार के लिए प्रतिबल गहराई $z = \sqrt{3}\cdot x$ पर अधिकतम होता है: भार 1 के लिए 8.66 m पर (0.3101 kPa)। दोनों भारों का योग 12 m पर अब भी बढ़ रहा है; अधिकतम कुल मान 13.1 m गहराई पर 0.5687 kPa है।

हल की जाँच GeoTerva में करें ↗

प्रश्न

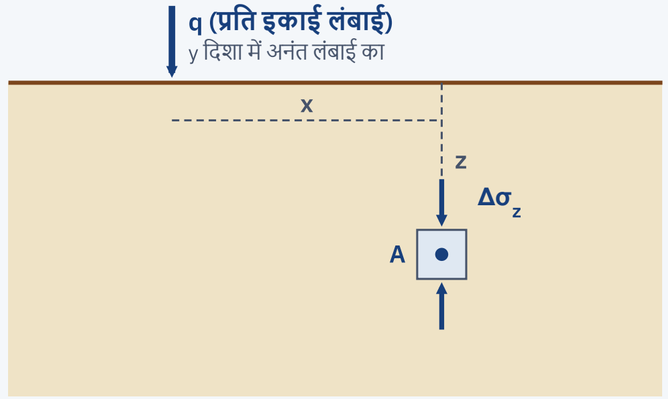
उदाहरण

दिया गया है

भार	$q = 20$ **kN/m, ऊर्ध्वाधर रेखा भार**
बिंदु	$z = 3$ **m;** $x = 0; 1.5; 3; 4.5; 6$ **m**

ज्ञात करना है

प्रत्येक बिंदु के लिए **x/z**, **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** और **$\Delta\sigma_z$**; x = z वाले बिंदु के मान का भार के नीचे वाले मान से अनुपात।



हल (1/2)

हल

1 भार के अंतर्गत (x = 0): x/z = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(20)}{\pi(3)} = \mathbf{4.2441}\ \text{kPa}$$

2 x = 3 m: x/z = 1

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[1^2+1\right]^2} = \frac{2}{4\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915 \cdot \frac{20}{3} = 6.6667 \cdot 0.15915 = \mathbf{1.0610}\ \text{kPa}$$

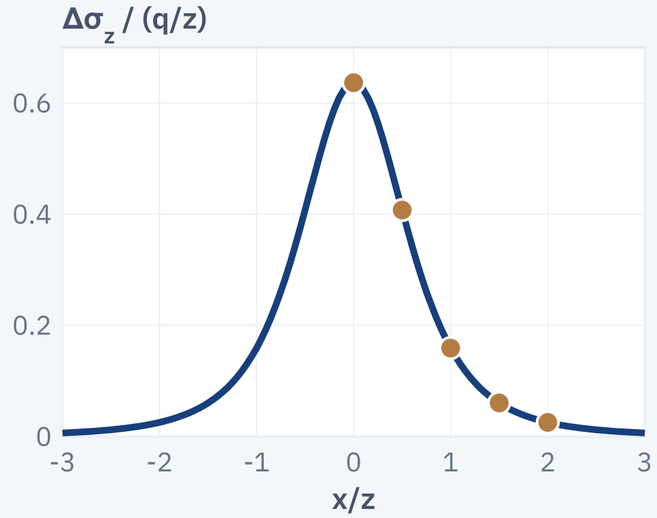
x/z = 1 बिंदु पर प्रतिबल भार के नीचे के प्रतिबल का **एक-चौथाई** है (1.0610 / 4.2441 = 0.25)।

हल (2/2)

हल

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0.0	0.0	0.63662	4.2441
1.5	0.5	0.40744	2.7162
3.0	1.0	0.15915	**1.0610**
4.5	1.5	0.06027	0.4018
6.0	2.0	0.02546	0.1698

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ केवल x/z पर निर्भर करता है: वही वक्र प्रत्येक q और प्रत्येक z के लिए प्रयुक्त होता है। x/z = 2 पर प्रतिबल भार के नीचे के प्रतिबल का 0.04 गुना होता है (0.1698 kPa)।



हल की जाँच GeoTerva में करें ↗

प्रश्न

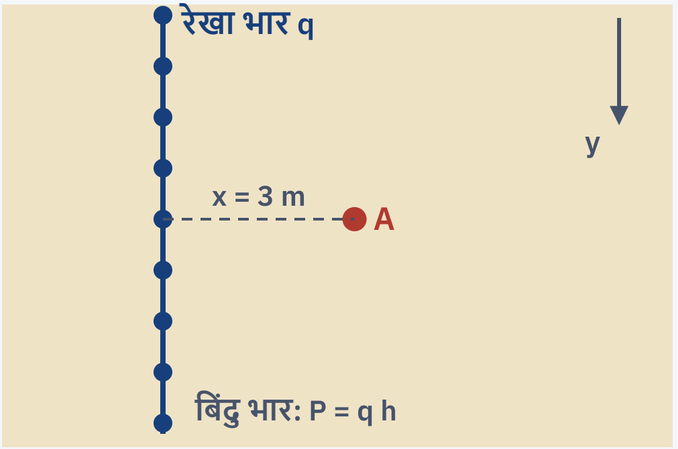
उदाहरण

दिया गया है

भार	$q = 10$ **kN/m; रेखा के अनुदिश** h **अंतराल पर बिंदु भार** $P = q\,h$ **(**$h = 8; 4; 2; 1$ **m)**
बिंदु A	$x = 3$ **m,** $z = 4$ **m (रेखा की क्षैतिज दूरी);** **Boussinesq:** $\Delta\sigma_z = 3Pz^3/(2\pi L^5)$

ज्ञात करना है

बिंदु भारों के Boussinesq प्रतिबलों का योग (h = 2 m के लिए पद-दर-पद); h घटने पर रेखा भार के मान के निकट पहुँचना।



हल (1/2)

हल

1 P = q h = 10(2) = 20 kN; प्रत्येक भार के लिए $L_k^2 = x^2 + y_k^2 + z^2 = 9 + y_k^2 + 16$

k	y_k (m)	$L_k^2 = 25 + y_k^2$	L_k (m)	$\Delta\sigma_{z,k}$ (kPa)	कितने भार
0	0	25	5.000	0.19557	1
1	2	29	5.385	0.13494	2 (±k)
2	4	41	6.403	0.05678	2 (±k)
3	6	61	7.810	0.02103	2 (±k)
4	8	89	9.434	0.00818	2 (±k)
5	10	125	11.180	0.00350	2 (±k)

उदाहरण पद: k = 0: $\Delta\sigma_{z,0} = 3(20)(4^3)/[2\pi(5)^5] = 0.19557$ kPa; $|k| \le 5$ का योग 0.64443 kPa है, और $|k| \ge 6$ के लिए शेष 0.00748 kPa है।

हल (2/2)

हल

h (m)	P = q h (kN)	बिंदु भारों का योग $\Delta\sigma_z$ (kPa)	अंतर (%)
8	80	0.852175	30.72
4	40	0.660644	1.34
2	20	0.651907	0.0013
1	10	0.651899	< 0.0001
रेखा भार		**0.651899**	0

रेखा भार के लिए $\Delta\sigma_z = 2q\,z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = 2(10)(4^3)/[\pi(25)^2]$ = **0.651899 kPa**। बिंदु भारों को $h \le z/2$ जैसे सघन अंतराल पर लेने से कुल प्रतिबल इस मान के बहुत निकट आ जाता है ($h = 2$ m पर: 0.651907 kPa); $h = 8$ m जैसे विरल अंतराल पर अंतर बड़ा होता है। इससे पता चलता है कि रेखा भार का सूत्र बिंदु भारों की पंक्ति का समाकल है।

हल की जाँच GeoTerva में करें ↗

प्रश्न

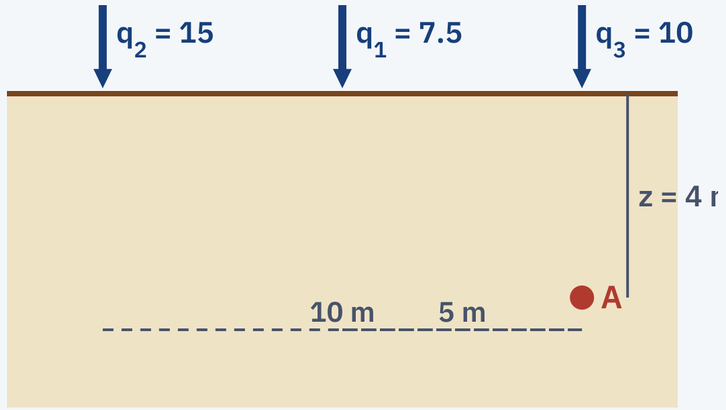
उदाहरण

दिया गया है

भार	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ **kN/m** ($x_L = -5$ **m**); $q_3 = 10$ **kN/m** ($x_L = 5$ **m**)
बिंदु	**A:** $x_A = 5$ **m**, $z = 4$ **m (भार 3 के ठीक नीचे);** $z = 4$ **m पर** $x = -7.5$ **...** 7.5 **m**

ज्ञात करना है

बिंदु A पर प्रत्येक भार का योगदान और कुल $\Delta\sigma_z$; गहराई z = 4 m पर x के अनुदिश कुल प्रतिबल।



हल (1/2)

हल

1 भार 3 (x = 5 − 5 = 0): A भार के ठीक नीचे है

$$\Delta\sigma_{z(3)} = \frac{2q_3}{\pi z} = \frac{2(10)}{\pi(4)} = \mathbf{1.59155}\ \text{kPa}$$

2 भार 1 (x = 5 m) और भार 2 (x = 10 m): उदाहरण 1 के मान

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542\ \text{kPa}$$

3 अध्यारोपण

$$\Delta\sigma_z = 1.59155 + 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{1.81875}\ \text{kPa}$$

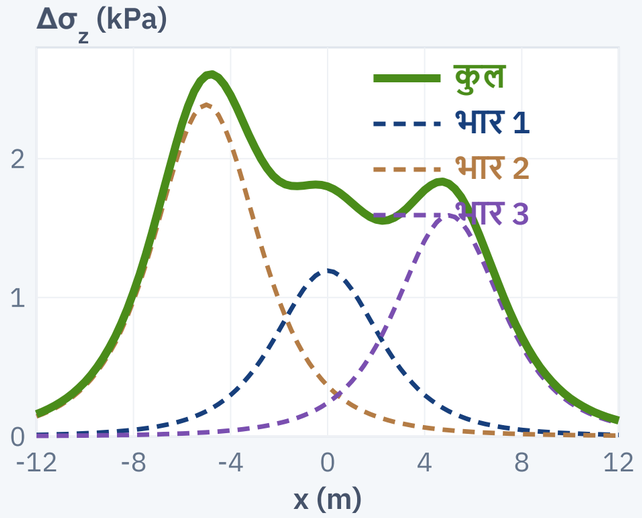
भार 3 कुल का **87.5 प्रतिशत** देता है: रेखा भार के नीचे उसका अपना प्रतिबल प्रभावी रहता है, दूर के भार छोटा योगदान करते हैं। तीसरा भार उदाहरण 1 के 0.2272 kPa मान में 1.592 kPa जोड़ता है।

हल (2/2)

हल

x (m)	भार 1	भार 2	भार 3	कुल $\Delta\sigma_z$ (kPa)
−7.5	0.0585	1.2345	0.0137	1.3068
−5.0	0.1818	2.3873	0.0303	2.5994
−2.5	0.6173	1.2345	0.0781	1.9298
0.0	1.1937	0.3636	0.2424	1.7996
2.5	0.6173	0.1171	0.8230	1.5573
5.0	0.1818	0.0454	1.5915	**1.8188**
7.5	0.0585	0.0206	0.8230	0.9021

कुल वक्र प्रत्येक भार के निकट एक शिखर देता है (x ≈ −4.75; −0.50; 4.75 m); शिखर पड़ोसी भारों की पूँछों के कारण कुछ खिसक जाते हैं। सबसे ऊँचा शिखर सबसे प्रबल भार (भार 2, 15 kN/m) के आसपास है: x = −5 m पर **2.5994 kPa**; बिंदु A पर (x = 5 m) 1.8188 kPa।



हल की जाँच GeoTerva में करें ↗

प्रश्न

उदाहरण

दिया गया है

भार	**रेखा भार $q = 50$ kN/m; बिंदु भार $P = 50$ kN**
बिंदु	**भार के नीचे ($x = 0, r = 0$); $z = 1; 2; 3; 5; 10$ m**

ज्ञात करना है

दोनों भार प्रकारों के लिए अक्ष के नीचे $\Delta\sigma_z$ और गहराई के साथ घटने की दर।

हल

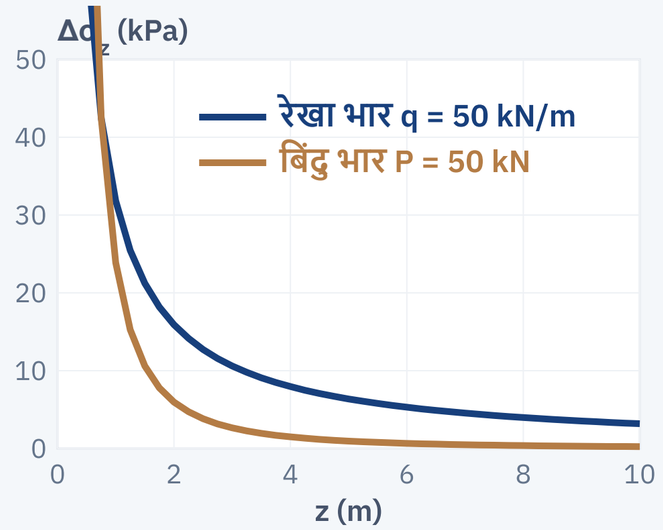
हल

1 z = 5 m

$$\text{रेखा: } \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(50)}{\pi(5)} = \mathbf{6.366}\ \text{kPa}$$

$$\text{एकल: } \Delta\sigma_z = \frac{3}{2\pi}\frac{P}{z^2} = 0.4775\,\frac{50}{5^2} = \mathbf{0.955}\ \text{kPa}$$

z (m)	रेखा भार: 2q/(πz) (kPa)	बिंदु भार: 0.4775 P/z² (kPa)	अनुपात
1	31.831	23.873	1.3
2	15.915	5.968	2.7
3	10.610	2.653	4.0
5	6.366	0.955	6.7
10	3.183	0.239	13.3



z: 1 → 10 m होने पर रेखा भार का प्रतिबल **10 गुना** (31.83 → 3.18 kPa) और बिंदु भार का प्रतिबल **100 गुना** (23.87 → 0.24 kPa) घट जाता है।

हल की जाँच GeoTerva में करें ↗

सारांश

याद रखने योग्य बिंदु

रेखा भार (समतल विकृति): $\Delta\sigma_z = 2q\,z^3/[\pi(x^2+z^2)^2] = (q/z)\cdot 2/\{\pi[(x/z)^2+1]^2\}$; भार के नीचे $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\,q/z$

बिंदु भारों की पंक्ति: $dP = q\,dy$ बिंदु भारों के Boussinesq प्रतिबलों को जोड़ा जाता है; $h = 2$ m अंतराल वाले बिंदु भार 0.65191 kPa देते हैं, रेखा भार 0.65190 kPa

उदाहरण ($q_1 = 7.5$ kN/m, $q_2 = 15$ kN/m; A: $x = 5$, $z = 4$ m): $\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178$; $\Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542$; **$\Delta\sigma_z = 0.22720$ kPa**

विमाहीन वक्र: $x/z = 1$ के लिए मान भार के नीचे के मान का एक-चौथाई है; **अध्यारोपण**: प्रत्येक भार का प्रतिबल उसकी अपनी क्षैतिज दूरी से ज्ञात कर जोड़ा जाता है (तीन भारों के लिए A पर 1.8188 kPa)

गहराई: भार के नीचे प्रतिबल $1/z$ के अनुसार घटता है (बिंदु भार में $1/z^2$); भार के बगल वाले बिंदु पर प्रतिबल $z = \sqrt{3}\cdot x$ गहराई तक बढ़ता है

संदर्भ

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels… Gauthier-Villars, Paris.

टिप्पणी

सभी संख्यात्मक उदाहरण मॉड्यूल के अपने गणना इंजन से तैयार किए गए हैं; मॉड्यूल वही मान देता है। मॉड्यूल दो रेखा भारों (7.5 और 15 kN/m) और बिंदु A (x = 5 m, z = 4 m) के साथ खुलता है।

GeoTerva

ऑनलाइन भू-तकनीकी गणनाएँ

सिद्धांत से अनुप्रयोग तक

अपने रेखा भार, उनकी स्थितियाँ और अपना बिंदु GeoTerva में दर्ज करें; मॉड्यूल प्रत्येक भार का योगदान, कुल $\Delta\sigma_z$ मान, गहराई प्रोफ़ाइल, समप्रतिबल वक्र, चरण-दर-चरण हल और रिपोर्ट एक साथ देता है।

मॉड्यूल खोलें →

सिद्धांत पृष्ठ →

फ़ोन पर खोलें

नमूना मॉड्यूल के लिए पंजीकरण आवश्यक नहीं है।

यदि आप इन्हें अपने व्याख्यानों में उपयोग करना चाहें: info@geoterva.com