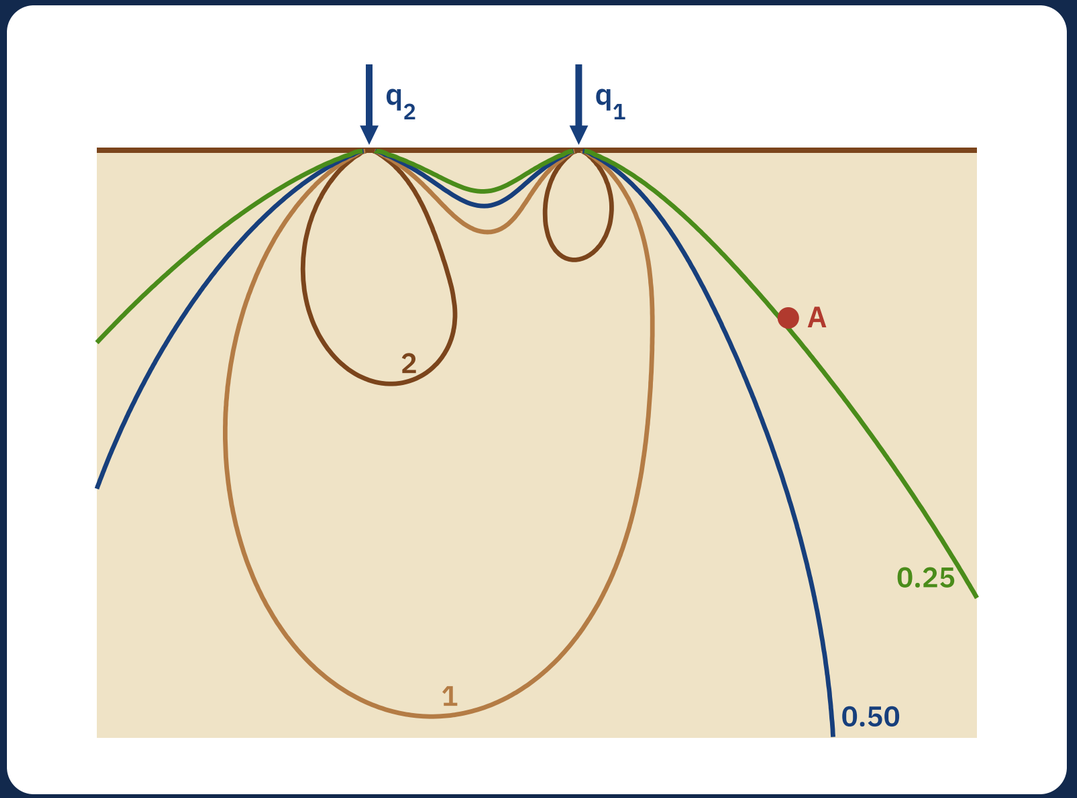
Présentation de cours de géotechnique · Diffusion des contraintes dans le sol

Contrainte sous une charge linéique verticale

Cours : contrainte verticale produite dans le sol par une charge linéique verticale en surface ; le point d'ouverture traité à la main de bout en bout, profils en profondeur et profils latéraux présentés dans des tableaux.

Déformation plane | Courbe adimensionnelle | Superposition | Série de charges ponctuelles | Courbes d'isocontraintes



Que verrons-nous dans ce cours ?

La charge linéique en **déformation plane** : la contrainte ne dépend que de la distance horizontale **x** par rapport à la charge et de la profondeur **z**

La relation $\Delta\sigma_z = 2qz^3/[\pi(x^2 + z^2)^2]$ obtenue en sommant la charge linéique comme une **file de charges ponctuelles**

Différence avec la charge ponctuelle : sous l'axe de la charge, la contrainte ne décroît qu'en **1/z**, $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$

Forme adimensionnelle : une seule courbe $\Delta\sigma_z/(q/z)$ et un tableau en x/z ; **superposition** pour plusieurs charges parallèles

L'exemple d'ouverture du module (deux charges linéiques) **de bout en bout à la main** ; variation en profondeur et latérale dans des tableaux

DÉROULÉ DU COURS

Chaque thème est traité en **trois étapes** :

1 · **Théorie** : formule et justification

2 · **Énoncé** : données et à déterminer

3 · **Solution** : étape par étape, avec les valeurs numériques

Exemple : $q_1 = 7.5$ kN/m ($x = 0$) et $q_2 = 15$ kN/m ($x = -5$ m) ; point A : $x = 5$ m, $z = 4$ m.

Charge par unité de longueur le long d'une ligne infinie

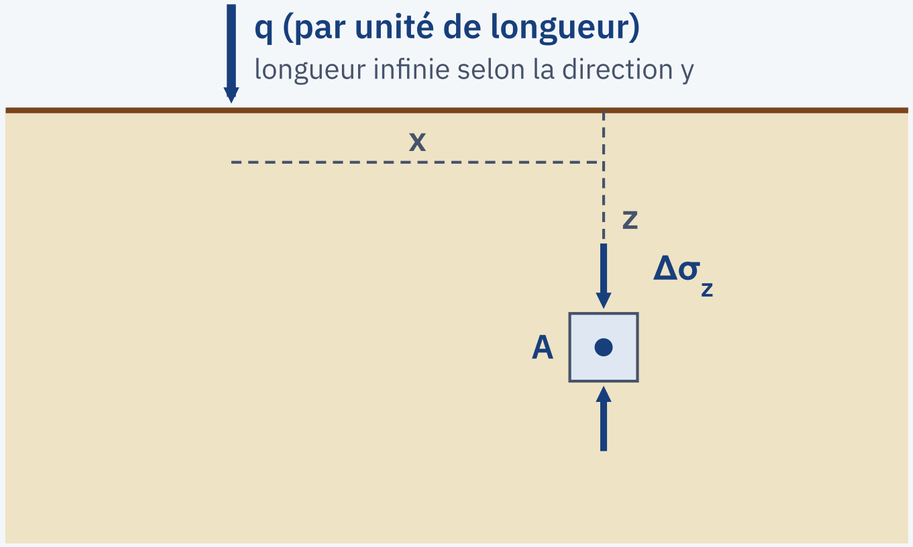
THÉORIE

Une **charge linéique** est une charge d'intensité q par unité de longueur, agissant en surface le long d'une droite de longueur infinie : un long mur, un rail, ou une bande si étroite que sa largeur peut être négligée.

Toute section perpendiculaire à la droite étant chargée de la même manière, les contraintes correspondent à un état de **déformation plane** et ne dépendent que de la distance horizontale x et de la profondeur z.

La charge est flexible, verticale et de longueur infinie dans la direction y ; le sol est supposé être un massif semi-infini homogène, isotrope et élastique linéaire.

$\Delta\sigma_z$ est l'accroissement de contrainte dû à la charge ; le poids des terres sus-jacentes au point considéré n'est pas inclus.



D'une rangée de charges ponctuelles à une charge linéique

THÉORIE

Une charge linéique peut être assimilée à une rangée de charges ponctuelles dP = q dy disposées le long de y.

Chaque charge ponctuelle donne la contrainte de Boussinesq avec $r^2 = x^2 + y^2$; lorsque ces contributions sont sommées le long de la droite, la valeur en forme fermée de l'intégrale devient $4/[3(x^2 + z^2)^2]$.

$$\Delta\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3q\,z^3}{2\pi\,(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{4}{3\,(x^2+z^2)^2} \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{2q\,z^3}{\pi\,(x^2+z^2)^2}$$

Contrairement à une charge ponctuelle, la contrainte ne décroît avec la profondeur qu'en 1/z : sur l'axe, $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$.

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ et x/z

THÉORIE

Après division par z et substitution de x/z, l'équation prend une forme adimensionnelle donnant une courbe unique pour chaque charge linéique.

Ainsi, une seule courbe **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** sert pour toute valeur de x/z.

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

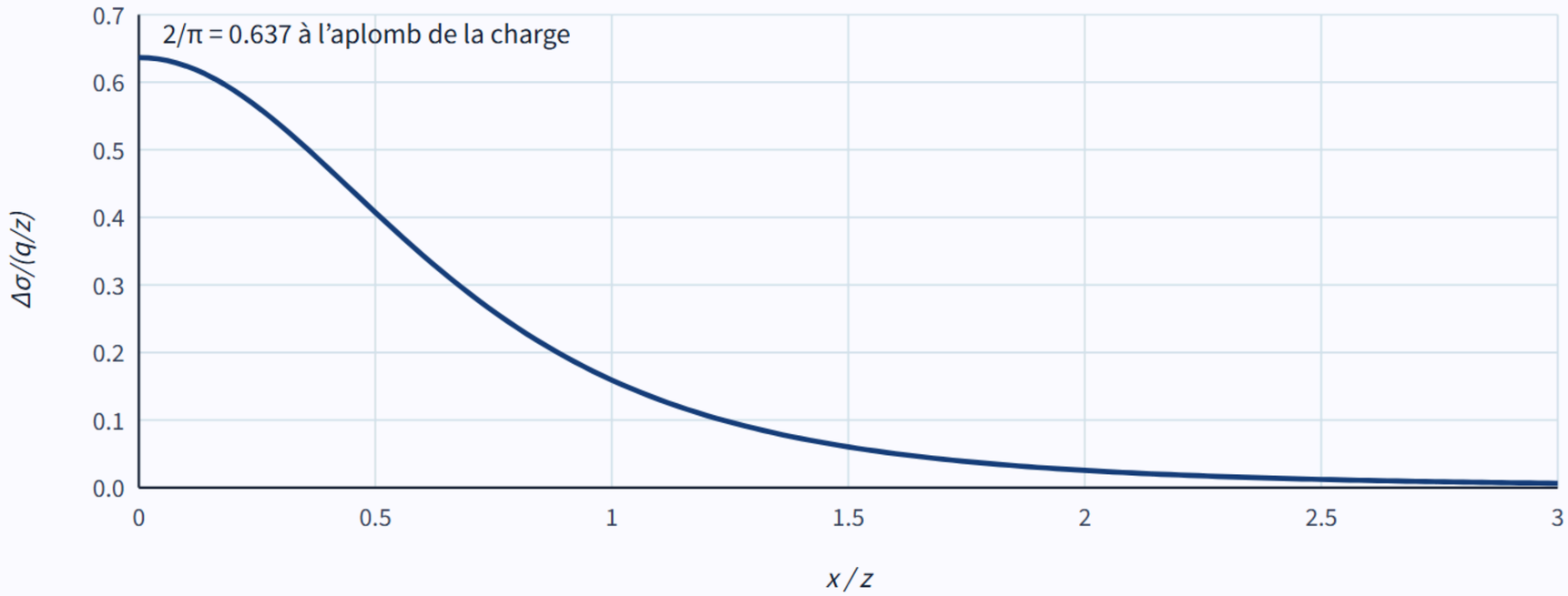
$$x = 0 : \qquad \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = 0.637\,\frac{q}{z}$$

VALEURS DE $\Delta\sigma_z/(q/z)$ (MODULE)

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.0	0.637	1.0	0.159
0.1	0.624	1.2	0.107
0.2	0.589	1.4	0.073
0.3	0.536	1.6	0.050
0.4	0.473	1.8	0.035
0.5	0.407	2.0	0.025
0.6	0.344	2.4	0.014
0.7	0.287	2.8	0.008
0.8	0.237	3.0	0.006
0.9	0.194	3.5	0.004

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ en fonction de x/z

THÉORIE



Δσz/(q/z) en fonction de x/z, d'après l'équation. Pour x/z = 1, elle vaut le quart de sa valeur à l'aplomb de la charge ; au-delà de x/z = 3, elle est inférieure à 0.01.

Superposition

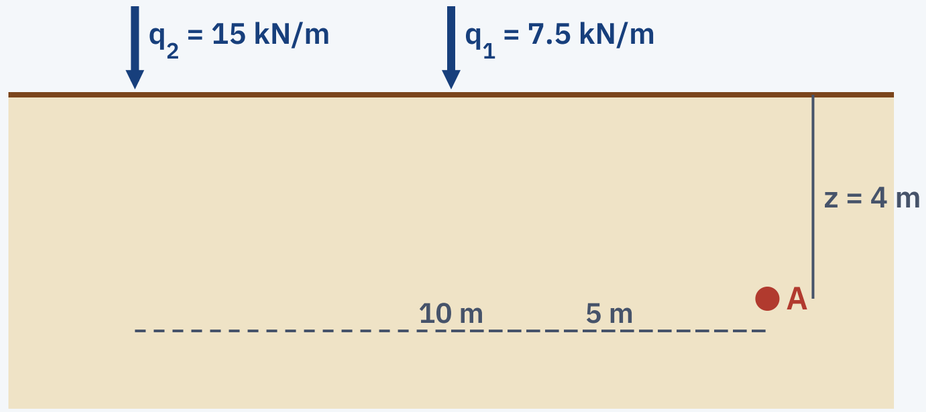
THÉORIE

Le sol étant élastique, les contraintes de plusieurs charges linéiques s'additionnent par superposition.

La contrainte au point A est la somme des contraintes que produirait chaque charge seule, avec sa propre distance horizontale au point A.

Le module accepte au plus huit charges linéiques parallèles ; les charges sont saisies une à une, avec leurs intensités et leurs positions, par **Ajouter une charge linéique**, et deux d'entre elles ne peuvent se trouver à la même position.

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{2\,q_k\,z^3}{\pi\,(x_k^2 + z^2)^2}$$



Énoncé

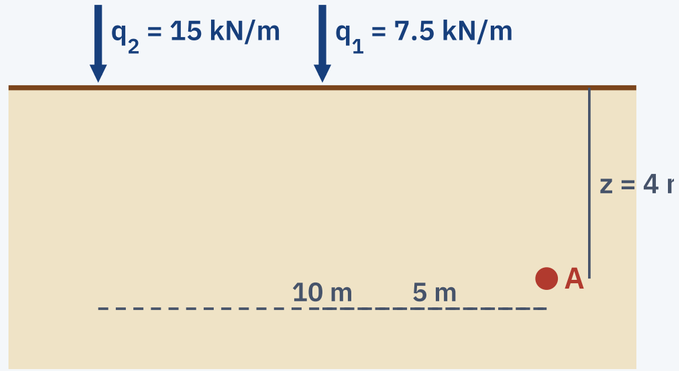
EXEMPLE

Données

Charges	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$)**;** $q_2 = 15$ **kN/m (** $x_L = -5$ **m)**
Point A	$x_A = 5$ **m,** $z = 4$ **m (charge 1 à** 5 **m, charge 2 à** 10 **m)**
Sol	**milieu semi-infini homogène et élastique ; déformation plane**

À DÉTERMINER

Le $\Delta\sigma_z$ produit par chaque charge au point A et le $\Delta\sigma_z$ total par superposition.



Solution

SOLUTION

1 Charge 1 : x = $x_A - x_L$ = 5 − 0 = 5 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2q_1 z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(7.5)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{960}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.18178}\ \mathrm{kPa}$$

2 Charge 2 : x = 5 − (−5) = 10 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}920}{\pi\,(13{,}456)} = \mathbf{0.04542}\ \mathrm{kPa}$$

3 Superposition (sol élastique : les contraintes s'additionnent)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{0.22720}\ \mathrm{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa. Bien que la charge 2 soit deux fois plus grande, elle est deux fois plus éloignée de A ; sa contribution à la contrainte représente donc environ un cinquième du total (rapport 0.20). Vérification pour la charge 1 : x/z = 1.25 ⇒ 2/(π[1.25² + 1]²) = 0.09695 ; q_1/z = 1.875 ; 0.09695 · 1.875 = 0.18178. Le module donne la même valeur.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

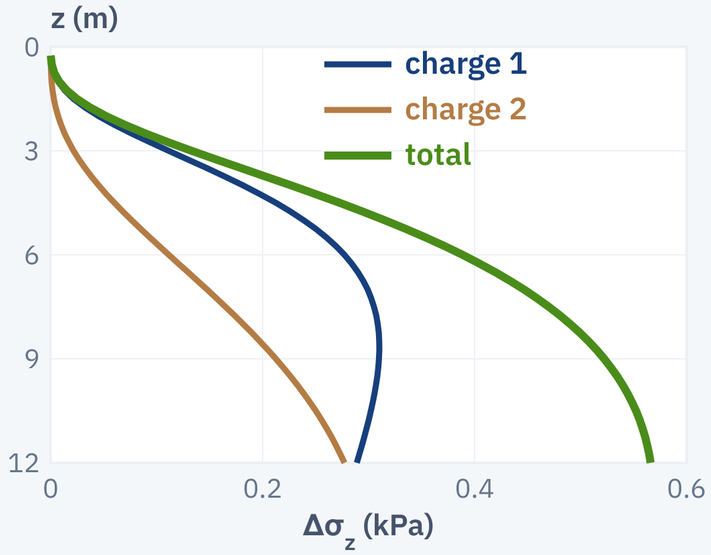
EXEMPLE

Données

Charges	**Les deux charges de l'exemple 1 : $q_1 = 7.5$ kN/m ($x_L = 0$), $q_2 = 15$ kN/m ($x_L = -5$ m)**
Points	$x_A = 5$ m ; $z = 1.2$; 2.4 ; … ; 12 m **(lignes de profil du module)**

À DÉTERMINER

Pour chaque profondeur, $\Delta\sigma_{z(1)}$, $\Delta\sigma_{z(2)}$ et le total $\Delta\sigma_z$; solution détaillée pour z = 8 m ; profondeur de la contrainte maximale.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Charge 1 (x = 5 m) : z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2(7.5)(8^3)}{\pi(5^2+8^2)^2} = \frac{7{,}680}{\pi\,(7{,}921)} = \mathbf{0.30863}\ \mathrm{kPa}$$

2 Charge 2 (x = 10 m) : z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(8^3)}{\pi(10^2+8^2)^2} = \frac{15{,}360}{\pi\,(26{,}896)} = \mathbf{0.18178}\ \mathrm{kPa}$$

3 Total

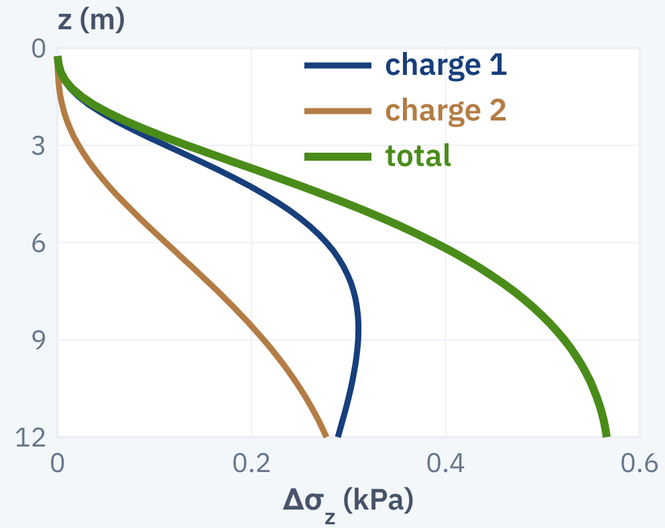
$$\Delta\sigma_z = 0.30863 + 0.18178 = \mathbf{0.49041}\ \mathrm{kPa}$$

À z = 8 m, $\Delta\sigma_z$ = 0.49041 kPa ; cette valeur est bien supérieure à celle obtenue à z = 4 m (0.22720 kPa) : le point A est situé à côté des charges et la contrainte continue d'augmenter en profondeur (tableau à la page suivante).

Solution (2/2)

SOLUTION

z (m)	$\Delta\sigma_{z(1)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(2)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
1.2	0.01180	0.00160	**0.01341**
2.4	0.06976	0.01180	**0.08156**
3.6	0.15460	0.03492	**0.18951**
4.8	0.22880	0.06976	**0.29856**
6.0	0.27716	0.11152	**0.38868**
7.2	0.30183	0.15460	**0.45643**
8.4	0.30990	0.19456	**0.50446**
9.6	0.30775	0.22880	**0.53655**
10.8	0.29981	0.25631	**0.55612**
12.0	0.28888	0.27716	**0.56604**



Pour une charge isolée, la contrainte est maximale à la profondeur $z = \sqrt{3}\cdot x$: pour la charge 1, à 8.66 m (0.3101 kPa). La somme des deux charges croît encore à 12 m ; le total maximal est de 0.5687 kPa à 13.1 m de profondeur.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

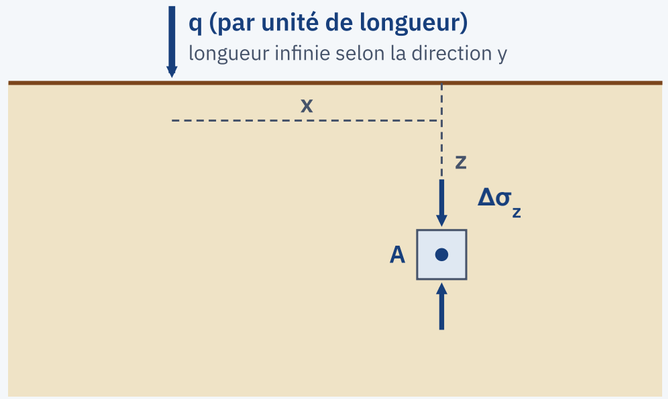
EXEMPLE

Données

Charge	$q = 20$ **kN/m, charge linéique verticale**
Points	$z = 3$ **m;** $x = 0; 1.5; 3; 4.5; 6$ **m**

À DÉTERMINER

Pour chaque point : **x/z**, **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** et **$\Delta\sigma_z$** ; rapport de la valeur au point x = z à la valeur sous la charge.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Sous la charge (x = 0) : x/z = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(20)}{\pi(3)} = \mathbf{4.2441}\ \mathrm{kPa}$$

2 x = 3 m: x/z = 1

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[1^2+1\right]^2} = \frac{2}{4\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915 \cdot \frac{20}{3} = 6.6667 \cdot 0.15915 = \mathbf{1.0610}\ \mathrm{kPa}$$

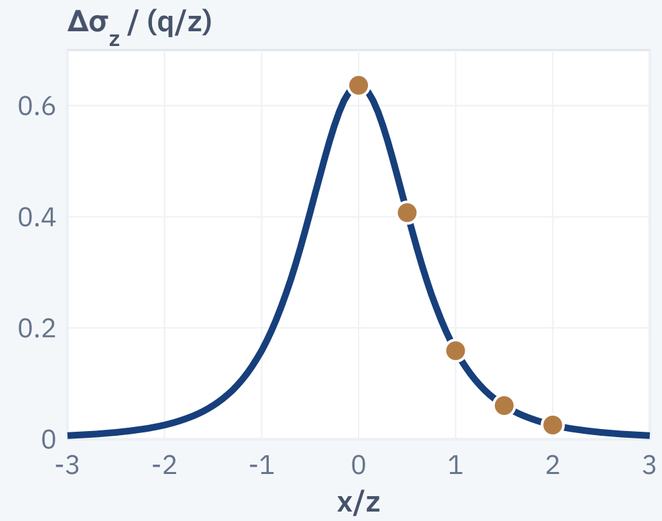
Au point x/z = 1, la contrainte est égale au **quart** de celle sous la charge (1.0610 / 4.2441 = 0.25).

Solution (2/2)

SOLUTION

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0.0	0.0	0.63662	4.2441
1.5	0.5	0.40744	2.7162
3.0	1.0	0.15915	**1.0610**
4.5	1.5	0.06027	0.4018
6.0	2.0	0.02546	0.1698

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ ne dépend que de x/z : la même courbe sert pour tout q et tout z. Pour x/z = 2, la contrainte vaut 0.04 fois celle située sous la charge (0.1698 kPa).



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

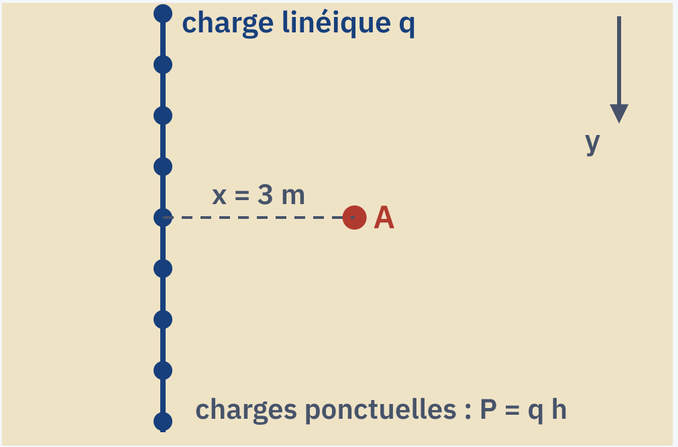
EXEMPLE

Données

Charge	$q = 10$ **kN/m ; le long de la ligne, charges ponctuelles** $P = q\,h$ **espacées de** h **(**$h = 8\,;\,4\,;\,2\,;\,1$ **m)**
Point A	$x = 3$ **m,** $z = 4$ **m (distance horizontale de la ligne) ; Boussinesq :** $\Delta\sigma_z = 3Pz^3/(2\pi L^5)$

À DÉTERMINER

Somme des contraintes de Boussinesq des charges ponctuelles (terme à terme pour h = 2 m) ; approche de la valeur de la charge linéique lorsque h diminue.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 P = q h = 10(2) = 20 kN ; pour chaque charge, $L_k^2 = x^2 + y_k^2 + z^2 = 9 + y_k^2 + 16$

k	y_k (m)	$L_k^2 = 25 + y_k^2$	L_k (m)	$\Delta\sigma_{z,k}$ (kPa)	Nombre de charges
0	0	25	5.000	0.19557	1
1	2	29	5.385	0.13494	2 (±k)
2	4	41	6.403	0.05678	2 (±k)
3	6	61	7.810	0.02103	2 (±k)
4	8	89	9.434	0.00818	2 (±k)
5	10	125	11.180	0.00350	2 (±k)

Termes d'exemple : k = 0 : $\Delta\sigma_{z,0} = 3(20)(4^3)/[2\pi(5)^5] = 0.19557$ kPa ; la somme pour $|k| \le 5$ vaut 0.64443 kPa, et le reste pour $|k| \ge 6$ vaut 0.00748 kPa.

Solution (2/2)

SOLUTION

h (m)	P = q h (kN)	Somme des charges ponctuelles $\Delta\sigma_z$ (kPa)	Écart (%)
8	80	0.852175	30.72
4	40	0.660644	1.34
2	20	0.651907	0.0013
1	10	0.651899	< 0.0001
charge linéique		**0.651899**	0

Pour une charge linéique, $\Delta\sigma_z = 2q\,z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = 2(10)(4^3)/[\pi(25)^2] =$ **0.651899 kPa**.

Lorsque les charges ponctuelles sont rapprochées, par exemple $h \leq z/2$, leur somme se rapproche beaucoup de cette valeur (h = 2 m : 0.651907 kPa) ; pour un espacement large, tel que h = 8 m, l'écart est en revanche important. Cela montre que la formule de la charge linéique est l'intégrale d'une file de charges ponctuelles.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

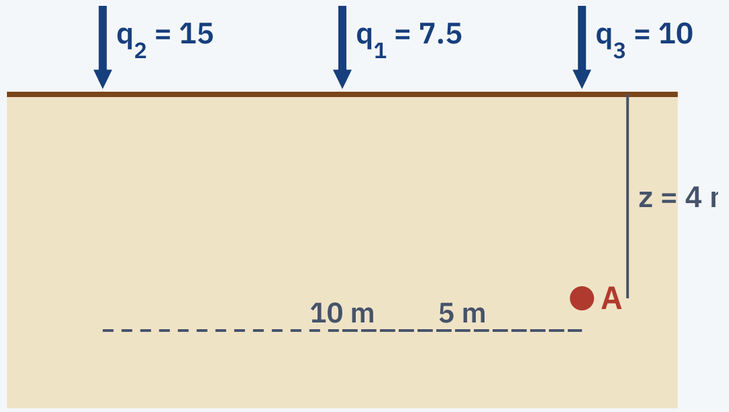
EXEMPLE

Données

Charges	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$)**;** $q_2 = 15$ **kN/m** ($x_L = -5$ **m);** $q_3 = 10$ **kN/m** ($x_L = 5$ **m)**
Points	**A :** $x_A = 5$ **m,** $z = 4$ **m (directement sous la charge 3) ; à** $z = 4$ **m,** $x = -7.5$ **…** 7.5 **m**

À DÉTERMINER

Contribution de chaque charge au point A et $\Delta\sigma_z$ total ; contrainte cumulée le long de x à la profondeur z = 4 m.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Charge 3 (x = 5 – 5 = 0) : A se trouve directement sous la charge

$$\Delta\sigma_{z(3)} = \frac{2q_3}{\pi z} = \frac{2(10)}{\pi(4)} = \mathbf{1.59155}\ \mathrm{kPa}$$

2 Charge 1 (x = 5 m) et charge 2 (x = 10 m) : valeurs de l'exemple 1

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542\ \mathrm{kPa}$$

3 Superposition

$$\Delta\sigma_z = 1.59155 + 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{1.81875}\ \mathrm{kPa}$$

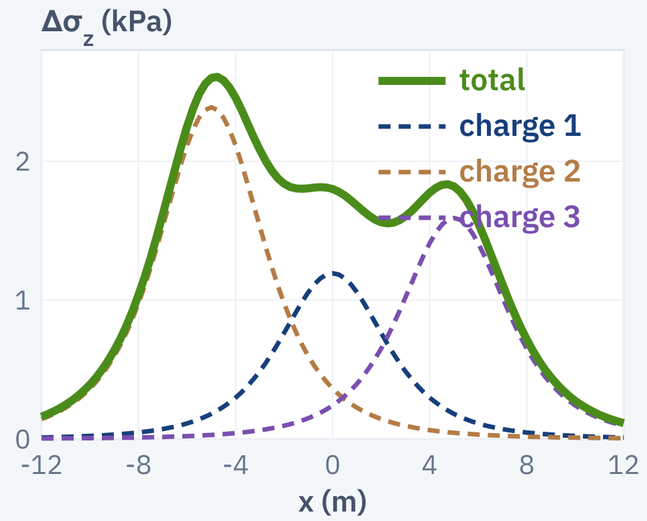
La charge 3 fournit **87.5 %** du total : sous une charge linéique, sa propre contrainte domine, et les charges éloignées n'apportent qu'une faible contribution. La troisième charge ajoute 1.592 kPa à la valeur de 0.2272 kPa de l'exemple 1.

Solution (2/2)

SOLUTION

x (m)	Charge 1	Charge 2	Charge 3	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
−7.5	0.0585	1.2345	0.0137	1.3068
−5.0	0.1818	2.3873	0.0303	2.5994
−2.5	0.6173	1.2345	0.0781	1.9298
0.0	1.1937	0.3636	0.2424	1.7996
2.5	0.6173	0.1171	0.8230	1.5573
5.0	0.1818	0.0454	1.5915	**1.8188**
7.5	0.0585	0.0206	0.8230	0.9021

La courbe totale présente un pic près de chaque charge (x ≈ −4.75 ; −0.50 ; 4.75 m) ; les pics se décalent légèrement sous l'effet des queues des charges voisines. Le pic le plus élevé se situe autour de la charge la plus forte (charge 2, 15 kN/m) : **2.5994 kPa** à x = −5 m ; au point A (x = 5 m), 1.8188 kPa.



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

EXEMPLE

Données

Charges	**charge linéique $q = 50$ kN/m ; charge ponctuelle $P = 50$ kN**
Points	**sous la charge ($x = 0$, $r = 0$) ; $z = 1$; 2 ; 3 ; 5 ; 10 m**

À DÉTERMINER

$\Delta\sigma_z$ sous l'axe et vitesse de décroissance avec la profondeur pour les deux types de charge.

Solution

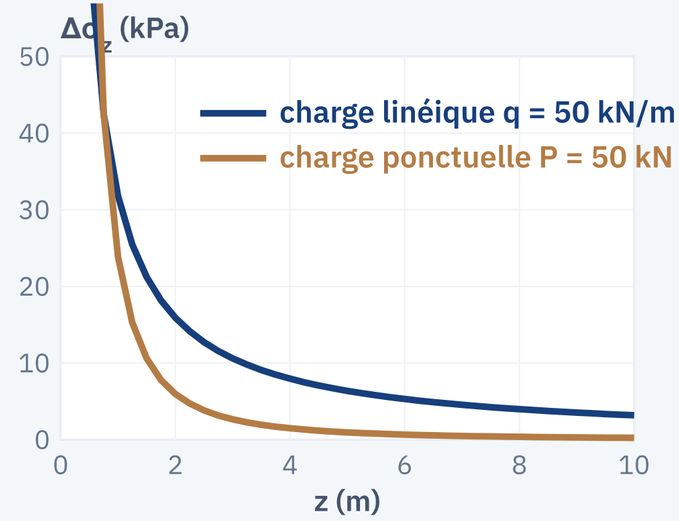
SOLUTION

1 z = 5 m

$$\text{linéique} : \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(50)}{\pi(5)} = \mathbf{6.366}\ \text{kPa}$$

$$\text{semelle isolée} : \Delta\sigma_z = \frac{3}{2\pi}\frac{P}{z^2} = 0.4775\,\frac{50}{5^2} = \mathbf{0.955}\ \text{kPa}$$

z (m)	Charge linéique : 2q/(πz) (kPa)	Charge ponctuelle : 0.4775 P/z² (kPa)	Rapport
1	31.831	23.873	1.3
2	15.915	5.968	2.7
3	10.610	2.653	4.0
5	6.366	0.955	6.7
10	3.183	0.239	13.3



Lorsque z passe de 1 à 10 m, la contrainte due à la charge linéique diminue d'un facteur **10** (31.83 → 3.18 kPa), celle due à la charge ponctuelle d'un facteur **100** (23.87 → 0.24 kPa).

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Synthèse

Points à retenir

Charge linéique (déformation plane) : $\Delta\sigma_z = 2q\, z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = (q/z) \cdot 2/\{\pi[(x/z)^2 + 1]^2\}$; sous la charge, $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$

Rangée de charges ponctuelles : les contraintes de Boussinesq des charges ponctuelles $dP = q\, dy$ sont sommées ; des charges ponctuelles espacées de h = 2 m donnent 0.65191 kPa, la charge linéique 0.65190 kPa

Exemple (q_1 = 7.5 kN/m, q_2 = 15 kN/m ; A : x = 5, z = 4 m) : $\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178$; $\Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542$; **$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa**

Courbe adimensionnelle : pour x/z = 1, la valeur est le quart de celle sous la charge ; **superposition** : la contrainte de chaque charge est déterminée avec sa propre distance horizontale, puis les contraintes sont sommées (pour trois charges, 1.8188 kPa en A)

Profondeur : sous une charge, la contrainte diminue en 1/z (en $1/z^2$ pour une charge ponctuelle) ; en un point à côté de la charge, la contrainte augmente jusqu'à la profondeur $z = \sqrt{3} \cdot x$

Références bibliographiques

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels… Gauthier-Villars, Paris.

REMARQUE

Tous les exemples numériques ont été produits avec le moteur de calcul propre du module ; le module donne les mêmes valeurs. Le module s'ouvre avec deux charges linéiques (7.5 et 15 kN/m) et le point A (x = 5 m, z = 4 m).

GeoTerva

Calculs géotechniques en ligne

De la théorie à la pratique

Saisir dans GeoTerva les charges linéiques, leurs positions et le point considéré ; le module fournit ensemble la contribution de chaque charge, la valeur totale de $\Delta\sigma_z$, le profil en profondeur, les courbes d'isocontraintes, la solution pas à pas et le rapport.

Ouvrir le module → **Page de théorie →**

Ouvrir sur smartphone
Les modules d'essai ne nécessitent pas d'inscription.

Si vous souhaitez les utiliser dans vos cours : info@geoterva.com