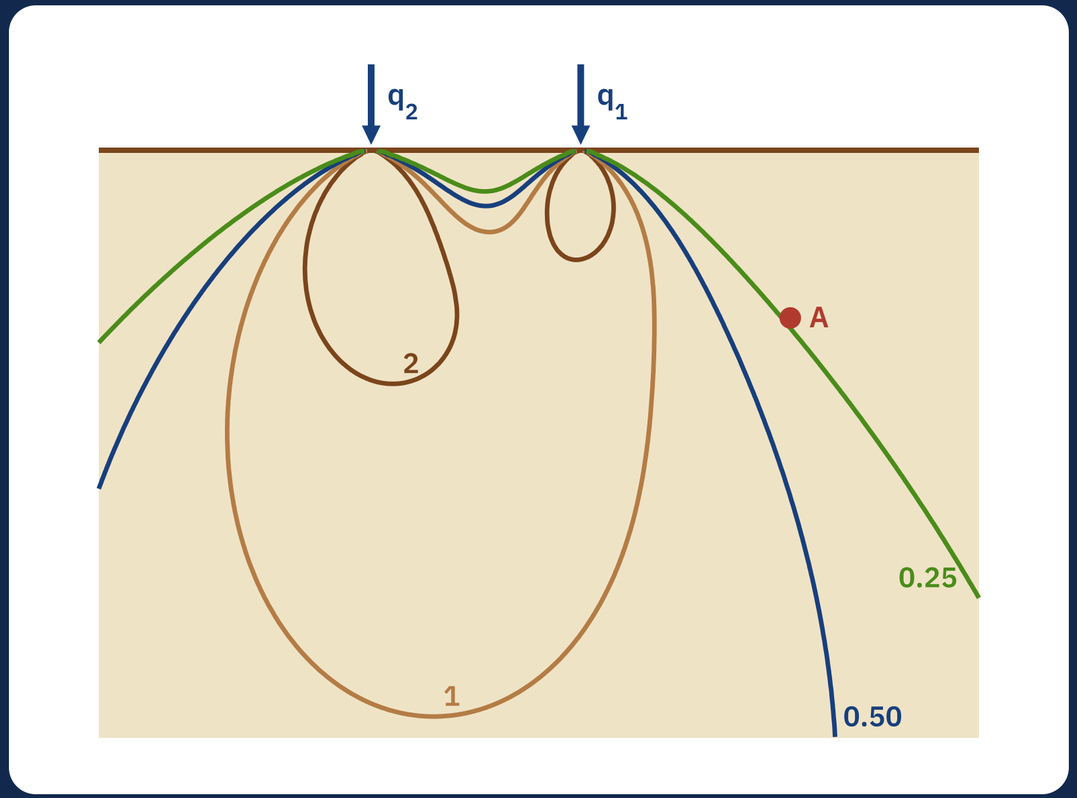
Presentación de clase de geotecnia · Distribución de tensiones en el suelo

Tensión bajo una carga lineal vertical

Clase: tensión vertical que produce en el terreno una carga lineal vertical en la superficie; el punto inicial se resuelve a mano de principio a fin, y los perfiles en profundidad y laterales se presentan con tablas.



- Deformación plana
- Curva adimensional
- Superposición
- Secuencia de cargas puntuales
- Curvas de isotensión

Introducción

¿Qué aprenderemos en esta clase?

La carga lineal en **deformación plana**: la tensión depende solo de la distancia horizontal **x** al punto situado directamente bajo la carga y de la profundidad **z**

La relación $\Delta\sigma_z = 2qz^3/[\pi(x^2 + z^2)^2]$, sumando la carga lineal como una **hilera de cargas puntuales**

Diferencia respecto de la carga puntual: bajo el eje de la carga la tensión disminuye solo con **1/z**, $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$

Forma adimensional: una única curva $\Delta\sigma_z/(q/z)$ y una tabla de x/z; **superposición** para varias cargas paralelas

El ejemplo inicial del módulo (dos cargas lineales) **resuelto a mano de principio a fin**; variación con la profundidad y lateral en tablas

DESARROLLO DE LA CLASE

Cada tema se desarrolla en **tres pasos**:

1 · **Teoría**: fórmula y su justificación

2 · **Enunciado**: datos y se pide

3 · **Solución**: paso a paso, con números

Ejemplo: q_1 = 7.5 kN/m (x = 0) y q_2 = 15 kN/m (x = −5 m); punto A: x = 5 m, z = 4 m.

Carga por unidad de longitud a lo largo de una línea infinita

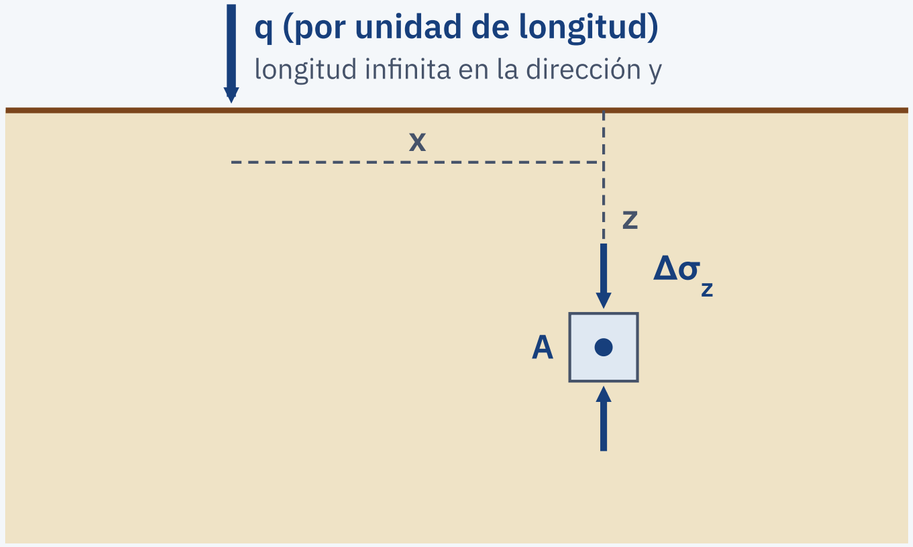
TEORÍA

Una **carga lineal** es una carga de intensidad q por unidad de longitud que actúa sobre la superficie a lo largo de una recta de longitud infinita: un muro largo, un carril o una franja tan estrecha que su ancho puede despreciarse.

Como cada sección perpendicular a la recta está cargada del mismo modo, las tensiones se encuentran en estado de **deformación plana** y dependen únicamente de la distancia horizontal x y de la profundidad z.

La carga es flexible, vertical y de longitud infinita en la dirección y; se supone que el terreno es un medio semiinfinito homogéneo, isótropo y elástico lineal.

$\Delta\sigma_z$ es el incremento causado por la carga; no se incluye la carga debida al terreno suprayacente al punto.



De una fila de cargas puntuales a una carga lineal

TEORÍA

Una carga lineal puede considerarse como una fila de cargas puntuales dP = q dy dispuestas a lo largo de y.

Cada carga puntual da la tensión de Boussinesq con $r^2 = x^2 + y^2$; al sumar estas contribuciones a lo largo de la recta, el valor cerrado de la integral resulta $4/[3(x^2 + z^2)^2]$.

$$\Delta\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3q\,z^3}{2\pi\,(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{4}{3\,(x^2+z^2)^2} \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{2q\,z^3}{\pi\,(x^2+z^2)^2}$$

A diferencia de la carga puntual, la tensión disminuye con la profundidad solo en proporción a 1/z: en el eje $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$.

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ y x/z

TEORÍA

Al dividir por z y sustituir x/z, la ecuación adopta una forma adimensional que da una única curva para cada carga lineal.

Así, una única curva **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** sirve para cualquier valor de x/z.

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

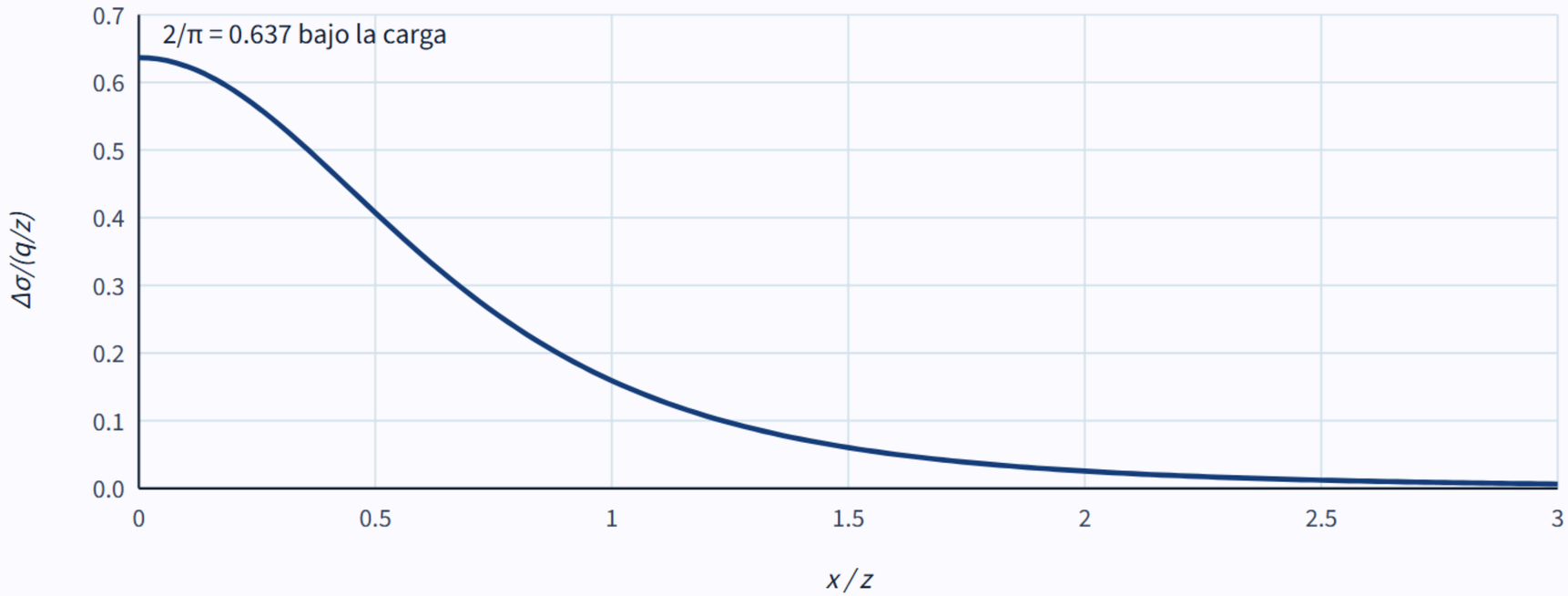
$$x = 0: \qquad \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = 0.637\,\frac{q}{z}$$

VALORES DE $\Delta\sigma_z/(q/z)$ (MÓDULO)

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.0	0.637	1.0	0.159
0.1	0.624	1.2	0.107
0.2	0.589	1.4	0.073
0.3	0.536	1.6	0.050
0.4	0.473	1.8	0.035
0.5	0.407	2.0	0.025
0.6	0.344	2.4	0.014
0.7	0.287	2.8	0.008
0.8	0.237	3.0	0.006
0.9	0.194	3.5	0.004

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ frente a x/z

TEORÍA



Δσz/(q/z) frente a x/z, a partir de la ecuación. En x/z = 1 es la cuarta parte de su valor bajo la carga; más allá de x/z = 3 es inferior a 0.01.

Superposición

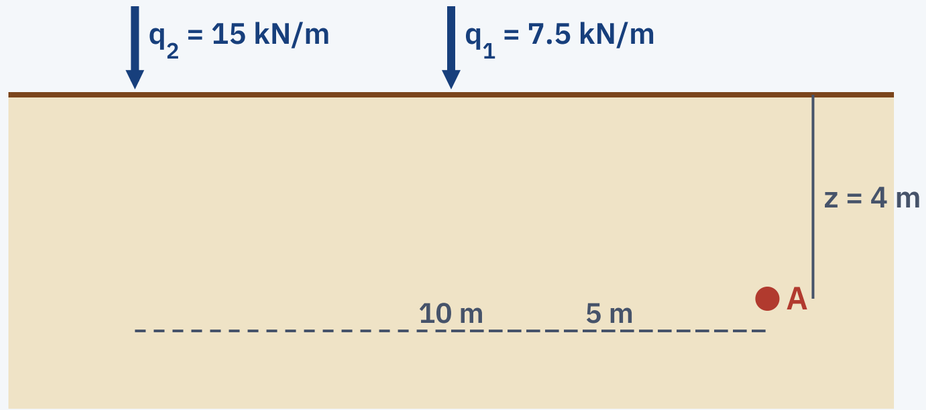
TEORÍA

Como el terreno es elástico, las tensiones de varias cargas lineales se suman por superposición.

La tensión en el punto A es la suma de las tensiones que produciría cada carga por sí sola, con su propia distancia horizontal al punto A.

El módulo admite como máximo ocho cargas lineales paralelas; las cargas se introducen una a una, con sus intensidades y posiciones, mediante **Añadir carga lineal**, y no puede haber dos en la misma posición.

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{2\,q_k\,z^3}{\pi\,(x_k^2 + z^2)^2}$$



Enunciado

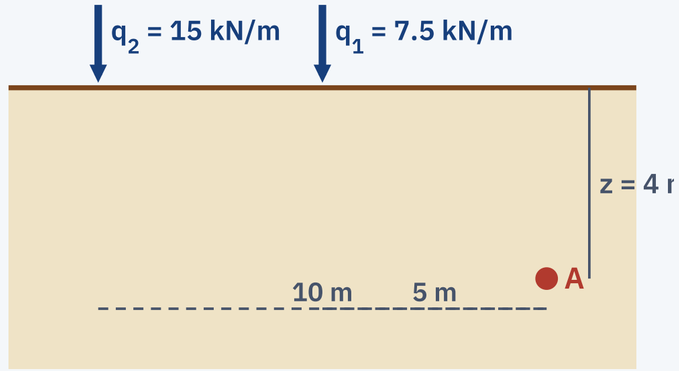
EJEMPLO

Datos

Cargas	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$)**;** $q_2 = 15$ **kN/m** ($x_L = -5$ **m)**
Punto A	$x_A = 5$ **m,** $z = 4$ **m (a** 5 **m de la carga 1 y a** 10 **m de la carga 2)**
Suelo	**homogéneo, medio elástico semiinfinito; deformación plana**

SE PIDE

El $\Delta\sigma_z$ que produce cada carga en el punto A y, por superposición, el $\Delta\sigma_z$ total.



Solución

SOLUCIÓN

1 Carga 1: x = $x_A - x_L$ = 5 − 0 = 5 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2q_1 z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(7.5)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{960}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

2 Carga 2: x = 5 − (−5) = 10 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}920}{\pi\,(13{,}456)} = \mathbf{0.04542}\ \text{kPa}$$

3 Superposición (suelo elástico: las tensiones se suman)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{0.22720}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa. Aunque la carga 2 es el doble de grande, está al doble de distancia de A, por lo que su tensión es aproximadamente la quinta parte del total (relación 0.20). Comprobación para la carga 1: x/z = 1.25 ⇒ 2/(π[1.25² + 1]²) = 0.09695; q_1/z = 1.875; 0.09695 · 1.875 = 0.18178. El módulo da el mismo valor.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

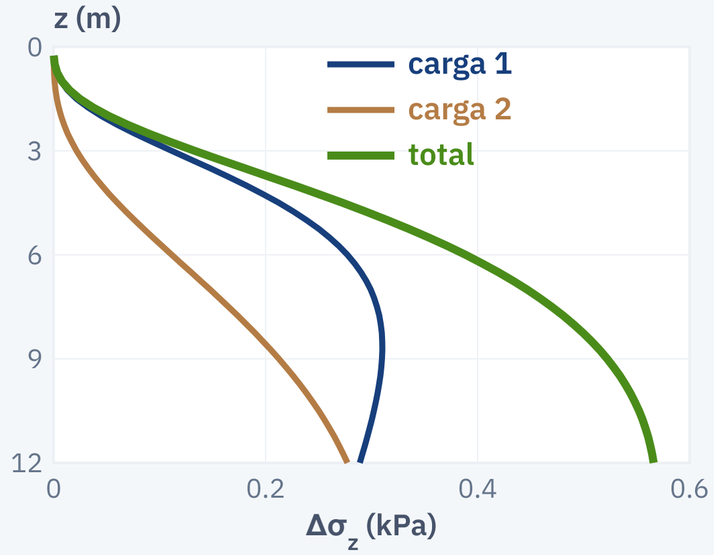
EJEMPLO

Datos

Cargas	**Las dos cargas del ejemplo 1: $q_1 = 7.5$ kN/m ($x_L = 0$), $q_2 = 15$ kN/m ($x_L = -5$ m)**
Puntos	**$x_A = 5$ m; $z = 1.2; 2.4;$ ...; 12 m (filas del perfil del módulo)**

SE PIDE

Para cada profundidad, **$\Delta\sigma_{z(1)}$**, **$\Delta\sigma_{z(2)}$** y el total **$\Delta\sigma_z$**; la solución detallada para z = 8 m; la profundidad de la tensión máxima.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 Carga 1 (x = 5 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2(7.5)(8^3)}{\pi(5^2+8^2)^2} = \frac{7{,}680}{\pi\,(7{,}921)} = \mathbf{0.30863}\ \mathrm{kPa}$$

2 Carga 2 (x = 10 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(8^3)}{\pi(10^2+8^2)^2} = \frac{15{,}360}{\pi\,(26{,}896)} = \mathbf{0.18178}\ \mathrm{kPa}$$

3 Total

$$\Delta\sigma_z = 0.30863 + 0.18178 = \mathbf{0.49041}\ \mathrm{kPa}$$

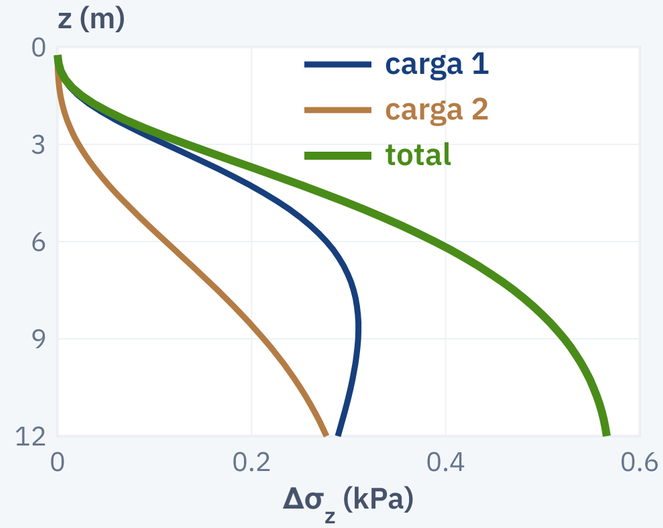
A z = 8 m, $\Delta\sigma_z$ = 0.49041 kPa; es mucho mayor que el valor a z = 4 m (0.22720 kPa): el punto A está junto a las cargas y la tensión sigue aumentando en profundidad (la tabla, en la página siguiente).

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

z (m)	$\Delta\sigma_{z(1)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(2)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
1.2	0.01180	0.00160	**0.01341**
2.4	0.06976	0.01180	**0.08156**
3.6	0.15460	0.03492	**0.18951**
4.8	0.22880	0.06976	**0.29856**
6.0	0.27716	0.11152	**0.38868**
7.2	0.30183	0.15460	**0.45643**
8.4	0.30990	0.19456	**0.50446**
9.6	0.30775	0.22880	**0.53655**
10.8	0.29981	0.25631	**0.55612**
12.0	0.28888	0.27716	**0.56604**

Para una sola carga, la tensión es máxima a la profundidad z = √3·x: para la carga 1, a 8.66 m (0.3101 kPa). La suma de las dos cargas sigue aumentando a 12 m; la suma máxima es 0.5687 kPa a una profundidad de 13.1 m.



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

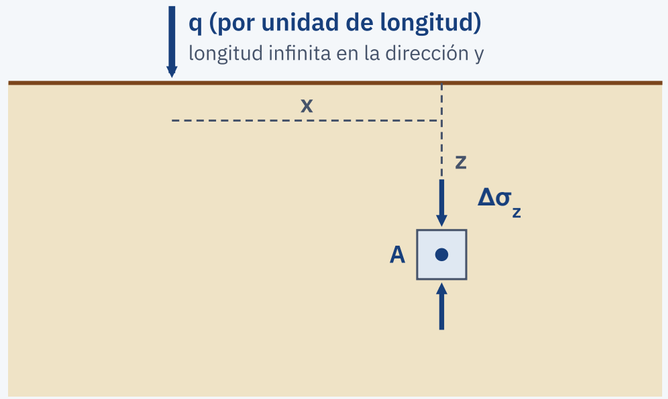
EJEMPLO

Datos

Carga	$q = 20$ **kN/m, carga lineal vertical**
Puntos	$z = 3$ **m;** $x = 0; 1.5; 3; 4.5; 6$ **m**

SE PIDE

Para cada punto, **x/z**, **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** y **$\Delta\sigma_z$**; razón entre el valor en el punto x = z y el valor bajo la carga.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 Bajo la carga (x = 0): x/z = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(20)}{\pi(3)} = \mathbf{4.2441}\ \text{kPa}$$

2 x = 3 m: x/z = 1

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[1^2+1\right]^2} = \frac{2}{4\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915 \cdot \frac{20}{3} = 6.6667 \cdot 0.15915 = \mathbf{1.0610}\ \text{kPa}$$

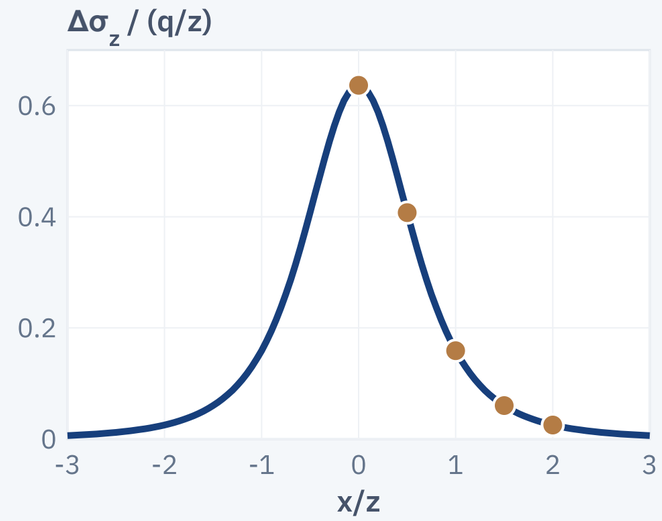
En el punto x/z = 1 la tensión es **la cuarta parte** de la existente bajo la carga (1.0610 / 4.2441 = 0.25).

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0.0	0.0	0.63662	4.2441
1.5	0.5	0.40744	2.7162
3.0	1.0	0.15915	**1.0610**
4.5	1.5	0.06027	0.4018
6.0	2.0	0.02546	0.1698

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ depende solo de x/z: la misma curva sirve para cualquier q y cualquier z. Para x/z = 2 la tensión es 0.04 veces la que hay bajo la carga (0.1698 kPa).



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

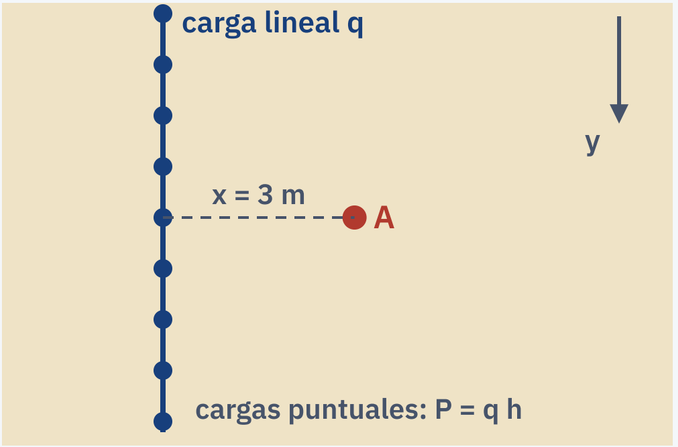
EJEMPLO

Datos

Carga	$q = 10$ **kN/m; a lo largo de la línea, cargas puntuales** $P = q\,h$ **con separación** h **(**$h = 8; 4; 2; 1$ **m)**
Punto A	$x = 3$ **m,** $z = 4$ **m (distancia horizontal de la línea); Boussinesq:** $\Delta\sigma_z = 3Pz^3/(2\pi L^5)$

SE PIDE

Suma de las tensiones de Boussinesq de las cargas puntuales (término a término para h = 2 m); aproximación al valor de la carga lineal a medida que h disminuye.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 P = q h = 10(2) = 20 kN; para cada carga $L_k^2 = x^2 + y_k^2 + z^2 = 9 + y_k^2 + 16$

k	y_k (m)	$L_k^2 = 25 + y_k^2$	L_k (m)	$\Delta\sigma_{z,k}$ (kPa)	¿Cuántas cargas?
0	0	25	5.000	0.19557	1
1	2	29	5.385	0.13494	2 (±k)
2	4	41	6.403	0.05678	2 (±k)
3	6	61	7.810	0.02103	2 (±k)
4	8	89	9.434	0.00818	2 (±k)
5	10	125	11.180	0.00350	2 (±k)

Términos del ejemplo: k = 0: $\Delta\sigma_{z,0} = 3(20)(4^3)/[2\pi(5)^5] = 0.19557$ kPa; la suma para $|k| \le 5$ es 0.64443 kPa y el resto para $|k| \ge 6$ es 0.00748 kPa.

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

h (m)	P = q h (kN)	Suma de las cargas puntuales $\Delta\sigma_z$ (kPa)	Diferencia (%)
8	80	0.852175	30.72
4	40	0.660644	1.34
2	20	0.651907	0.0013
1	10	0.651899	< 0.0001
carga lineal		**0.651899**	0

Para una carga lineal, $\Delta\sigma_z = 2q\,z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = 2(10)(4^3)/[\pi(25)^2]$ = **0.651899 kPa**. Cuando las cargas puntuales se toman con una separación pequeña, como $h \le z/2$, la suma se aproxima mucho a este valor (h = 2 m: 0.651907 kPa); con una separación grande, como h = 8 m, en cambio, la diferencia es grande. Ello muestra que la fórmula de la carga lineal es la integral de una hilera de cargas puntuales.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

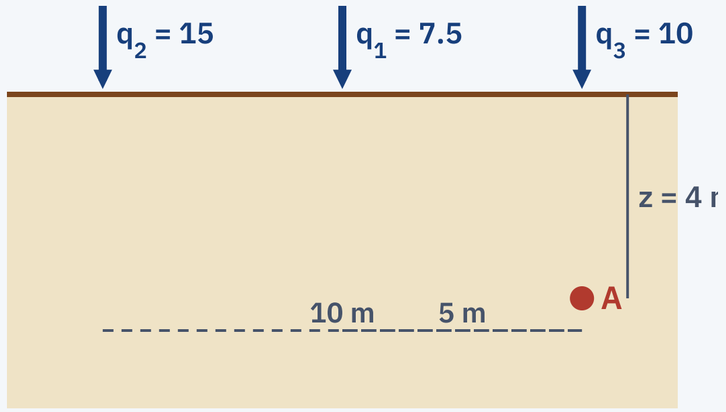
EJEMPLO

Datos

Cargas	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ **kN/m** ($x_L = -5$ **m**); $q_3 = 10$ **kN/m** ($x_L = 5$ **m**)
Puntos	**A:** $x_A = 5$ **m**, $z = 4$ **m (justo debajo de la carga 3); a** $z = 4$ **m,** $x = -7.5$ **…** 7.5 **m**

SE PIDE

Contribución de cada carga en el punto A y $\Delta\sigma_z$ total; tensión total a lo largo de x a la profundidad z = 4 m.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 Carga 3 (x = 5 – 5 = 0): A se encuentra justo debajo de la carga

$$\Delta\sigma_{z(3)} = \frac{2q_3}{\pi z} = \frac{2(10)}{\pi(4)} = \mathbf{1.59155}\ \text{kPa}$$

2 Carga 1 (x = 5 m) y carga 2 (x = 10 m): valores del ejemplo 1

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542\ \text{kPa}$$

3 Superposición

$$\Delta\sigma_z = 1.59155 + 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{1.81875}\ \text{kPa}$$

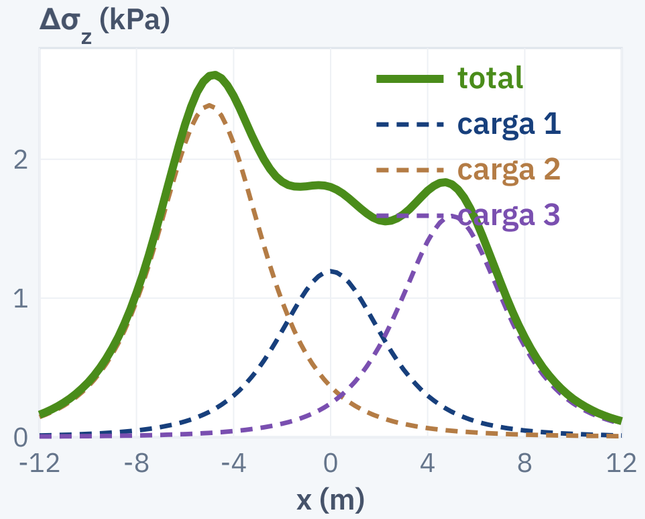
La carga 3 aporta el **87.5 por ciento** del total: bajo una carga lineal predomina su propia tensión y las cargas lejanas contribuyen poco. La tercera carga suma 1.592 kPa al valor de 0.2272 kPa del Ejemplo 1.

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

x (m)	Carga 1	Carga 2	Carga 3	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
−7.5	0.0585	1.2345	0.0137	1.3068
−5.0	0.1818	2.3873	0.0303	2.5994
−2.5	0.6173	1.2345	0.0781	1.9298
0.0	1.1937	0.3636	0.2424	1.7996
2.5	0.6173	0.1171	0.8230	1.5573
5.0	0.1818	0.0454	1.5915	**1.8188**
7.5	0.0585	0.0206	0.8230	0.9021

La curva total presenta un máximo cerca de cada carga (x ≈ −4.75; −0.50; 4.75 m); los máximos se desplazan ligeramente por las colas de las cargas vecinas. El máximo más alto se sitúa en torno a la carga más intensa (carga 2, 15 kN/m): **2.5994 kPa** en x = −5 m; en el punto A (x = 5 m), 1.8188 kPa.



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

EJEMPLO

Datos

Cargas	**carga lineal $q = 50$ kN/m; carga puntual $P = 50$ kN**
Puntos	**bajo la carga ($x = 0, r = 0$); $z = 1; 2; 3; 5; 10$ m**

SE PIDE

$\Delta\sigma_z$ bajo el eje y velocidad de disminución con la profundidad para los dos tipos de carga.

Solución

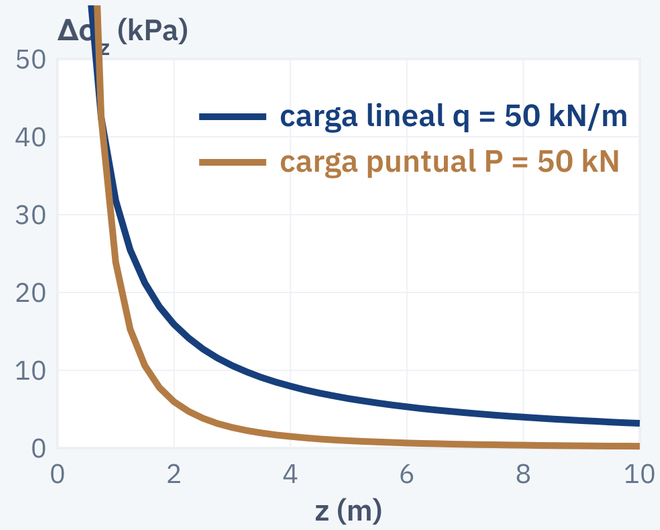
SOLUCIÓN

1 z = 5 m

$$\text{lineal: } \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(50)}{\pi(5)} = \mathbf{6.366}\ \text{kPa}$$

$$\text{individual: } \Delta\sigma_z = \frac{3}{2\pi}\frac{P}{z^2} = 0.4775\,\frac{50}{5^2} = \mathbf{0.955}\ \text{kPa}$$

z (m)	Carga lineal: 2q/(πz) (kPa)	Carga puntual: 0.4775 P/z² (kPa)	Relación
1	31.831	23.873	1.3
2	15.915	5.968	2.7
3	10.610	2.653	4.0
5	6.366	0.955	6.7
10	3.183	0.239	13.3



Cuando z pasa de 1 → 10 m, la tensión de la carga lineal disminuye **10 veces** (31.83 → 3.18 kPa) y la de la carga puntual **100 veces** (23.87 → 0.24 kPa).

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Resumen

Puntos clave

Carga lineal (deformación plana): $\Delta\sigma_z = 2q\, z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = (q/z) \cdot 2/\{\pi[(x/z)^2 + 1]^2\}$; bajo la carga, $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$

Hilera de cargas puntuales: se suman las tensiones de Boussinesq de las cargas puntuales $dP = q\, dy$; las cargas puntuales con separación $h = 2$ m dan 0.65191 kPa y la carga lineal, 0.65190 kPa

Ejemplo ($q_1 = 7.5$ kN/m, $q_2 = 15$ kN/m; A: $x = 5$, $z = 4$ m): $\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178$; $\Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542$; **$\Delta\sigma_z = 0.22720$ kPa**

Curva adimensional: para $x/z = 1$ el valor es la cuarta parte del correspondiente bajo la carga; **superposición**: la tensión de cada carga se obtiene con su propia distancia horizontal y se suman (con tres cargas, 1.8188 kPa en A)

Profundidad: bajo una carga la tensión disminuye con $1/z$ (con $1/z^2$ en una carga puntual); en un punto situado junto a la carga la tensión aumenta hasta una profundidad $z = \sqrt{3} \cdot x$

Referencias bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels... Gauthier-Villars, Paris.

NOTA

Todos los ejemplos numéricos se han obtenido con el propio motor de cálculo del módulo; el módulo da los mismos valores. El módulo se abre con dos cargas lineales (7.5 y 15 kN/m) y el punto A (x = 5 m, z = 4 m).

Cálculos geotécnicos en línea

De la teoría a la práctica

Introducir en GeoTerva las propias cargas lineales, sus posiciones y el punto considerado; el módulo proporciona conjuntamente la contribución de cada carga, el valor total de $\Delta\sigma_z$, el perfil en profundidad, las curvas de igual tensión, la solución paso a paso y el informe.

Abrir el módulo → | **Página de teoría →**

Abrir en el teléfono
Los módulos de prueba no requieren registro.

Si desea utilizarlas en sus clases: info@geoterva.com