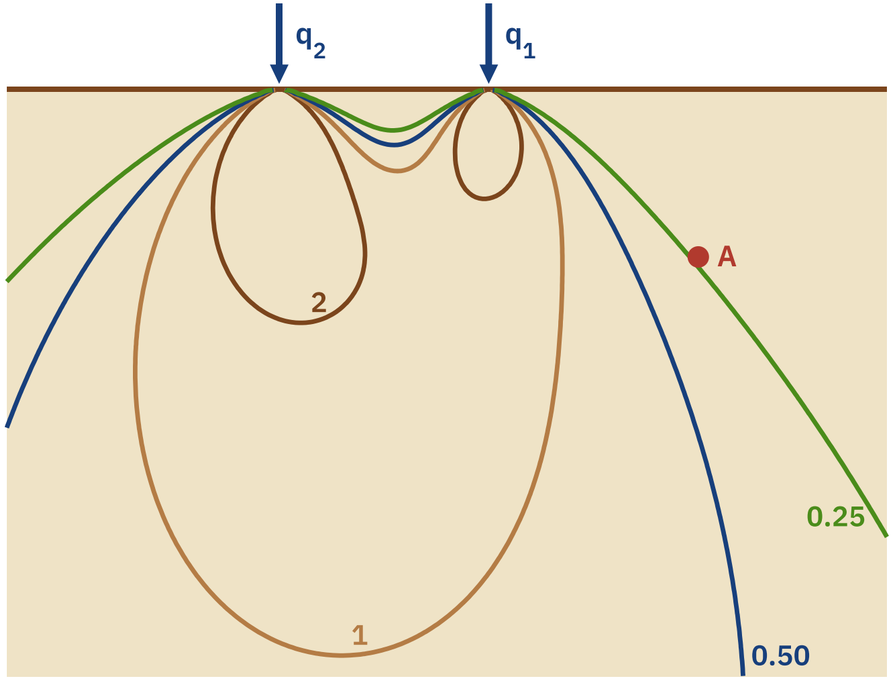
Geotechnische Vorlesungspräsentation · Spannungsausbreitung im Baugrund

Spannung unter einer vertikalen Linienlast

Vorlesung: die vertikale Spannung, die eine vertikale Linienlast an der Geländeoberfläche im Baugrund hervorruft; der Ausgangspunkt wird durchgängig von Hand gerechnet, Tiefen- und Querprofile mit Tabellen.

- Ebener Verzerrungszustand
- Dimensionslose Kurve
- Superposition
- Reihenfolge der Einzellasten
- Isospannungslinien



Was lernen wir in dieser Vorlesung?

- Eine Linienlast unter **ebener Verformung**: Die Spannung hängt nur vom horizontalen Abstand **x** direkt darunter und von der Tiefe **z** ab
- Durch Summation der Linienlast als **Reihe von Einzellasten** ergibt sich die Beziehung $\Delta\sigma_z = 2qz^3/[\pi(x^2 + z^2)^2]$
- Unterschied zur Einzellast: unterhalb der Lastachse nimmt die Spannung nur mit **1/z** ab, $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$
- **Dimensionslose Form**: eine einzige $\Delta\sigma_z/(q/z)$-Kurve und eine x/z-Tabelle; **Superposition** für mehrere parallele Lasten
- Das Eröffnungsbeispiel des Moduls (zwei Linienlasten) **vollständig von Hand**; Tiefen- und Seitenvariation in Tabellen

VORLESUNGSABLAUF

Jedes Thema wird in **drei Schritten** behandelt:

1 · **Theorie**: Formel und Begründung

2 · **Aufgabe**: Gegeben und Gesucht

3 · **Lösung**: Schritt für Schritt, mit Zahlen

Beispiel: q_1 = 7.5 kN/m (x = 0) und q_2 = 15 kN/m (x = −5 m); Punkt A: x = 5 m, z = 4 m.

Last je Längeneinheit entlang einer unendlich langen Linie

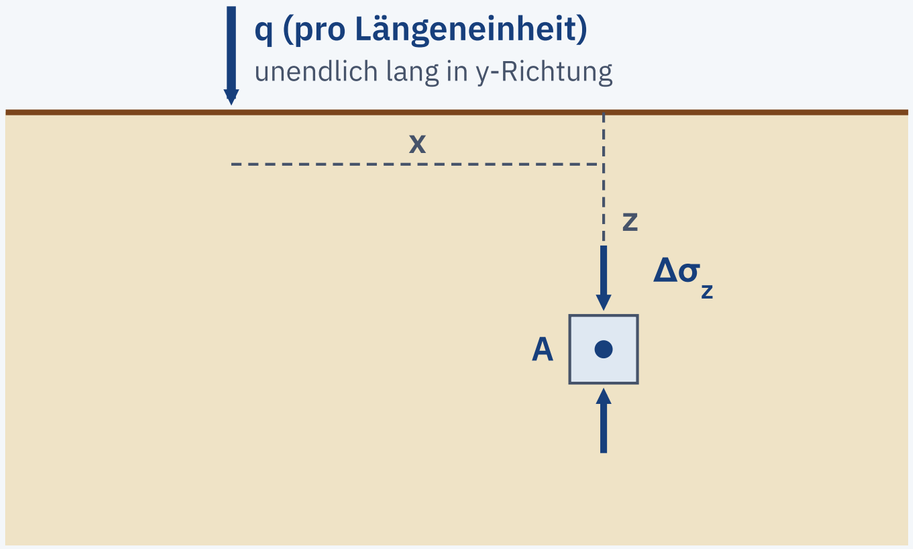
THEORIE

Eine Linienlast ist eine Last der Intensität q pro Längeneinheit, die entlang einer unendlich langen Geraden auf der Oberfläche wirkt: eine lange Wand, eine Schiene oder ein so schmaler Streifen, dass seine Breite vernachlässigt werden kann.

Da jeder zur Geraden senkrechte Schnitt in gleicher Weise belastet ist, liegen die Spannungen im Zustand der **ebenen Verformung** vor und hängen nur vom horizontalen Abstand x und von der Tiefe z ab.

Die Last ist flexibel, vertikal und in y-Richtung unendlich lang; der Baugrund wird als homogener, isotroper, linear elastischer Halbraum angenommen.

$\Delta\sigma_z$ ist der durch die Last verursachte Zuwachs; die Überlagerung des Bodens über dem Punkt ist nicht enthalten.



Von einer Reihe von Einzellasten zur Linienlast

THEORIE

Eine Linienlast kann als eine Reihe von Einzellasten dP = q dy entlang y aufgefasst werden.

Jede Einzellast liefert die Boussinesq-Spannung mit $r^2 = x^2 + y^2$; werden diese Beiträge entlang der Geraden summiert, ergibt sich der geschlossene Wert des Integrals zu $4/[3(x^2 + z^2)^2]$.

$$\Delta\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3q\,z^3}{2\pi\,(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{4}{3\,(x^2+z^2)^2} \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{2q\,z^3}{\pi\,(x^2+z^2)^2}$$

Anders als bei einer Einzellast nimmt die Spannung mit der Tiefe nur mit 1/z ab: auf der Achse $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$.

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ und x/z

THEORIE

Dividiert man durch z und setzt x/z ein, nimmt die Gleichung eine dimensionslose Form an, die für jede Linienlast eine einzige Kurve ergibt.

Somit wird für jeden Wert von x/z eine einzige **$\Delta\sigma_z/(q/z)$**-Kurve verwendet.

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

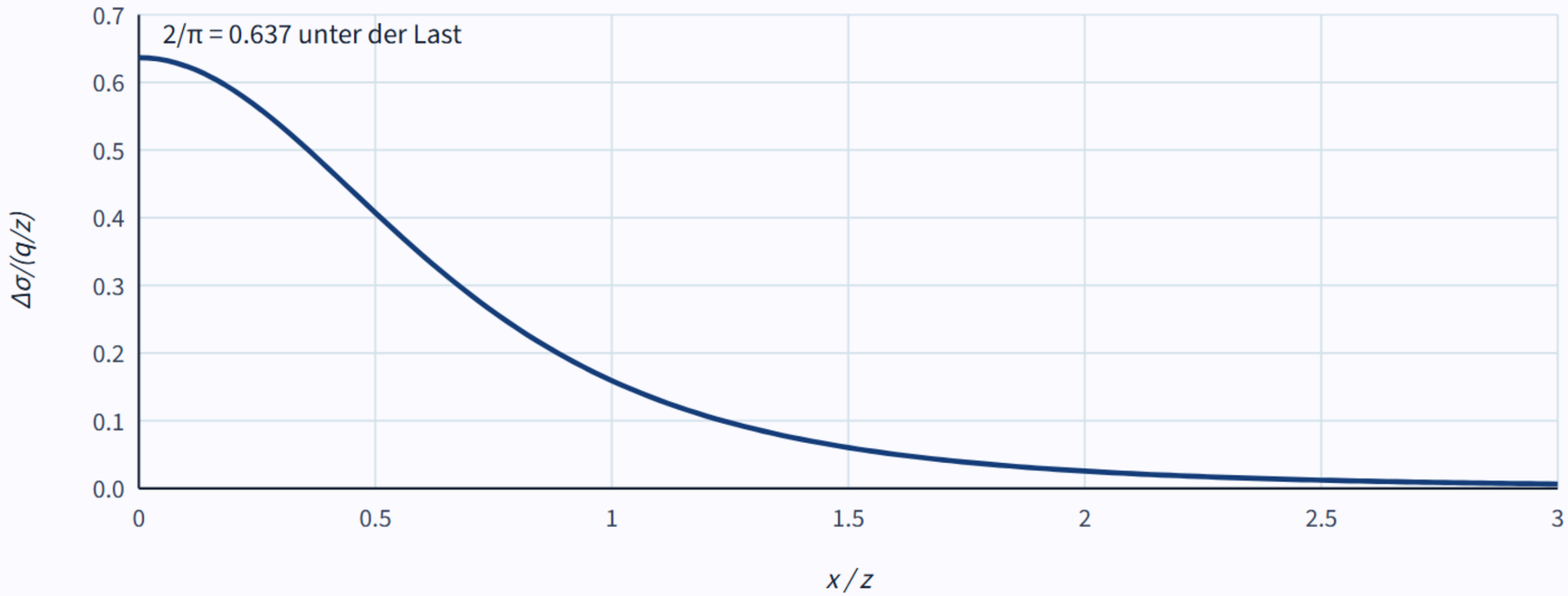
$$x = 0: \qquad \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = 0.637\,\frac{q}{z}$$

Werte $\Delta\sigma_z/(q/z)$ (MODUL)

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.0	0.637	1.0	0.159
0.1	0.624	1.2	0.107
0.2	0.589	1.4	0.073
0.3	0.536	1.6	0.050
0.4	0.473	1.8	0.035
0.5	0.407	2.0	0.025
0.6	0.344	2.4	0.014
0.7	0.287	2.8	0.008
0.8	0.237	3.0	0.006
0.9	0.194	3.5	0.004

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ über x/z

THEORIE



Δσz/(q/z) in Abhängigkeit von x/z, aus der Gleichung. Bei x/z = 1 beträgt sie ein Viertel ihres Wertes unter der Last; jenseits von x/z = 3 liegt sie unter 0.01.

Superposition

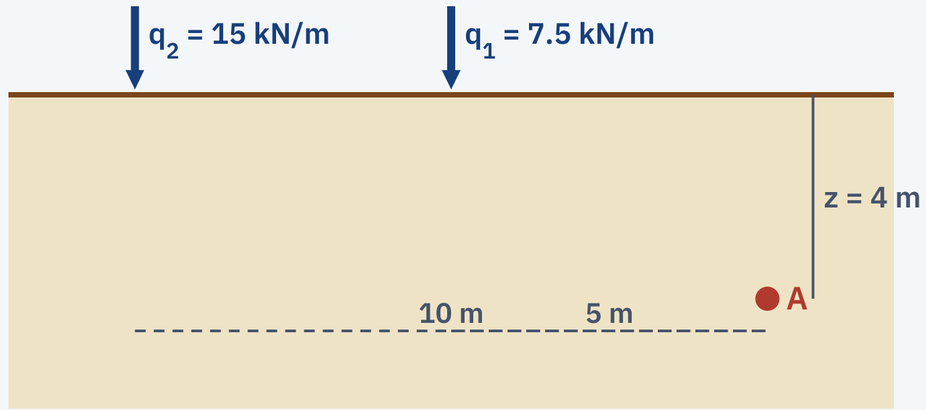
THEORIE

Da der Boden elastisch ist, werden die Spannungen mehrerer Linienlasten durch Superposition summiert.

Die Spannung im Punkt A ist die Summe der Spannungen, die jede Last für sich allein mit ihrem jeweiligen horizontalen Abstand zum Punkt A hervorruft.

Das Modul nimmt höchstens acht parallele Linienlasten auf; die Lasten werden mit ihren Intensitäten und Lagen einzeln über **Linienlast hinzufügen** eingegeben, und keine zwei dürfen an derselben Stelle liegen.

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{2\,q_k\,z^3}{\pi\,(x_k^2 + z^2)^2}$$



Aufgabe

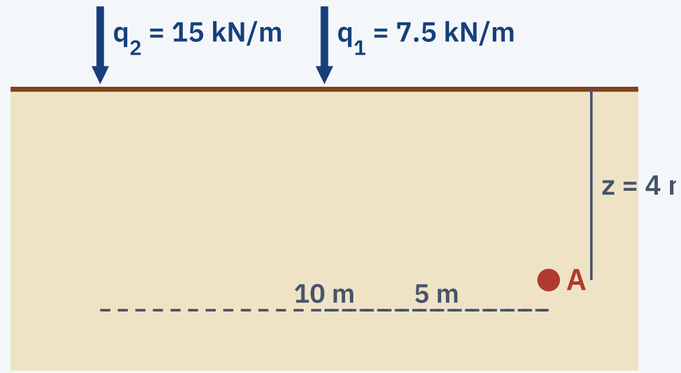
BEISPIEL

Gegeben

Lasten	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ **kN/m** ($x_L = -5$ **m**)
Punkt A	$x_A = 5$ **m**, $z = 4$ **m (yük 1'den** 5 **m, yük 2'den** 10 **m uzakta)**
Baugrund	**homogener, elastischer Halbraum; ebener Formänderungszustand**

GESUCHT

Die von jeder Last am Punkt A erzeugte $\Delta\sigma_z$ und durch Superposition die gesamte $\Delta\sigma_z$.



Lösung

LÖSUNG

1 Last 1: x = $x_A - x_L$ = 5 – 0 = 5 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2q_1 z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(7.5)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{960}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.18178}\ \mathrm{kPa}$$

2 Last 2: x = 5 – (–5) = 10 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}920}{\pi\,(13{,}456)} = \mathbf{0.04542}\ \mathrm{kPa}$$

3 Superposition (elastischer Boden: die Spannungen werden addiert)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{0.22720}\ \mathrm{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa. Obwohl die Last 2 doppelt so groß ist, ist sie doppelt so weit von A entfernt, sodass ihre Spannung etwa ein Fünftel der Summe beträgt (Verhältnis 0.20). Kontrolle für Last 1: x/z = 1.25 ⇒ 2/(π[1.25² + 1]²) = 0.09695; q_1/z = 1.875; 0.09695 · 1.875 = 0.18178. Das Modul liefert denselben Wert.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

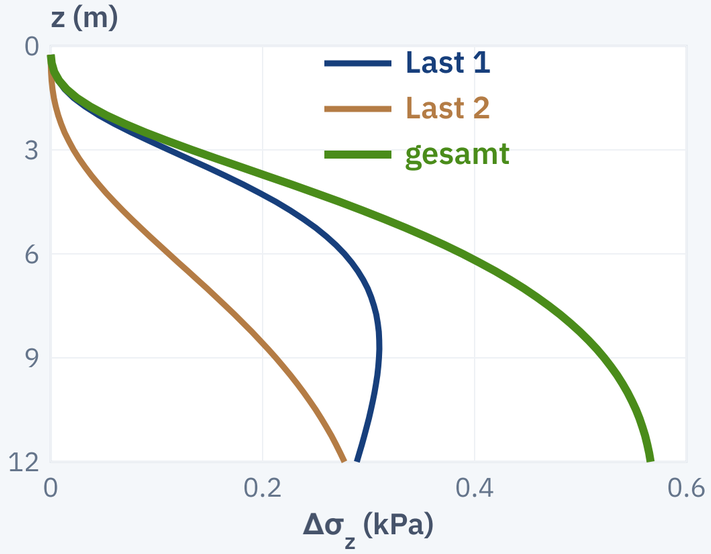
BEISPIEL

Gegeben

Lasten	**Die beiden Lasten aus Beispiel 1: $q_1 = 7.5$ kN/m ($x_L = 0$), $q_2 = 15$ kN/m ($x_L = -5$ m)**
Punkte	**$x_A = 5$ m; $z = 1.2; 2.4;$ ...; 12 m (Profilschichtzeilen des Moduls)**

GESUCHT

Für jede Tiefe **$\Delta\sigma_{z(1)}$**, **$\Delta\sigma_{z(2)}$** und die Gesamtspannung **$\Delta\sigma_z$**; ausführliche Lösung für z = 8 m; die Tiefe der größten Spannung.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Last 1 (x = 5 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2(7.5)(8^3)}{\pi(5^2+8^2)^2} = \frac{7{,}680}{\pi\,(7{,}921)} = \mathbf{0.30863}\ \mathrm{kPa}$$

2 Last 2 (x = 10 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(8^3)}{\pi(10^2+8^2)^2} = \frac{15{,}360}{\pi\,(26{,}896)} = \mathbf{0.18178}\ \mathrm{kPa}$$

3 Gesamt

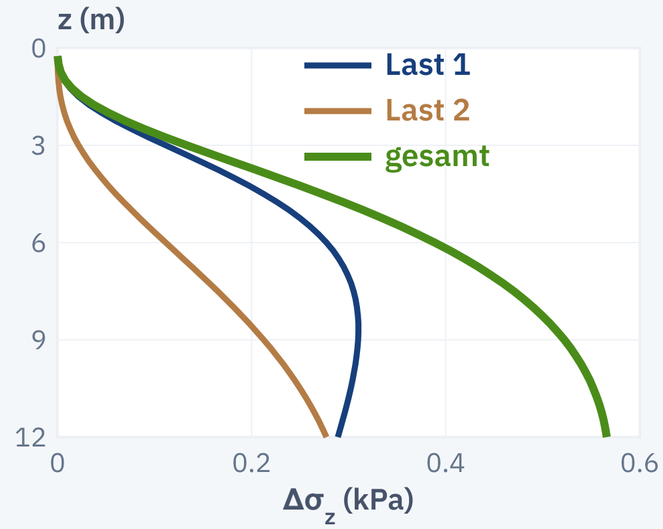
$$\Delta\sigma_z = 0.30863 + 0.18178 = \mathbf{0.49041}\ \mathrm{kPa}$$

Bei z = 8 m ist $\Delta\sigma_z$ = 0.49041 kPa; dieser Wert ist viel größer als der Wert bei z = 4 m (0.22720 kPa): Der Punkt A liegt neben den Lasten, und die Spannung nimmt mit der Tiefe weiter zu (die Tabelle befindet sich auf der nächsten Seite).

Lösung (2/2)

LÖSUNG

z (m)	$\Delta\sigma_{z(1)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(2)}$ (kPa)	Gesamt $\Delta\sigma_z$ (kPa)
1.2	0.01180	0.00160	**0.01341**
2.4	0.06976	0.01180	**0.08156**
3.6	0.15460	0.03492	**0.18951**
4.8	0.22880	0.06976	**0.29856**
6.0	0.27716	0.11152	**0.38868**
7.2	0.30183	0.15460	**0.45643**
8.4	0.30990	0.19456	**0.50446**
9.6	0.30775	0.22880	**0.53655**
10.8	0.29981	0.25631	**0.55612**
12.0	0.28888	0.27716	**0.56604**



Für eine einzelne Last ist die Spannung in der Tiefe z = √3·x am größten: für Last 1 bei 8.66 m (0.3101 kPa). Die Summe der beiden Lasten nimmt bei 12 m noch zu; das Maximum der Summe beträgt 0.5687 kPa in einer Tiefe von 13.1 m.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

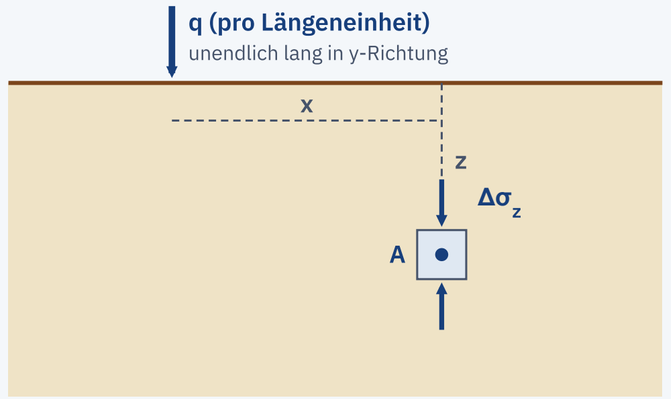
BEISPIEL

Gegeben

Last	$q = 20$ **kN/m, vertikale Linienlast**
Punkte	$z = 3$ **m;** $x = 0; 1.5; 3; 4.5; 6$ **m**

GESUCHT

Für jeden Punkt **x/z**, **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** und **$\Delta\sigma_z$**; das Verhältnis des Werts am Punkt x = z zum Wert unter der Last.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Unter der Last (x = 0): x/z = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(20)}{\pi(3)} = \mathbf{4.2441}\ \mathrm{kPa}$$

2 x = 3 m: x/z = 1

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[1^2+1\right]^2} = \frac{2}{4\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915 \cdot \frac{20}{3} = 6.6667 \cdot 0.15915 = \mathbf{1.0610}\ \mathrm{kPa}$$

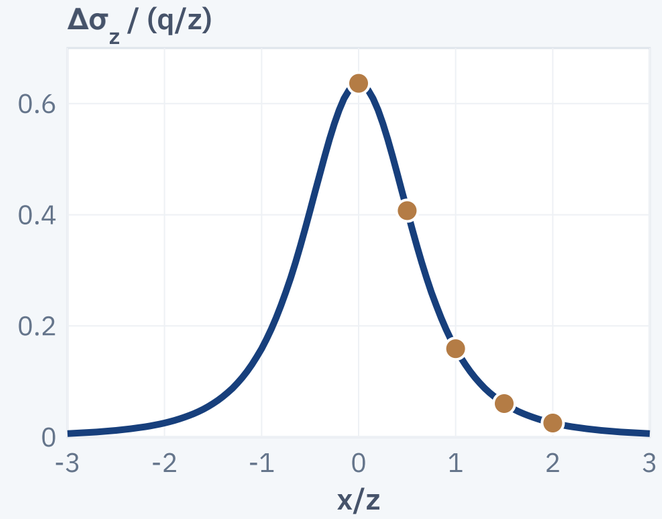
Im Punkt x/z = 1 beträgt die Spannung **ein Viertel** derjenigen unter der Last (1.0610 / 4.2441 = 0.25).

Lösung (2/2)

LÖSUNG

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0.0	0.0	0.63662	4.2441
1.5	0.5	0.40744	2.7162
3.0	1.0	0.15915	**1.0610**
4.5	1.5	0.06027	0.4018
6.0	2.0	0.02546	0.1698

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ hängt nur von x/z ab: Dieselbe Kurve wird für jedes q und jedes z verwendet. Bei x/z = 2 beträgt die Spannung das 0.04-Fache derjenigen unter der Last (0.1698 kPa).



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

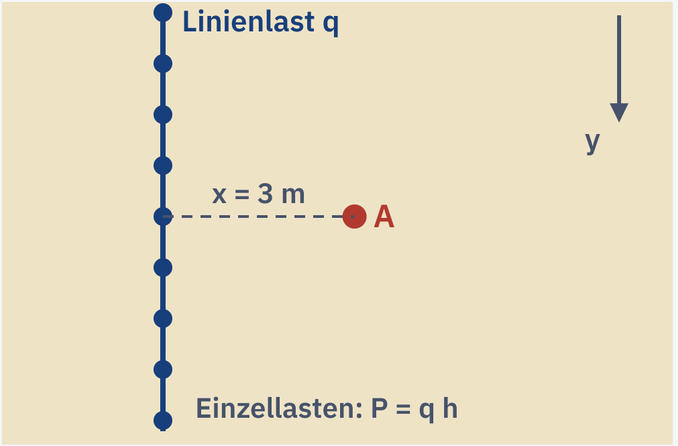
BEISPIEL

Gegeben

Last	$q = 10$ **kN/m; entlang der Linie in Abständen von** h **angeordnete Einzellasten** $P = q\,h$ **(**$h = 8; 4; 2; 1$ **m)**
Punkt A	$x = 3$ **m,** $z = 4$ **m (horizontaler Abstand der Geraden); Boussinesq:** $\Delta\sigma_z = 3Pz^3/(2\pi L^5)$

GESUCHT

Summe der Boussinesq-Spannungen der Einzellasten (Term für Term für h = 2 m); Annäherung an den Wert der Linienlast mit abnehmendem h.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 $P = q\,h = 10(2) = 20$ kN; für jede Last gilt $L_k^2 = x^2 + y_k^2 + z^2 = 9 + y_k^2 + 16$

k	y_k (m)	$L_k^2 = 25 + y_k^2$	L_k (m)	$\Delta\sigma_{z,k}$ (kPa)	Anzahl der Lasten
0	0	25	5.000	0.19557	1
1	2	29	5.385	0.13494	2 (±k)
2	4	41	6.403	0.05678	2 (±k)
3	6	61	7.810	0.02103	2 (±k)
4	8	89	9.434	0.00818	2 (±k)
5	10	125	11.180	0.00350	2 (±k)

Beispielterme: $k = 0$: $\Delta\sigma_{z,0} = 3(20)(4^3)/[2\pi(5)^5] = 0.19557$ kPa; die Summe für $|k| \le 5$ beträgt 0.64443 kPa, der Rest für $|k| \ge 6$ beträgt 0.00748 kPa.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

h (m)	P = q h (kN)	Summe der Einzellasten $\Delta\sigma_z$ (kPa)	Differenz (%)
8	80	0.852175	30.72
4	40	0.660644	1.34
2	20	0.651907	0.0013
1	10	0.651899	< 0.0001
Linienlast		**0.651899**	0

Für eine Linienlast gilt $\Delta\sigma_z = 2q\,z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = 2(10)(4^3)/[\pi(25)^2]$ = **0.651899 kPa**. Werden die Einzellasten mit engem Abstand $h \le z/2$ angesetzt, nähert sich die Summe diesem Wert stark an (h = 2 m: 0.651907 kPa); bei einem weiten Abstand wie h = 8 m ist die Abweichung dagegen groß. Dies zeigt, dass die Formel der Linienlast das Integral einer Reihe von Einzellasten ist.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

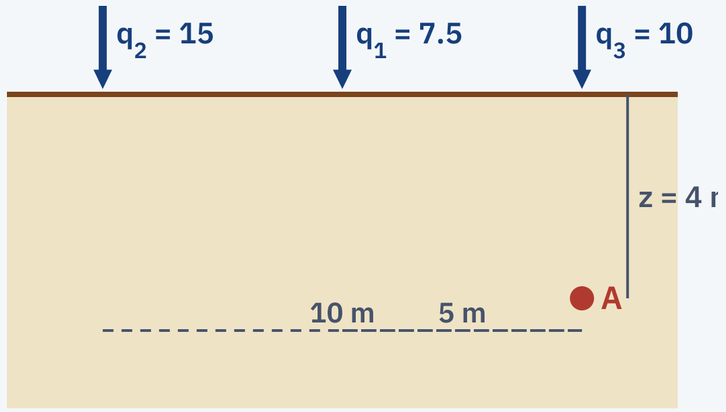
BEISPIEL

Gegeben

Lasten	$q_1 = 7.5$ **kN/m** ($x_L = 0$); $q_2 = 15$ **kN/m** ($x_L = -5$ **m**); $q_3 = 10$ **kN/m** ($x_L = 5$ **m**)
Punkte	**A:** $x_A = 5$ **m**, $z = 4$ **m (direkt unter Last 3); bei** $z = 4$ **m**, $x = -7.5$ **…** 7.5 **m**

GESUCHT

Der Beitrag jeder Last am Punkt A und die Gesamtspannung $\Delta\sigma_z$; die Gesamtspannung entlang x in der Tiefe z = 4 m.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Last 3 (x = 5 – 5 = 0): A liegt direkt unter der Last

$$\Delta\sigma_{z(3)} = \frac{2q_3}{\pi z} = \frac{2(10)}{\pi(4)} = \mathbf{1.59155}\ \mathrm{kPa}$$

2 Last 1 (x = 5 m) und Last 2 (x = 10 m): Werte aus Beispiel 1

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542\ \mathrm{kPa}$$

3 Superposition

$$\Delta\sigma_z = 1.59155 + 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{1.81875}\ \mathrm{kPa}$$

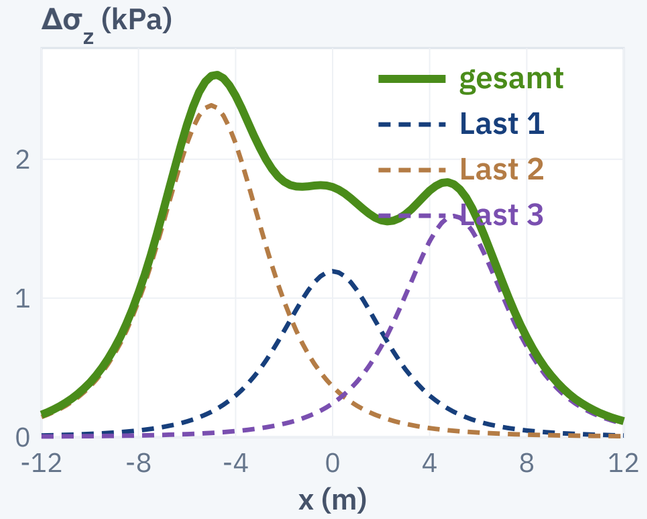
Die Last 3 liefert **87.5 Prozent** der Summe: Unter einer Linienlast dominiert die eigene Spannung, entfernte Lasten tragen wenig bei. Die dritte Last addiert 1.592 kPa zum Wert 0.2272 kPa von Beispiel 1.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

x (m)	Last 1	Last 2	Last 3	Gesamt $\Delta\sigma_z$ (kPa)
−7.5	0.0585	1.2345	0.0137	1.3068
−5.0	0.1818	2.3873	0.0303	2.5994
−2.5	0.6173	1.2345	0.0781	1.9298
0.0	1.1937	0.3636	0.2424	1.7996
2.5	0.6173	0.1171	0.8230	1.5573
5.0	0.1818	0.0454	1.5915	**1.8188**
7.5	0.0585	0.0206	0.8230	0.9021

Die Gesamtkurve ergibt nahe jeder Last eine Spitze (x ≈ −4.75; −0.50; 4.75 m); die Spitzen verschieben sich durch die Ausläufer der benachbarten Lasten etwas. Die höchste Spitze liegt um die maßgebende Last (Last 2, 15 kN/m): bei x = −5 m **2.5994 kPa**; im Punkt A (x = 5 m) 1.8188 kPa.



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Lasten	**Linienlast $q = 50$ kN/m; Einzellast $P = 50$ kN**
Punkte	**unter der Last ($x = 0, r = 0$); $z = 1; 2; 3; 5; 10$ m**

GESUCHT

$\Delta\sigma_z$ unter der Achse und die Abnahmerate mit der Tiefe für die beiden Lastarten.

Lösung

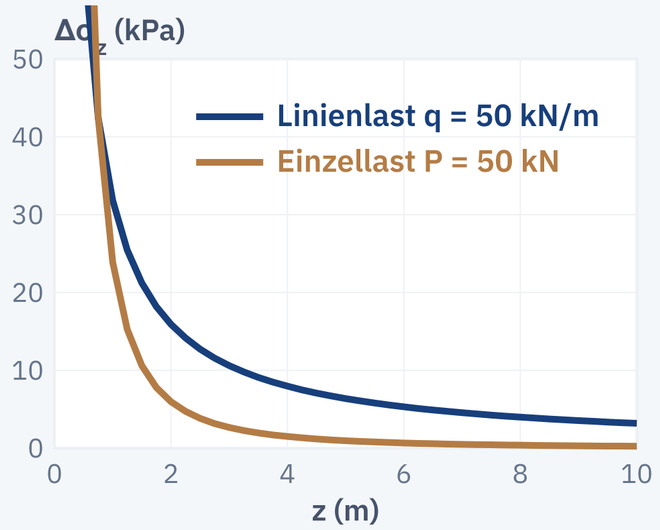
LÖSUNG

1 z = 5 m

$$\text{linienförmig: } \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(50)}{\pi(5)} = \mathbf{6.366}\ \text{kPa}$$

$$\text{Einzeln: } \Delta\sigma_z = \frac{3}{2\pi}\frac{P}{z^2} = 0.4775\,\frac{50}{5^2} = \mathbf{0.955}\ \text{kPa}$$

z (m)	Linienlast: 2q/(πz) (kPa)	Einzellast: 0.4775 P/z² (kPa)	Verhältnis
1	31.831	23.873	1.3
2	15.915	5.968	2.7
3	10.610	2.653	4.0
5	6.366	0.955	6.7
10	3.183	0.239	13.3



Bei z: 1 → 10 m nimmt die Spannung aus der Linienlast um das **10-Fache** ab (31.83 → 3.18 kPa), die Spannung aus der Einzellast um das **100-Fache** (23.87 → 0.24 kPa).

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Zusammenfassung

Die wichtigsten Punkte

Linienlast (ebener Verzerrungszustand): $\Delta\sigma_z = 2q\, z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = (q/z) \cdot 2/\{\pi[(x/z)^2 + 1]^2\}$; unter der Last $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$

Reihe von Einzellasten: Die Boussinesq-Spannungen der Einzellasten $dP = q\, dy$ werden summiert; Einzellasten im Abstand h = 2 m ergeben 0.65191 kPa, die Linienlast 0.65190 kPa

Beispiel (q_1 = 7.5 kN/m, q_2 = 15 kN/m; A: x = 5, z = 4 m): $\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178$; $\Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542$; **$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa**

Dimensionslose Kurve: für x/z = 1 beträgt der Wert ein Viertel des Wertes unter der Last; **Superposition**: die Spannung jeder Last wird mit ihrem eigenen horizontalen Abstand ermittelt und summiert (bei drei Lasten 1.8188 kPa in A)

Tiefe: Unter einer Last nimmt die Spannung mit 1/z ab (bei einer Einzellast mit $1/z^2$); an einem Punkt neben der Last wächst die Spannung bis zu einer Tiefe von $z = \sqrt{3} \cdot x$

Literatur

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels… Gauthier-Villars, Paris.

HINWEIS

Alle Zahlenbeispiele wurden mit der Berechnungsengine des Moduls selbst erzeugt; das Modul liefert dieselben Werte. Das Modul öffnet mit zwei Linienlasten (7.5 und 15 kN/m) und dem Punkt A (x = 5 m, z = 4 m).

GeoTerva

Geotechnische Berechnungen online

Von der Theorie zur Praxis

Geben Sie Ihre eigenen Linienlasten, deren Positionen und Ihren Punkt in GeoTerva ein; das Modul liefert den Beitrag jeder Last, den Gesamtwert $\Delta\sigma_z$, das Tiefenprofil, die Isospannungslinien, die schrittweise Lösung und den Bericht zusammen.

Modul öffnen → **Theorieseite →**

Auf dem Smartphone öffnen
Die Beispielmodule erfordern keine Registrierung.

Falls Sie sie in Ihren Vorlesungen verwenden möchten: info@geoterva.com