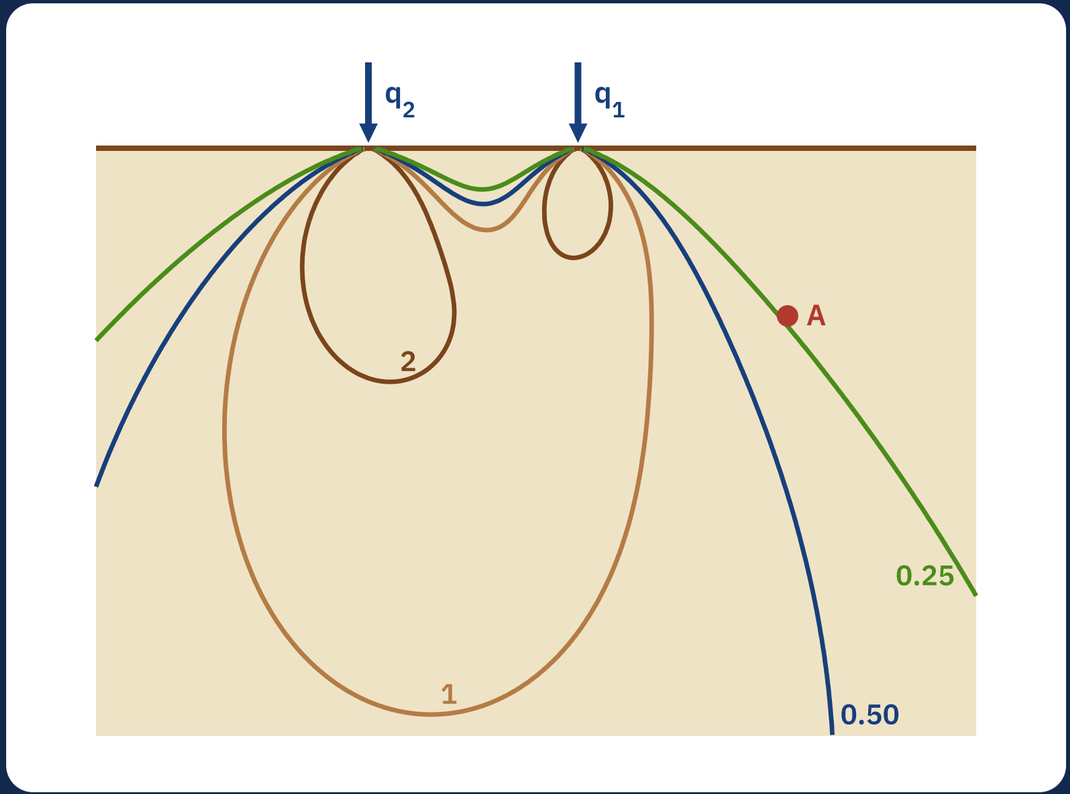


شرائح محاضرات الجيوتكنيك · توزيع الإجهادات في التربة

الإجهاد تحت حمل خطي رأسي

المحاضرة: الإجهاد الرأسي الناشئ في التربة عن حمل خطي رأسي على السطح؛ وتحل النقطة الابتدائية يدوياً من البداية إلى النهاية، ويعرض توزيع الإجهاد مع العمق وفي الاتجاه الجانبي بجداول.

الانفعال المستوي
المنحنى عديم الأبعاد
التراكب
تتابع الأحمال النقطية
منحنيات تساوي الإجهاد

يستند إلى صفحة النظرية في GeoTerva · geoterva.com

ماذا سنتعلم في هذه المحاضرة؟

الحمل الخطي في ظروف **الانفعال المستوي**: يعتمد الإجهاد على المسافة الأفقية **x** عن الخط وعلى العمق **z** فقط

العلاقة $\Delta\sigma_z = 2qz^3/[\pi(x^2 + z^2)^2]$ بجمع الحمل الخطي على هيئة **صف من الأحمال النقطية**

الفرق عن الحمل النقطي: تحت محور الحمل يتناقص الإجهاد بنسبة **z/1** فقط، $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$

الصيغة عديمة الأبعاد: منحنى واحد $\Delta\sigma_z/(q/z)$ وجدول x/z؛ و**التراكب** لعدة أحمال متوازية

المثال الابتدائي للوحدة (حملان خطيان) **من البداية إلى النهاية يدوياً**؛ والتغير مع العمق والتغير الجانبي في الجداول

تسلسل المحاضرة

يعالج كل موضوع في **ثلاث خطوات**:

1 · **النظرية**: المعادلة ومبرراتها

2 · **المسألة**: المعطيات والمطلوب

3 · **الحل**: خطوة بخطوة، بالأرقام

مثال: $q_1 = 7.5$ kN/m $(x = 0)$ و $q_2 = 15$ kN/m $(x = -5$ m$)$؛ النقطة A: $x = 5$ m، $z = 4$ m.

الحمل لكل وحدة طول على امتداد خط لانهائي

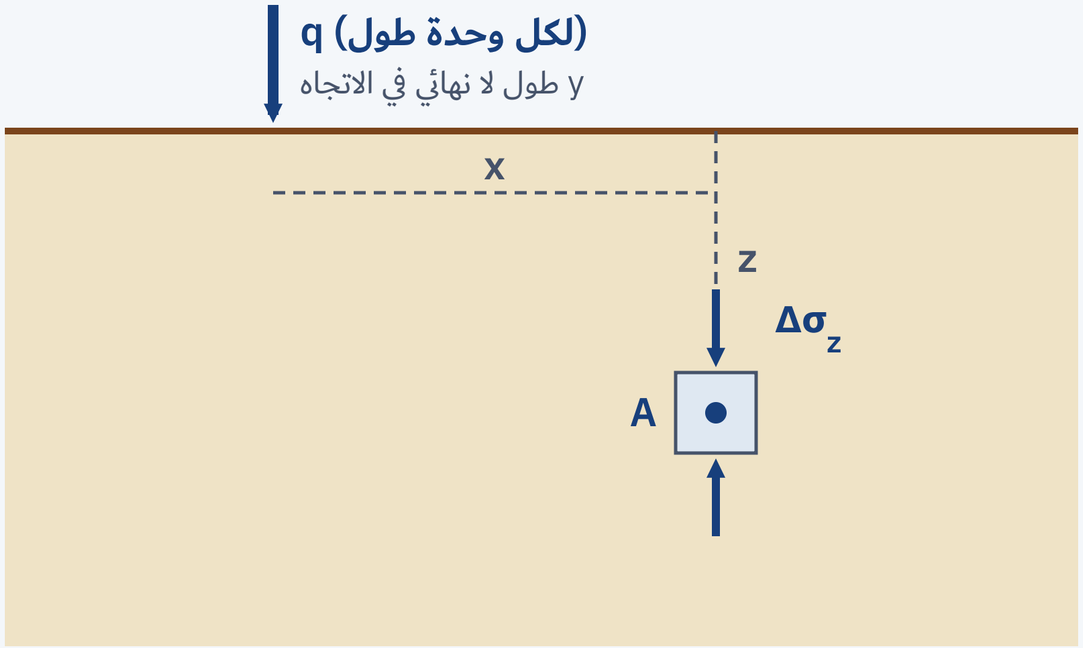
النظرية

الحمل الخطي هو حمل شدته q لكل وحدة طول، يؤثر على السطح بامتداد خط مستقيم لا نهائي الطول: جدار طويل أو سكة حديدية أو شريط ضيق إلى حد يمكن معه إهمال عرضه.

لأن كل مقطع عمودي على الخط يحمل بالطريقة نفسها فإن الإجهادات في حالة **انفعال مستو** وتعتمد على المسافة الأفقية x والعمق z فقط.

الحمل مرن ورأسي وغير محدود الطول في الاتجاه y؛ ويفترض أن التربة وسط نصف لانهائي متجانس ومتماثل الخواص وخطي المرونة.

$\Delta\sigma_z$ هي الزيادة الناتجة عن الحمل؛ ولم يدرج إجهاد الغطاء الترابي للتربة الواقعة فوق النقطة.



من صف أحمال نقطية إلى حمل خطي

النظرية

يمكن اعتبار الحمل الخطي صفاً من الأحمال النقطية المفردة dP = q dy مصفوفة على امتداد y.

يعطي كل حمل مركز إجهاد Boussinesq مع $r^2 = x^2 + y^2$؛ وعند جمع هذه المساهمات على امتداد الخط المستقيم تصبح القيمة المغلقة للتكامل $3/4](x^2 + z^2)^2$].

$$\Delta\sigma_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3q\,z^3}{2\pi\,(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{4}{3\,(x^2+z^2)^2} \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \frac{2q\,z^3}{\pi\,(x^2+z^2)^2}$$

على خلاف الحمل النقطي يتناقص الإجهاد مع العمق بنسبة z/1 فقط: على المحور $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$.

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ و x/z

النظرية

عند القسمة على z وكتابة x/z تأخذ المعادلة صيغة عديمة الأبعاد تعطي منحنى واحداً لكل حمل خطي.

وبذلك يستخدم منحنى واحد **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** لكل قيم x/z.

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

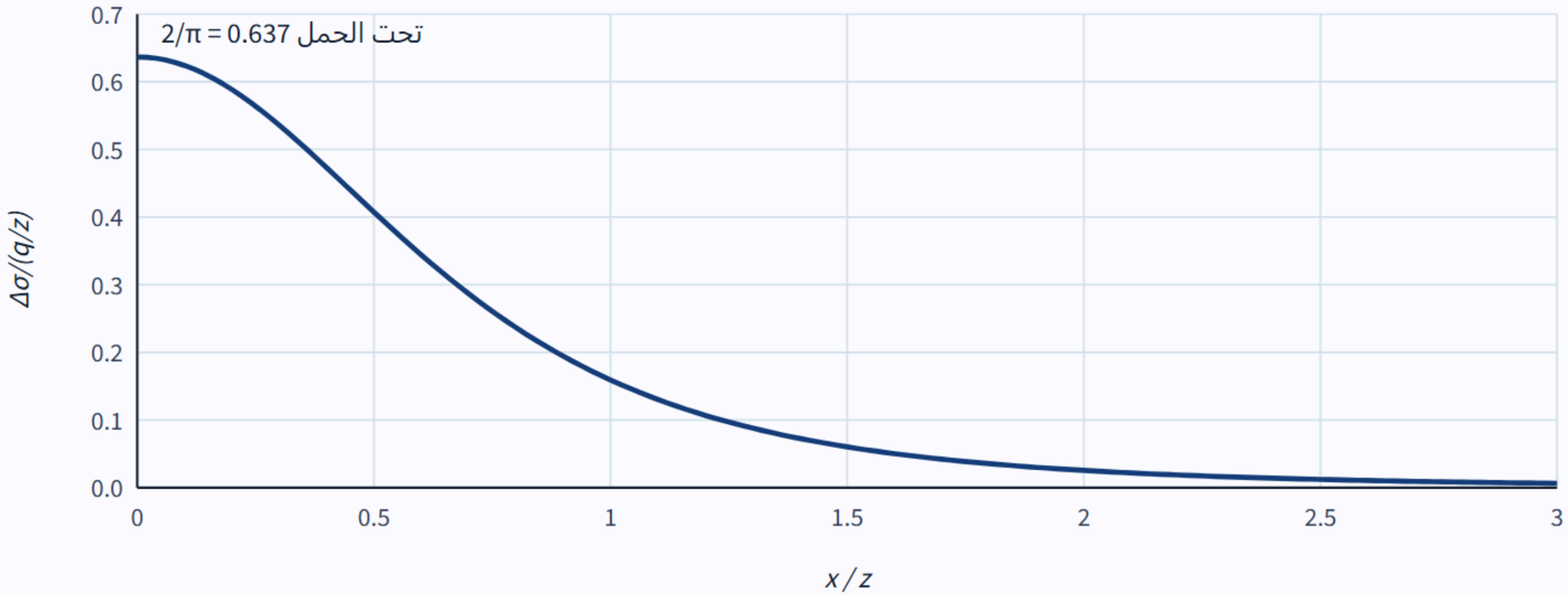
$$x = 0: \qquad \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = 0.637\,\frac{q}{z}$$

قيم $\Delta\sigma_z/(q/z)$ (الوحدة)

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.0	0.637	1.0	0.159
0.1	0.624	1.2	0.107
0.2	0.589	1.4	0.073
0.3	0.536	1.6	0.050
0.4	0.473	1.8	0.035
0.5	0.407	2.0	0.025
0.6	0.344	2.4	0.014
0.7	0.287	2.8	0.008
0.8	0.237	3.0	0.006
0.9	0.194	3.5	0.004

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ مقابل x/z

النظرية



$\Delta\sigma z/(q/z)$ مقابل x/z، من المعادلة. عند x/z = 1 تكون قيمته ربع قيمته تحت الحمل؛ ووراء x/z = 3 يصبح أقل من 0.01.

التراكب

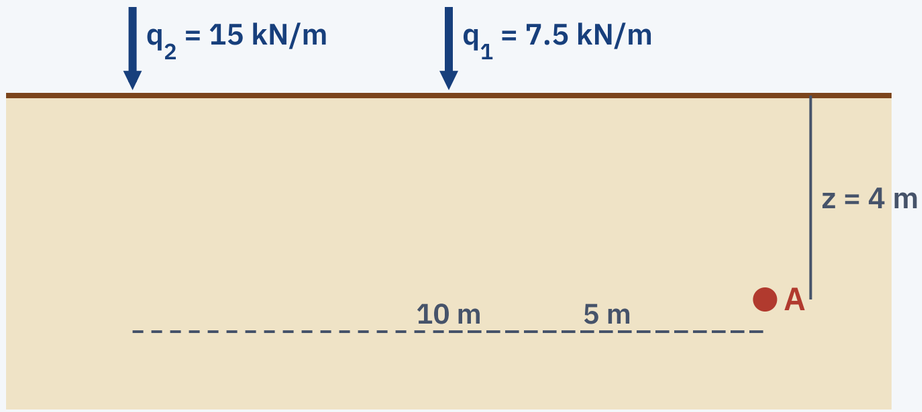
النظرية

لما كانت التربة مرنة، تجمع إجهادات عدة أحمال خطية بالتراكب.

الإجهاد عند النقطة A هو مجموع الإجهادات التي يولدها كل حمل بمفرده، بحسب بعده الأفقي عن النقطة A.

تقبل الوحدة ثمانية أحمال خطية متوازية كحد أقصى؛ وتُدخل الأحمال واحداً تلو الآخر بشدتها ومواضعها بالضغط على **إضافة حمل خطي**، ولا يجوز أن يقع حملان في الموضع نفسه.

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{2\,q_k\,z^3}{\pi\,(x_k^2 + z^2)^2}$$



المسألة

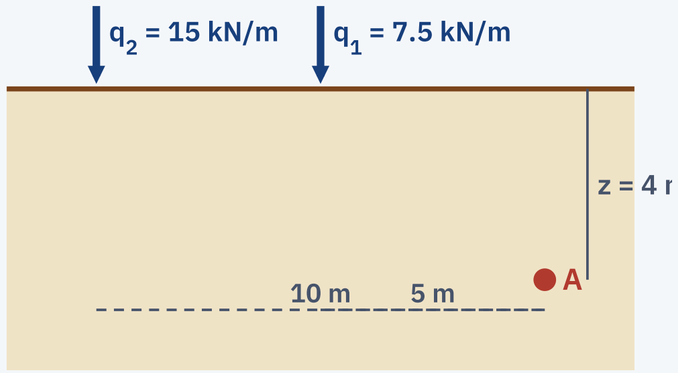
مثال

المعطيات

الأحمال	$q_1 = 7.5$ kN/m عند $(x_L = 0)$؛ $q_2 = 15$ kN/m عند $(x_L = -5$ m$)$
النقطة A	$x_A = 5$ m، $z = 4$ m (الحمل 1 على مسافة 5 m، والحمل 2 على مسافة 10 m)
التربة	وسط نصف لانهائي متجانس ومرن؛ انفعال مستوٍ

المطلوب

قيمة $\Delta\sigma_z$ الناتجة عن كل حمل عند النقطة A، و$\Delta\sigma_z$ الكلية بالتراكب.



الحل

الحل

1 الحمل 1: $x = x_A - x_L = 5 - 0 = 5$ m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2q_1 z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(7.5)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{960}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

2 الحمل 2: $x = 5 - (-5) = 10$ m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}920}{\pi\,(13{,}456)} = \mathbf{0.04542}\ \text{kPa}$$

3 مبدأ التراكب (التربة مرنة: تجمع الإجهادات)

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{0.22720}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.22720 kPa. على الرغم من أن الحمل 2 أكبر بمقدار الضعف، فإنه أبعد عن A بمقدار الضعف، ولذلك فإن إجهاده يساوي نحو خمس المجموع (النسبة 0.20). التحقق للحمل 1: $x/z = 1.25 \Rightarrow 2/(\pi[1.25^2+1]^2) = 0.09695$؛ $q_1/z = 1.875$؛ $1.875 \cdot 0.09695 = 0.18178$. وتعطي الوحدة القيمة نفسها.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

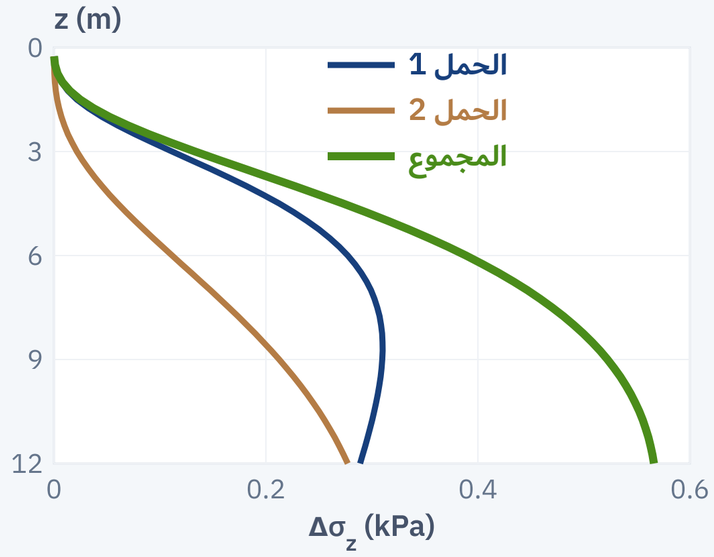
مثال

المعطيات

الأحمال	**الحملان في المثال 1:** $q_1 = 7.5$ **kN/m** عند $x_L = 0$، $q_2 = 15$ **kN/m** عند $x_L = -5$ **m**
النقاط	$x_A = 5$ **m**؛ $z = 1.2$؛ 2.4؛ ...؛ 12 **m** (**صفوف الملف الشخصي للوحدة**)

المطلوب

لكل عمق: $\Delta\sigma_{z(1)}$ و $\Delta\sigma_{z(2)}$ والمجموع $\Delta\sigma_z$؛ والحل المفصل عند $z = 8$ m؛ وعمق أكبر إجهاد.



الحل (1/2)

الحل

1 الحمل 1 (x = 5 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \frac{2(7.5)(8^3)}{\pi(5^2+8^2)^2} = \frac{7{,}680}{\pi\,(7{,}921)} = \mathbf{0.30863}\ \text{kPa}$$

2 الحمل 2 (x = 10 m): z = 8 m

$$\Delta\sigma_{z(2)} = \frac{2(15)(8^3)}{\pi(10^2+8^2)^2} = \frac{15{,}360}{\pi\,(26{,}896)} = \mathbf{0.18178}\ \text{kPa}$$

3 المجموع

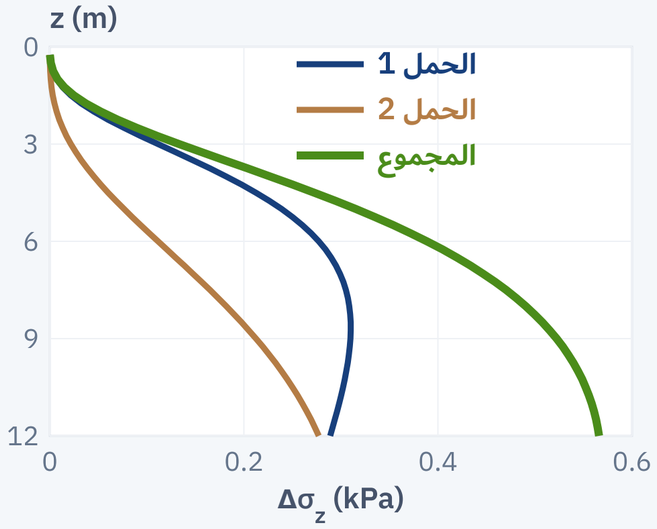
$$\Delta\sigma_z = 0.30863 + 0.18178 = \mathbf{0.49041}\ \text{kPa}$$

عند z = 8 m تكون $\Delta\sigma_z$ = 0.49041 kPa؛ وهي أكبر بكثير من القيمة عند z = 4 m (0.22720 kPa): فالنقطة A بجانب الأحمال، ويواصل الإجهاد الازدياد مع العمق (الجدول في الصفحة التالية).

الحل (2/2)

الحل

$\Delta\sigma_z$ الكلي (kPa)	$\Delta\sigma_{z(2)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(1)}$ (kPa)	z (m)
0.01341	0.00160	0.01180	1.2
0.08156	0.01180	0.06976	2.4
0.18951	0.03492	0.15460	3.6
0.29856	0.06976	0.22880	4.8
0.38868	0.11152	0.27716	6.0
0.45643	0.15460	0.30183	7.2
0.50446	0.19456	0.30990	8.4
0.53655	0.22880	0.30775	9.6
0.55612	0.25631	0.29981	10.8
0.56604	0.27716	0.28888	12.0



في حالة حمل واحد يبلغ الإجهاد قيمته العظمى عند العمق $z = \sqrt{3}\cdot x$: للحمل 1 عند (0.3101 kPa) 8.66 m. ولا يزال مجموع الحملين في ازدياد عند 12 m؛ وتبلغ القيمة العظمى للمجموع 0.5687 kPa عند عمق 13.1 m.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

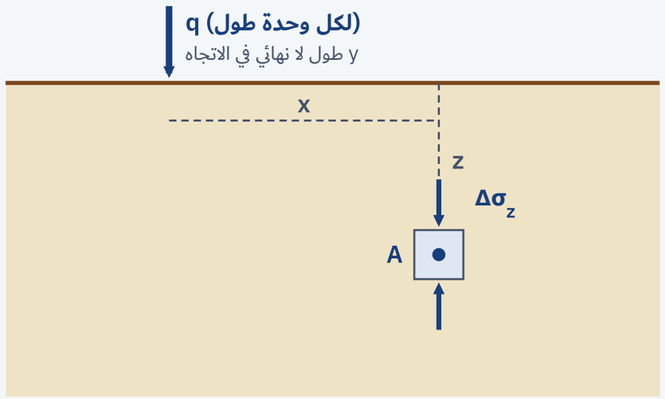
مثال

المعطيات

الحمل	**حمل خطي رأسي**، $q = 20$ **kN/m**
النقاط	$z = 3$ **m**؛ $x = 0$؛ 1.5؛ 3؛ 4.5؛ 6 **m**

المطلوب

لكل نقطة: **x/z** و**$\Delta\sigma_z/(q/z)$** و**$\Delta\sigma_z$**؛ ونسبة القيمة عند النقطة z = x إلى القيمة تحت الحمل.



الحل (1/2)

الحل

1 تحت الحمل (x = 0): x/z = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(20)}{\pi(3)} = \mathbf{4.2441}\ \text{kPa}$$

2 x = 3 m: x/z = 1

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi\left[1^2+1\right]^2} = \frac{2}{4\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915 \cdot \frac{20}{3} = 6.6667 \cdot 0.15915 = \mathbf{1.0610}\ \text{kPa}$$

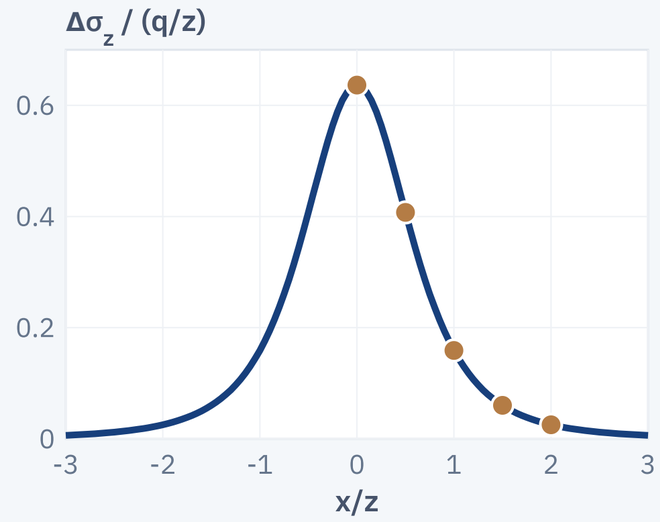
عند النقطة x/z = 1 يكون الإجهاد **ربع** الإجهاد تحت الحمل (1.0610 / 4.2441 = 0.25).

الحل (2/2)

الحل

$\Delta\sigma_z$ (kPa)	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	x (m)
4.2441	0.63662	0.0	0.0
2.7162	0.40744	0.5	1.5
1.0610	0.15915	1.0	3.0
0.4018	0.06027	1.5	4.5
0.1698	0.02546	2.0	6.0

تعتمد النسبة $\Delta\sigma_z/(q/z)$ على x/z فقط: ولذلك يستخدم المنحنى نفسه لكل قيمة من q ولكل عمق z. وعند x/z = 2 يبلغ الإجهاد 0.04 من قيمته تحت الحمل (0.1698 kPa).



تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

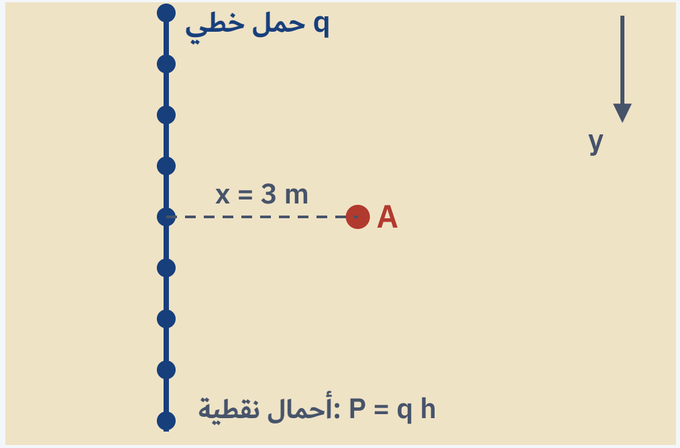
مثال

المعطيات

الحمل	$q = 10$ kN/m؛ أحمال مركزة $P = q\,h$ بتباعد h على امتداد الخط ($h = 8$؛ 4؛ 2؛ 1 m)
النقطة A	$x = 3$ m، $z = 4$ m (المسافة الأفقية للخط)؛ Boussinesq: $\Delta\sigma_z = 3Pz^3/(2\pi L^5)$

المطلوب

مجموع إجهادات Boussinesq للأحمال النقطية (حداً حداً عند h = 2 m)؛ واقتراب المجموع من قيمة الحمل الخطي كلما صغرت h.



الحل (1/2)

الحل

1 $P = q\,h = 10(2) = 20$ kN؛ ولكل حمل $L_k^2 = x^2 + y_k^2 + z^2 = 9 + y_k^2 + 16$

k	y_k (m)	$L_k^2 = 25 + y_k^2$	L_k (m)	$\Delta\sigma_{z,k}$ (kPa)	كم عدد الأحمال
0	0	25	5.000	0.19557	1
1	2	29	5.385	0.13494	2 (k±)
2	4	41	6.403	0.05678	2 (k±)
3	6	61	7.810	0.02103	2 (k±)
4	8	89	9.434	0.00818	2 (k±)
5	10	125	11.180	0.00350	2 (k±)

حدود المثال: $k = 0$: $\Delta\sigma_{z,0} = 3(20)(4^3)/[2\pi(5)^5] = 0.19557$ kPa؛ مجموع الحدود عند $|k| \le 5$ يساوي 0.64443 kPa، والباقي عند $|k| \ge 6$ يساوي 0.00748 kPa.

الحل (2/2)

الحل

h (m)	P = q h (kN)	مجموع الأحمال المفردة $\Delta\sigma_z$ (kPa)	الفرق (%)
8	80	0.852175	30.72
4	40	0.660644	1.34
2	20	0.651907	0.0013
1	10	0.651899	0.0001 >
حمل خطي		**0.651899**	0

بالنسبة إلى الحمل الخطي $\Delta\sigma_z = 2q\,z^3/[\pi(x^2+z^2)^2] = 2(10)(4^3)/[\pi(25)^2]$ = **0.651899 kPa**. وعندما تؤخذ الأحمال النقطية متقاربة، مثل $h \le z/2$، يقترب المجموع كثيراً من هذه القيمة (h = 2 m: 0.651907 kPa)؛ أما في التباعد الكبير مثل h = 8 m فيكون الفرق كبيراً. وهذا يبين أن صيغة الحمل الخطي هي تكامل صف من الأحمال النقطية.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

مثال

المعطيات

الأحمال

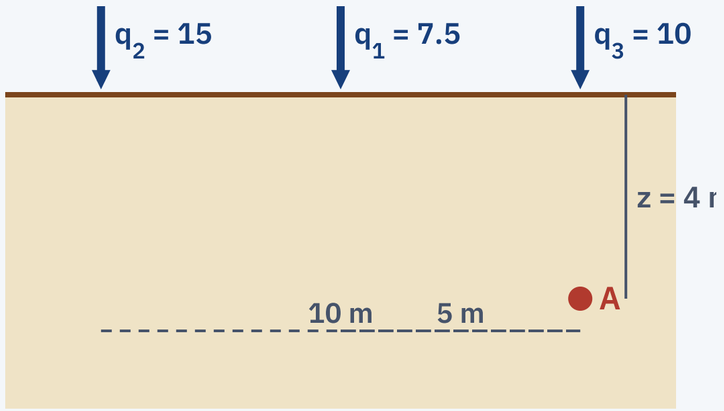
$q_1 = 7.5$ kN/m عند $x_L = 0$؛ $q_2 = 15$ kN/m عند $x_L = -5$ m؛ $q_3 = 10$ kN/m عند $x_L = 5$ m.

النقاط

A: $x_A = 5$ m، $z = 4$ m (أسفل الحمل 3 تماماً)؛ وعند $z = 4$ m: $x = -7.5$ m ... 7.5 m

المطلوب

مساهمة كل حمل عند النقطة A والمجموع $\Delta\sigma_z$؛ الإجهاد الكلي على امتداد x عند العمق $z = 4$ m.



الحل (1/2)

الحل

1 الحمل 3 (x = 5 − 5 = 0): النقطة A تقع أسفل الحمل مباشرة

$$\Delta\sigma_{z(3)} = \frac{2q_3}{\pi z} = \frac{2(10)}{\pi(4)} = \mathbf{1.59155}\ \text{kPa}$$

2 الحمل 1 (x = 5 m) والحمل 2 (x = 10 m): القيم من المثال 1

$$\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542\ \text{kPa}$$

3 التراكب

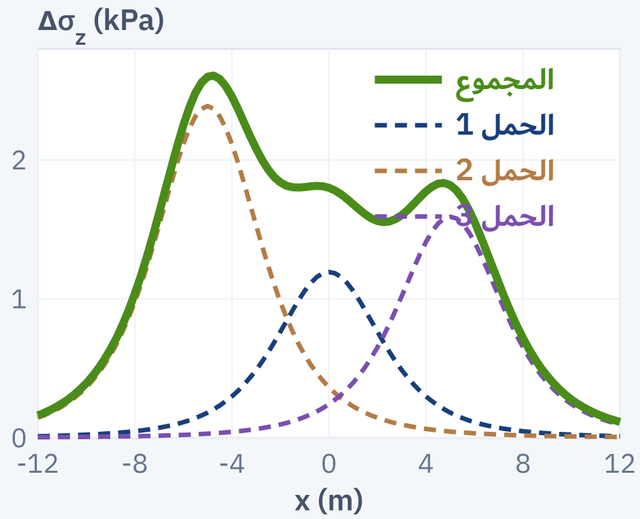
$$\Delta\sigma_z = 1.59155 + 0.18178 + 0.04542 = \mathbf{1.81875}\ \text{kPa}$$

يسهم الحمل 3 بنسبة **87.5 بالمئة** من المجموع: ففي أسفل الحمل الخطي يغلب إجهاده الذاتي، بينما تسهم الأحمال البعيدة بمقدار صغير. ويضيف الحمل الثالث 1.592 kPa إلى قيمة المثال 1 البالغة 0.2272 kPa.

الحل (2/2)

الحل

x (m)	الحمل 1	الحمل 2	الحمل 3	$\Delta\sigma_z$ الكلي (kPa)
7.5−	0.0585	1.2345	0.0137	1.3068
5.0−	0.1818	2.3873	0.0303	2.5994
2.5−	0.6173	1.2345	0.0781	1.9298
0.0	1.1937	0.3636	0.2424	1.7996
2.5	0.6173	0.1171	0.8230	1.5573
5.0	0.1818	0.0454	1.5915	**1.8188**
7.5	0.0585	0.0206	0.8230	0.9021



يعطي المنحنى الكلي ذروة قرب كل حمل ($x \approx -4.75$ و -0.50 و 4.75 m)؛ وتنزاح الذروات قليلا بتأثير أذيال الأحمال المجاورة. وتقع أعلى ذروة حول أشد الأحمال (الحمل 2، 15 kN/m): **2.5994 kPa** عند $x = -5$ m؛ وعند النقطة A ($x = 5$ m) تبلغ 1.8188 kPa.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

مثال

المعطيات

الأحمال	حمل خطي $q = 50$ kN/m؛ حمل نقطي $P = 50$ kN
النقاط	تحت الحمل $(x = 0، r = 0)$؛ $z = 1$؛ 2؛ 3؛ 5؛ 10 m

المطلوب

$\Delta\sigma_z$ أسفل المحور ومعدل تناقصه مع العمق لنوعي الحمل.

الحل

الحل

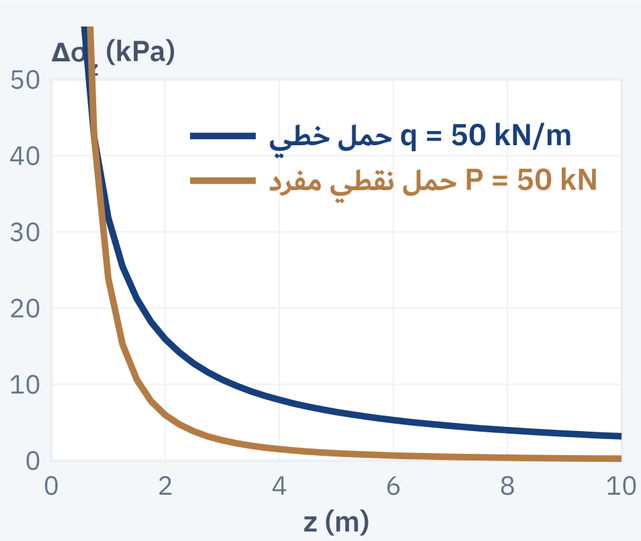
1 z = 5 m

$$\text{خطي: } \Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi z} = \frac{2(50)}{\pi(5)} = \mathbf{6.366}\ \text{kPa}$$

$$\text{مفرد: } \Delta\sigma_z = \frac{3}{2\pi}\frac{P}{z^2} = 0.4775\,\frac{50}{5^2} = \mathbf{0.955}\ \text{kPa}$$

z (m)	خطي: 2q/(πz) (kPa)	حمل نقطي: 0.4775 P/z² (kPa)	النسبة
1	31.831	23.873	1.3
2	15.915	5.968	2.7
3	10.610	2.653	4.0
5	6.366	0.955	6.7
10	3.183	0.239	13.3

عندما يتغير z: 1 → 10 m يتناقص إجهاد الحمل الخطي **10 أضعاف** (31.83 → 3.18 kPa) وإجهاد الحمل النقطي **100 ضعف** (23.87 → 0.24 kPa).



تحقق من الحل في GeoTerva ↗

النقاط الرئيسية

الحمل الخطي (انفعال مستو): $\Delta\sigma_z = 2q/(\pi z) = 0.637\ q/z$؛ وتحت الحمل $\Delta\sigma_z = 2q\ z^3/[\pi(x^2 + z^2)^2] = (q/z)\cdot 2/\{\pi[(x/z)^2 + 1]^2\}$

صف من الأحمال النقطية: تجمع إجهادات Boussinesq الناتجة عن الأحمال النقطية $dP = q\ dy$؛ وتعطي الأحمال النقطية المتباعدة بمسافة $h = 2$ m القيمة 0.65191 kPa، بينما يعطي الحمل الخطي 0.65190 kPa

مثال ($q_1 = 7.5$ kN/m، $q_2 = 15$ kN/m؛ A: $x = 5$، $z = 4$ m): $\Delta\sigma_{z(1)} = 0.18178$؛ $\Delta\sigma_{z(2)} = 0.04542$؛ **$\Delta\sigma_z = 0.22720$ kPa**

المنحنى عديم الأبعاد: عند $x/z = 1$ تساوي القيمة ربع قيمتها تحت الحمل؛ **التراكب:** يحسب إجهاد كل حمل بمسافته الأفقية الخاصة به ثم تجمع الإجهادات (1.8188 kPa عند A في حالة ثلاثة أحمال)

العمق: يتناقص الإجهاد تحت الحمل وفق $z/1$ (ووفق $z^2/1$ في الحمل النقطي)؛ وعند نقطة بجانب الحمل يزداد الإجهاد حتى العمق $z = \sqrt{3}\cdot x$

المراجع

.Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning

.Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels… Gauthier-Villars, Paris

ملاحظة

جميع الأمثلة العددية مولدة بمحرك الحساب الخاص بالوحدة؛ وتعطي الوحدة القيم نفسها. المثال الابتدائي في الوحدة: حملان خطيان (7.5 و 15 kN/m) والنقطة A (x = 5 m، z = 4 m).

حسابات الجيوتكنيك عبر الإنترنت

من النظرية إلى التطبيق

أدخل في GeoTerva الأحمال الخطية الخاصة بك ومواضعها ونقطة الحساب؛ وتعطي الوحدة مساهمة كل حمل وقيمة $\Delta\sigma_z$ الكلية ومخطط التغير مع العمق ومنحنيات تساوي الإجهاد والحل خطوة بخطوة والتقرير معاً.

افتح الوحدة ←

صفحة النظرية ←

افتح على الهاتف

لا تتطلب الوحدات التجريبية تسجيلاً.

إذا رغبت في استخدامها في محاضراتك: info@geoterva.com