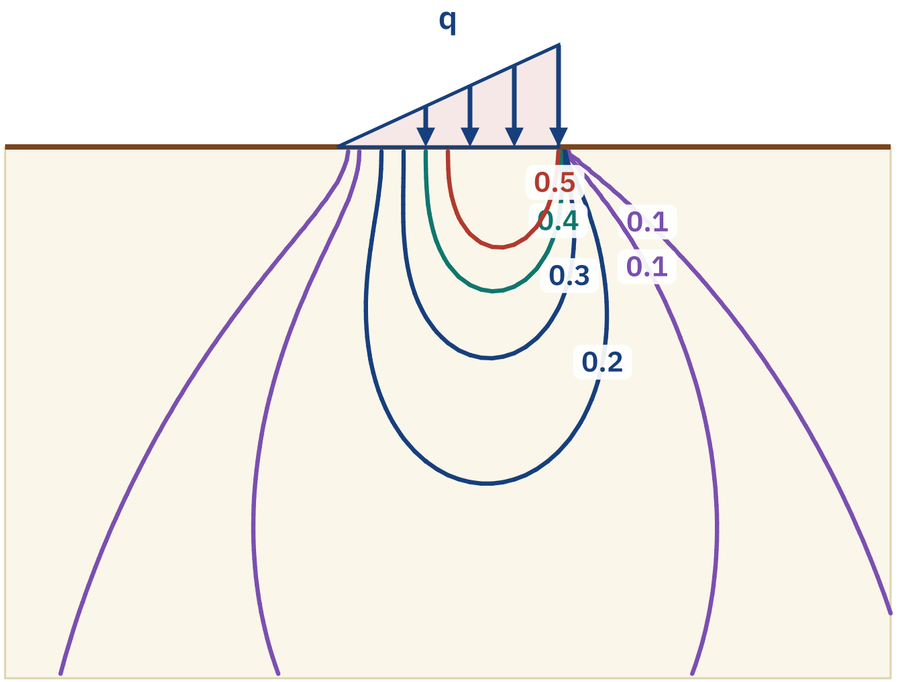
岩土工程讲义 · 土体中的应力

三角形条形荷载下的应力

讲义：沿一侧边缘由零增至q的三角形条形荷载；单点手算、剖面、对称三角形和路堤。

线荷载的积分　角度形式　顶点平移

填方：均布荷载与三角形荷载　可手算求解



引言

本讲内容

自一侧边缘的零**线性增大**到另一侧边缘q的条形荷载（填土边坡、靠墙土堆、填土坡脚）下方的竖向应力增量：强度为(q/B) r dr的线荷载的积分

角度形式：$\Delta\sigma_z = (q/2\pi)[(2x/B)\alpha - \sin 2\delta]$；α和δ的定义以及δ的**符号**

应力在地表跟随荷载分布，在深处则向外扩散，**峰值**向条形荷载内部偏移；零值边缘位于右侧的**镜像**情形

从头到尾手算某一点；用两个条形荷载构成**对称三角形**；用均布条形荷载+两个三角形荷载构成**路堤**荷载

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：公式及其依据

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

算例：q = 100 kN/m²，B = 2 m，荷载在x = 0处为零，在x = B处为q；A点位于x = −1 m、z = 1.5 m处。

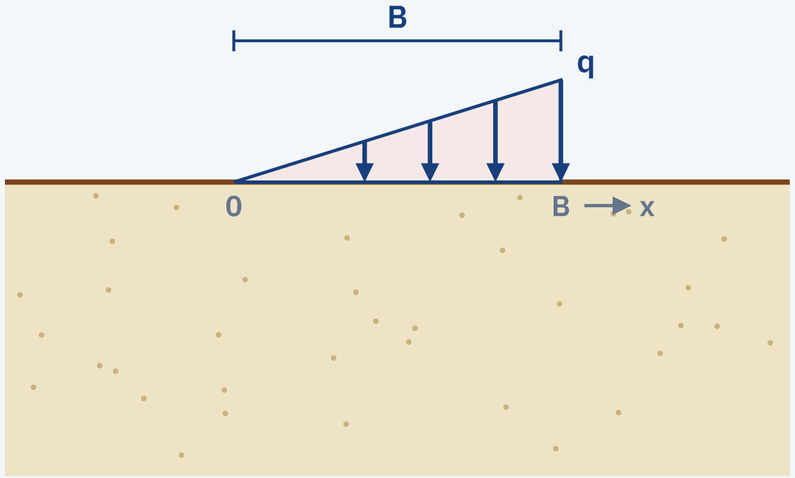
三角形条形荷载：在一侧边缘由零增至q

理论

填土的边坡、靠墙堆放的土堆、填土的坡脚：强度自一侧边缘的零增大到另一侧边缘q值的条形荷载。它与均布条形荷载一起构成**填土荷载**

柔性条形荷载，宽度为B，长度无限；荷载在0 ≤ x ≤ B范围内为**q·x/B**，其他位置为零（平面应变）

土体为均质、各向同性、线弹性的半无限介质；$\Delta\sigma_z$仅为荷载引起的附加应力



剖面：荷载在x = 0处为零，在x = B处为q；每个剖面上应力相同

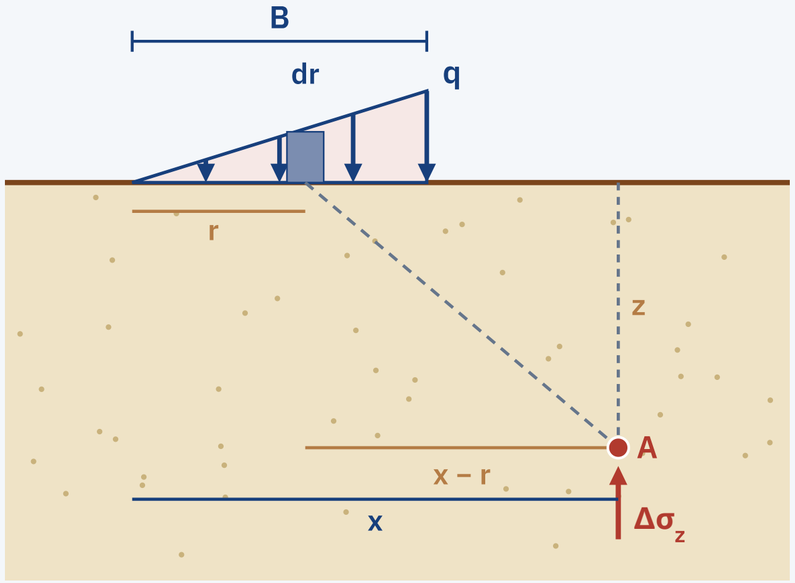
强度为(q/B) r dr的线荷载

理论

位置r处的微元条带每单位长度承受荷载**(q/B) r dr**。将其视为距A点水平距离为x − r的**线荷载**，并沿宽度求和

$$\Delta\sigma_z = \int_0^B \frac{2\,(q/B)\,r\,dr\,z^3}{\pi\,[(x-r)^2+z^2]^2} = \frac{1}{B}\,\frac{2q}{\pi}\int_0^B \frac{z^3\,r\,dr}{[(x-r)^2+z^2]^2}$$

该积分可用**初等函数**表示；按图中角度书写时，结果见下一张幻灯片。数值验证(q = 100, B = 2, x = −1, z = 1.5)：积分的Simpson值为**4.4699 kPa**，闭合解为**4.4699 kPa**



$\Delta\sigma_z = (q/2\pi)[(2x/B)\,\alpha - \sin 2\delta]$

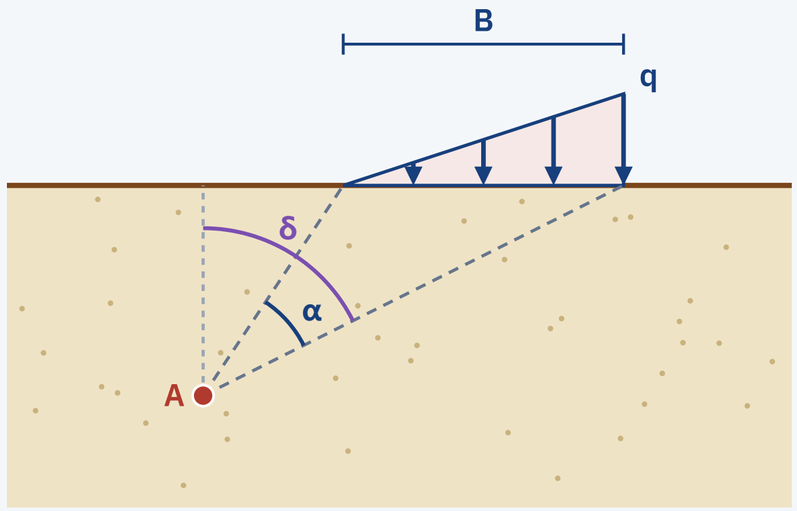
理论

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{2\pi}\left(\frac{2x}{B}\,\alpha - \sin 2\delta\right)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x}{z} - \tan^{-1}\frac{x-B}{z} \qquad \delta = \tan^{-1}\frac{x-B}{z}$$

α以弧度计。**δ**是过A点的竖线与指向**高边**的直线之间的夹角。其正负号很重要：若高边位于A点的+x一侧，则δ为负

利用反正切，符号自动确定；结果对**任意x**均成立：条带的旁侧、下方或外侧。x自**零边**向高边方向度量



A (x = −1, z = 1.5)：α和δ（δ为负）

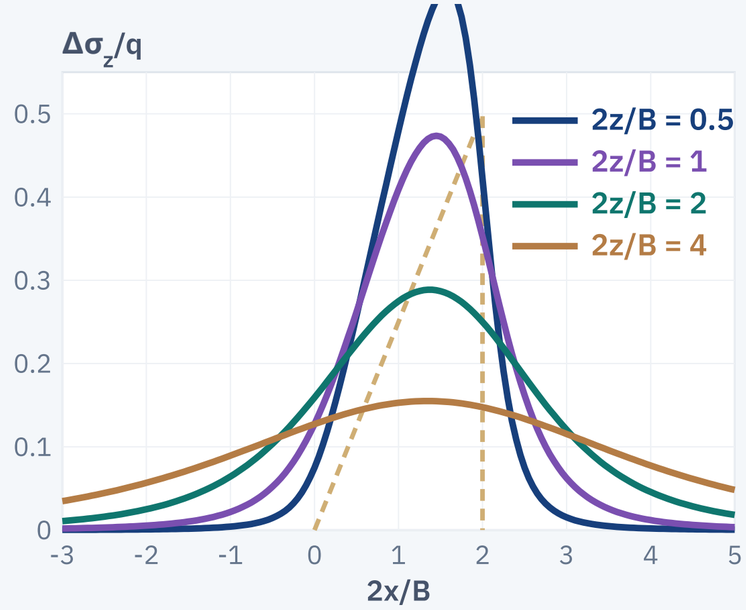
地表处与荷载形状相符，深处则向外扩散

理论

在靠近地表的区域，应力**与荷载本身的分布一致**；随着深度增加，应力**向外扩散**，其最大值**向条带内部移动**

应力峰值：2z/B = 0.5时位于2x/B = 1.58处(0.65 q)；2z/B = 4时位于2x/B = 1.34处(0.15 q)：在很大深度处，峰值位于荷载**重心**（x = 2B/3，即2x/B = 1.33）的下方

在零边缘之外(x < 0)，应力虽小但不为零；该处无荷载，土体仍承受应力



Δσz/q — 2x/B（荷载为黄色虚线三角形）

$\Delta\sigma_z/q$值

理论

2z/B \ 2x/B	-2.0	-1.0	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
0.25	0.0001	0.0006	0.0392	0.2516	0.4969	0.7272	0.4604	0.0024	0.0003
0.50	0.0008	0.0041	0.0749	0.2574	0.4797	0.6448	0.4220	0.0152	0.0019
1.00	0.0053	0.0217	0.1273	0.2620	0.4092	0.4726	0.3524	0.0622	0.0119
1.50	0.0140	0.0447	0.1528	0.2473	0.3341	0.3598	0.2952	0.1010	0.0285
2.00	0.0249	0.0643	0.1592	0.2235	0.2749	0.2870	0.2500	0.1206	0.0457
3.00	0.0448	0.0854	0.1469	0.1774	0.1979	0.2017	0.1872	0.1259	0.0691
4.00	0.0567	0.0894	0.1273	0.1431	0.1529	0.1545	0.1476	0.1154	0.0775
6.00	0.0622	0.0798	0.0955	0.1010	0.1042	0.1047	0.1024	0.0909	0.0740

$\Delta\sigma_z = q \cdot$（表中数值）。2x/B = −1，2z/B = 1.5的单元格为0.0447：模块的初始算例。荷载分布于$0 \le 2x/B \le 2$范围内；荷载强度较大的边缘为2x/B = 2。

若零值边位于右侧；多个条形荷载

理论

条形荷载在其**右边缘**处也可以为零：这是算例中条形荷载的**镜像**；采用同一方程，x自**零值边缘**向较高边缘量测（若右边缘为零，则$x = x_L + B - x_A$）

由于土体为弹性，各条带的应力分别求出后叠加。条带不能重叠（可在边缘处相接）；模块中最多可输入八个条带，每个条带均有各自的q、B、左边缘和方向

将两个三角形荷载按镜像方向并排放置，得到**对称三角形**荷载；均布条形荷载加两个三角形荷载即构成**路堤**荷载

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)}$$

题目

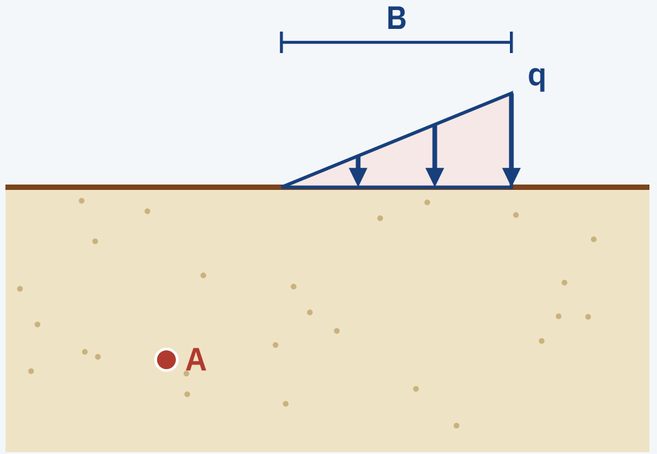
算例

已知条件

条形荷载	**柔性竖向荷载；在$x = 0$处为零，在$x = B$处线性增大至q：$q = 100$ kN/m²，$B = 2$ m**
A点	$x = -1$ m（零值边外侧1 m），$z = 1.5$ m

求

角度α和δ、$\Delta\sigma_z/q$和$\Delta\sigma_z$；与零值边位于右侧的镜像条形荷载的比较。



解答 (1/2)

解答

1 自地表量取的角度（自A点至高值边缘和零值边缘）

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{1.5}{3} = 26.57^\circ \qquad \alpha_2 = \tan^{-1}\frac{1.5}{1} = 56.31^\circ$$

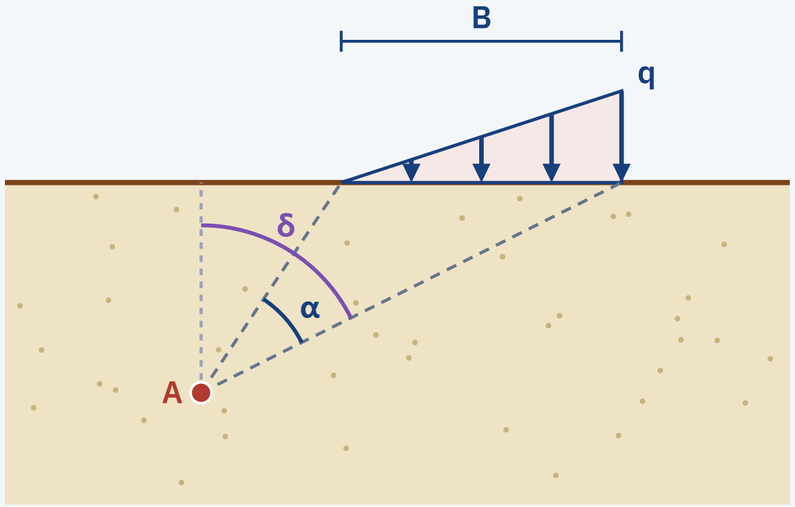
$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 29.74^\circ \qquad \delta = -(90^\circ - \alpha_2 + \alpha) = \mathbf{-63.43}^\circ$$

2 由方程得到相同的角度(x = –1 m, B = 2 m, z = 1.5 m)

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x}{z} - \tan^{-1}\frac{x-B}{z}$$

$$= \tan^{-1}(-0.6667) - \tan^{-1}(-2) = 29.74^\circ = \mathbf{0.5191}\ \text{rad}$$

$$\delta = \tan^{-1}\frac{x-B}{z} = \tan^{-1}\frac{-3}{1.5} = \mathbf{-63.43}^\circ$$



两种途径给出**相同**的角度：α = 29.74° (0.5191 rad)，δ = -63.43°。δ**为负**，因为较高的一边(x = B = 2 m)位于A点的+x一侧。

解答 (2/2)

解答

3 影响值与应力

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2x}{B}\,\alpha - \sin 2\delta\right] = \frac{1}{2\pi}\left[(-1)(0.5191) - \sin(-126.87^\circ)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-0.5191 + 0.8000\right] = \mathbf{0.0447} \qquad \Delta\sigma_z = 0.0447\,(100) = \mathbf{4.47}\ \text{kPa}$$

4 镜像条形荷载：零值边在右侧（左边为0，B = 2 m），点A位于x = 3 m

$$x = x_L + B - x_A = 0 + 2 - 3 = -1\ \text{m} \;\Rightarrow\; \text{同值：}\ \ \Delta\sigma_z = \mathbf{4.47}\ \text{kPa}$$

在零边**外侧1 m**处没有荷载，应力却仍为**4.47 kPa**（为q的4.5%）。在镜像条带中，与A点对应的位置为x = 3 m；模块在两种情况下给出相同的结果。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

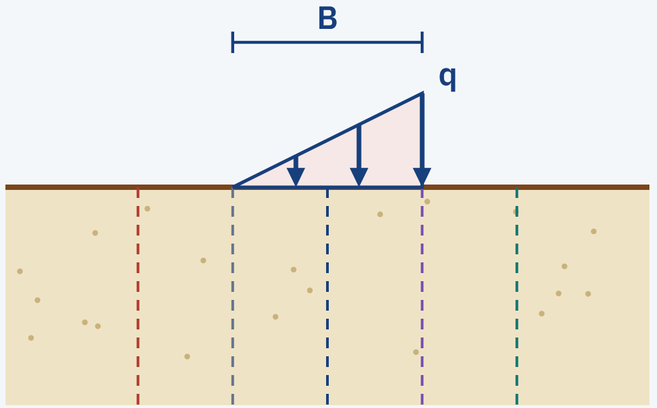
算例

已知条件

条形荷载	**算例1中的条形荷载：$q = 100$ kN/m²，$B = 2$ m（$x = 0$为零边，$x = 2$为高值边）**
手算	**$z = 1.5$ m处，高值边缘下方($x = B$)和零值边缘下方($x = 0$)**
剖面	**$x = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ m各直线；$z = 0.5$ … 8 m**

求

手算两个边缘点处的$\Delta\sigma_z$；沿五条直线的应力随深度的变化。



解答 (1/2)

解答

1 高值边缘下方(x = B = 2 m, z = 1.5 m)：δ = 0

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{2}{1.5} - \tan^{-1}(0) = \mathbf{0.9273} \qquad \delta = 0 \;\Rightarrow\; \sin 2\delta = 0$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[(2)(0.9273) - 0\right] = 0.2952 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \mathbf{29.52}\ \text{kPa}$$

2 零值边缘下方(x = 0, z = 1.5 m)：2x/B = 0

$$\alpha = \tan^{-1}(0) - \tan^{-1}\frac{-2}{1.5} = 0.9273 \qquad \delta = -0.9273 \;\Rightarrow\; \sin 2\delta = -0.9600$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[(0)(0.9273) - (-0.9600)\right] = 0.1528 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \mathbf{15.28}\ \text{kPa}$$

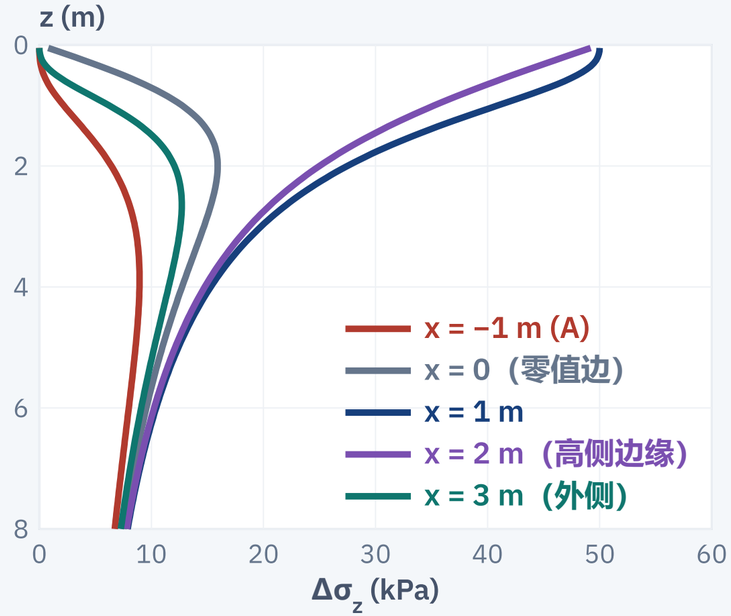
高侧边缘下方z = 1.5 m深度处为**29.52 kPa**（q的30%）；零侧边缘下方虽然荷载为零，仍有**15.28 kPa**的应力：应力不仅存在于荷载之下，也存在于其周围。

解答 (2/2)

解答

z (m)	x = −1 m (A)	x = 0（零）	x = 1 m	x = 2 m（较高）	x = 3 m（外侧）
0.5	0.41	7.49	47.97	42.20	1.52
1.0	2.17	12.73	40.92	35.24	6.22
1.5	**4.47**	**15.28**	**33.41**	**29.52**	**10.10**
2.0	6.43	15.92	27.49	25.00	12.06
3.0	8.54	14.69	19.79	18.72	12.59
4.0	8.94	12.73	15.29	14.76	11.54
6.0	7.98	9.55	10.42	10.24	9.09
8.0	6.73	7.49	7.88	7.80	7.27

在较高一侧边缘下方，应力在地表处自接近**q/2 = 50 kPa**开始(z = 0.5 m处为42.2 kPa)，并随深度增加而减小；在**零值一侧边缘**下方，应力先增大，在z ≈ 2 m处达到峰值15.9 kPa。在条形荷载范围之外(x = −1 m)，应力在z ≈ 4 m附近最大(z = 4 m处为8.9 kPa)。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

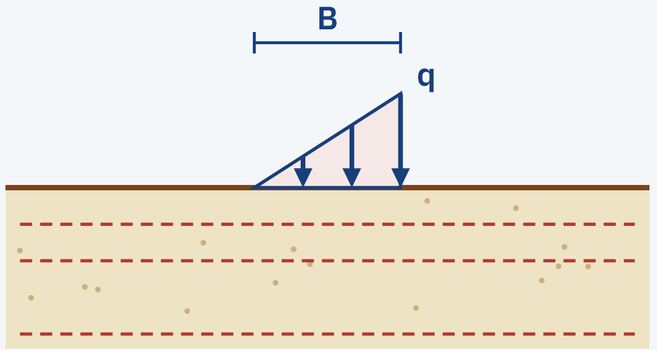
算例

已知条件

条形荷载	$q = 100$ kN/m², $B = 2$ m: $2x/B = x$ (m), $2z/B = z$ (m)
直线	**深度**$z = 0.5,\ 1,\ 2,\ 4$ m**处的水平直线；**$x = -2 \ldots 4$ m
手算	**在**$z = 2$ m**处，**$x = 2B/3 = 1.333$ m **（荷载重心）**

求

各深度处$\Delta\sigma_z$沿x方向的变化、**峰值的位置和数值**；峰值随深度如何移动。



解答 (1/3)

解答

z (m)	x = -2 m	x = -1 m	x = 0 m	x = 0.5 m	x = 1 m	x = 2 m	x = 2 m	x = 3 m	x = 4 m
0.5	0.08	0.41	7.49	25.74	47.97	64.48	42.20	1.52	0.19
1	0.53	2.17	12.73	26.20	40.92	47.26	35.24	6.22	1.19
2	2.49	6.43	15.92	22.35	27.49	28.70	25.00	12.06	4.57
4	5.67	8.94	12.73	14.31	15.29	15.45	14.76	11.54	7.75

近地表处（z = 0.5 m）应力与荷载分布一致，在靠近较高一侧边缘处较大（约65 kPa）；随深度增加，曲线**展宽**，峰值**减小**（z = 4 m处为15.5 kPa）。条带左侧(x < 0)的数值很小，但不为零。

解答 (2/3)

解答

1 x = 2B/3 = 1,333 m, z = 2 m

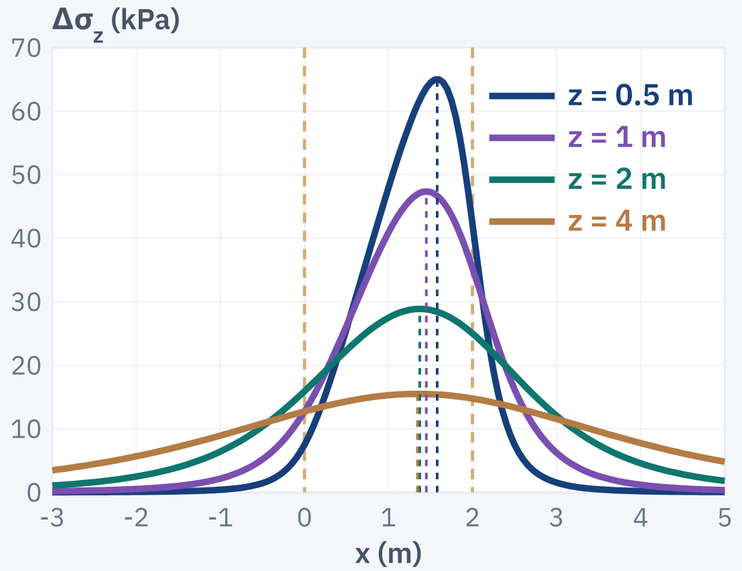
$$\alpha = \tan^{-1}\frac{1.333}{2} - \tan^{-1}\frac{-0.667}{2} = 0.9098$$

$$\delta = -0.3218 \;\Rightarrow\; \sin 2\delta = -0.6000$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[(1.333)(0.9098) - (-0.6000)\right] = 0.2885$$

$$\Delta\sigma_z = \mathbf{28.85}\ \text{kPa}$$

z = 2 m时曲线的峰值为28.87 kPa；荷载重心下方的值(28.85 kPa)与之非常接近。



解答 (3/3)

解答

z (m)	2z/B	峰点：x (m)	峰值：2x/B	峰值：$\Delta\sigma_z$ (kPa)	堤顶：$\Delta\sigma_z/q$
0.5	0.5	1.579	1.579	**65.04**	0.6504
1	1	1.450	1.450	**47.36**	0.4736
2	2	1.372	1.372	**28.87**	0.2887
4	4	1.344	1.344	**15.49**	0.1549
8	8	1.336	1.336	**7.90**	0.0790

峰值在靠近地表时出现在较高一侧边缘的稍内侧(2x/B ≈ 1.58)，随着深度增加趋近**荷载的重心**(2x/B = 1.333)：z = 8 m时为1.336。峰值**随深度减小**：65.0 kPa → 7.9 kPa。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

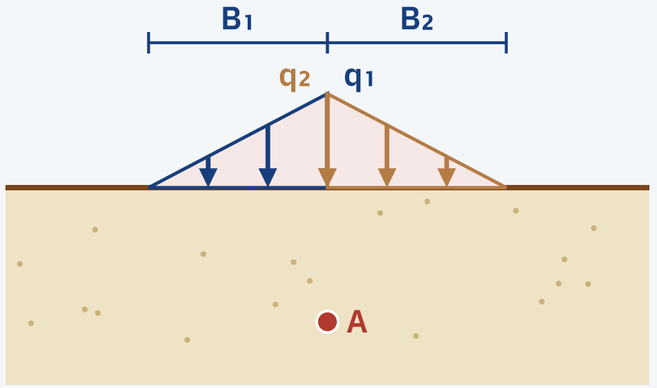
算例

已知条件

第1条带	$q_1 = 100$ kN/m²，$B_1 = 2$ m，左边缘$x_{L1} = 0$，左侧为零(0 … 2 m)
第2条带	$q_2 = 100$ kN/m²，$B_2 = 2$ m，左边缘$x_{L2} = 2$ m，右侧为零(2 … 4 m)；两个条形荷载在$x = 2$处相接
点	在$z = 1.5$ m处取$x = 2$ m（堤顶下方）和$x = 0$（左侧零值边）；$x = 0 … 5$ m

求

手算两点处$\Delta\sigma_z$的总和；说明对称荷载产生的应力是**对称**的。



解答 (1/2)

解答

1 坡顶下方(x = 2 m)：两个条形荷载均位于各自的高值边缘处

$$x_1 = 2 - 0 = 2\ \text{m} \qquad x_2 = x_{L2} + B - x_A = 2 + 2 - 2 = 2\ \text{m}$$

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \Delta\sigma_{z(2)} = 29.52\ \text{kPa}\ \text{(算例2)} \Rightarrow \Delta\sigma_z = \mathbf{59.03}\ \text{kPa}$$

2 左侧零值边下方(x = 0)

$$x_1 = 0 - 0 = 0 \Rightarrow \Delta\sigma_{z(1)} = 15.28\ \text{kPa}\ \text{(算例2)}$$

$$x_2 = 2 + 2 - 0 = 4\ \text{m} \Rightarrow \Delta\sigma_{z(2)} = 2.85\ \text{kPa;} \qquad \Delta\sigma_z = 15.28 + 2.85 = \mathbf{18.13}\ \text{kPa}$$

峰值下方的应力为**59.03 kPa**，左侧零值边缘下方为**18.13 kPa**。模块对两个条形荷载给出相同的数值。

解答 (2/2)

解答

x (m)	第1条形荷载(kPa)	第2条形荷载(kPa)	合计(kPa)
0	15.28	2.85	**18.13**
1	33.41	10.10	**43.50**
2	29.52	29.52	**59.03**
3	10.10	33.41	**43.50**
4	2.85	15.28	**18.13**
5	0.97	4.47	**5.44**

总应力关于堤顶轴线(x = 2 m)**对称**：x = 0和x = 4 m处为18.13 kPa，x = 1和x = 3 m处为43.50 kPa。两条带的数值互为镜像：第1条带在x处的值等于第2条带在4 − x处的值。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

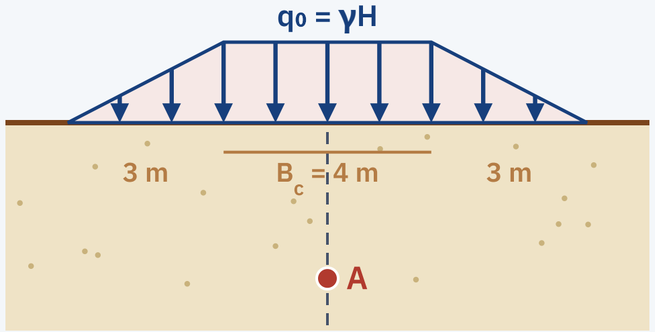
算例

已知条件

填土	**顶宽$B_c = 4$ m（$x = -2 \ldots 2$），两侧边坡水平宽度为3 m + 3 m；$q_0 = \gamma H = 100$ kN/m²**
风化	**均布条带$B = 4$ m（竖向条带解）+两个三角形条带$B = 3$ m（外缘处为零）**
A点	**轴线下方$x = 0$，$z = 3$ m**

求

三部分的贡献及**总$\Delta\sigma_z$**；随深度变化曲线，以及与将同一荷载按单一宽均布条形荷载计算的结果的比较。



解答 (1/3)

解答

1 均布（顶部）部分：x = 0，b = 2 m，z = 3 m

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{b}{z} + \frac{bz}{b^2+z^2}\right] = \frac{2}{\pi}\left[0.5880 + 0.4615\right] = 0.6682 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_{z,c} = \mathbf{66.82}\ \text{kPa}$$

2 左侧边坡：零值边缘x = −5 m，B = 3 m；对于A点，x = 0 − (−5) = 5 m

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{5}{3} - \tan^{-1}\frac{5-3}{3} = 0.4424 \qquad \delta = 0.5880 \;\Rightarrow\; \sin 2\delta = 0.9231$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[(3.333)(0.4424) - (0.9231)\right] = 0.0878 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_{z,s} = \mathbf{8.78}\ \text{kPa}$$

右侧边坡为镜像，因此对A点给出相同的值：$x = x_L + B - x_A = 2 + 3 - 0 = 5$ m。总计：66.82 + 2(8.78) = **84.37 kPa**；模块的均布条形荷载解与三角形荷载解给出相同的值。

解答 (2/3)

解答

x (m)	峰值(kPa)	左侧边坡	右侧边坡	合计
0	66.82	8.78	8.78	**84.37**
1	60.71	4.57	16.15	**81.43**
2	44.80	2.44	25.00	**72.24**
5	7.72	0.51	15.92	**24.15**
8	1.51	0.16	2.49	**4.16**

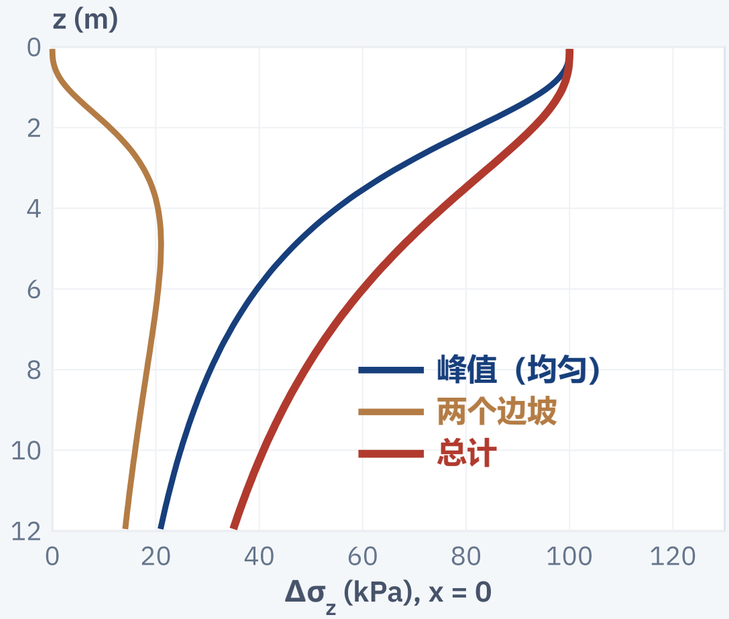
在深度z = 3 m处，路堤下方的应力在轴线上为**84.37 kPa**，在边坡坡脚处(x = 5 m)为**24.15 kPa**，在坡脚外3 m处(x = 8 m)为**4.16 kPa**。右侧各点(x > 0)以右侧边坡的影响为主，左侧各点以左侧边坡为主；总应力以轴线(x = 0)为**对称**轴。

解答 (3/3)

解答

z (m)	峰值（均匀）	两个边坡	填土累加	单条带(B = 10 m)
1	95.95	2.79	**98.73**	99.68
2	81.83	11.13	**92.96**	97.73
3	66.82	17.55	**84.37**	93.68
4	54.98	20.42	**75.40**	88.10
6	39.58	20.48	**60.06**	75.54
8	30.58	18.30	**48.87**	64.17
12	20.84	14.04	**34.88**	47.74

地表处应力接近q_0 = 100 kPa；随着深度增加，坡顶部分的贡献减小，而**边坡部分的贡献**增大（在z = 4 – 6 m处最大，为20.5 kPa）。若同一荷载为单一的宽均布条形荷载(B = 10 m)，则z = 6 m处应力为75.5 kPa：三角形边坡部分承担了一半荷载。



在GeoTerva中验算解答 ↗

小结

要点回顾

角度形式：$\Delta\sigma_z = (q/2\pi)[(2x/B)\,\alpha - \sin 2\delta]$；$\alpha = \tan^{-1}(x/z) - \tan^{-1}[(x - B)/z]$，$\delta = \tan^{-1}[(x - B)/z]$；x自零值边缘量测，若较高边缘位于+x一侧，则δ为负；该结果对任意x均成立

算例(q = 100 kPa, B = 2 m; A: x = −1, z = 1.5 m)：$\alpha = 29.74°$ (0.5191 rad), $\delta = -63.43°$ → $\Delta\sigma_z/q$ = **0.0447**；**$\Delta\sigma_z$ = 4.47 kPa**；镜像条形荷载下的值相同

边缘(z = 1.5 m)：荷载较大一侧的边缘下方为29.52 kPa，荷载为零一侧的边缘下方为15.28 kPa。**峰值**随深度增加而减小，并向荷载重心(x = 2B/3)方向移动

叠加原理：两个镜像条形荷载形成对称三角形（峰顶下方为59.03 kPa）；均布条形荷载加两个三角形荷载构成路堤（轴线下方z = 3 m处为84.37 kPa)

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

注

全部数值算例均由模块自身的计算引擎生成；模块给出相同的数值。模块以q = 100 kN/m²、B = 2 m和A点(x = −1 m, z = 1.5 m)打开；零值边位于右侧的条形荷载是该条形荷载的镜像。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入自己的三角形条形荷载（q、B、左边缘、方向）及A点；模块一并给出应力、等应力曲线、深度剖面、分步解答及报告。

打开模块→

理论页面 →

用手机打开

试用模块无需注册。