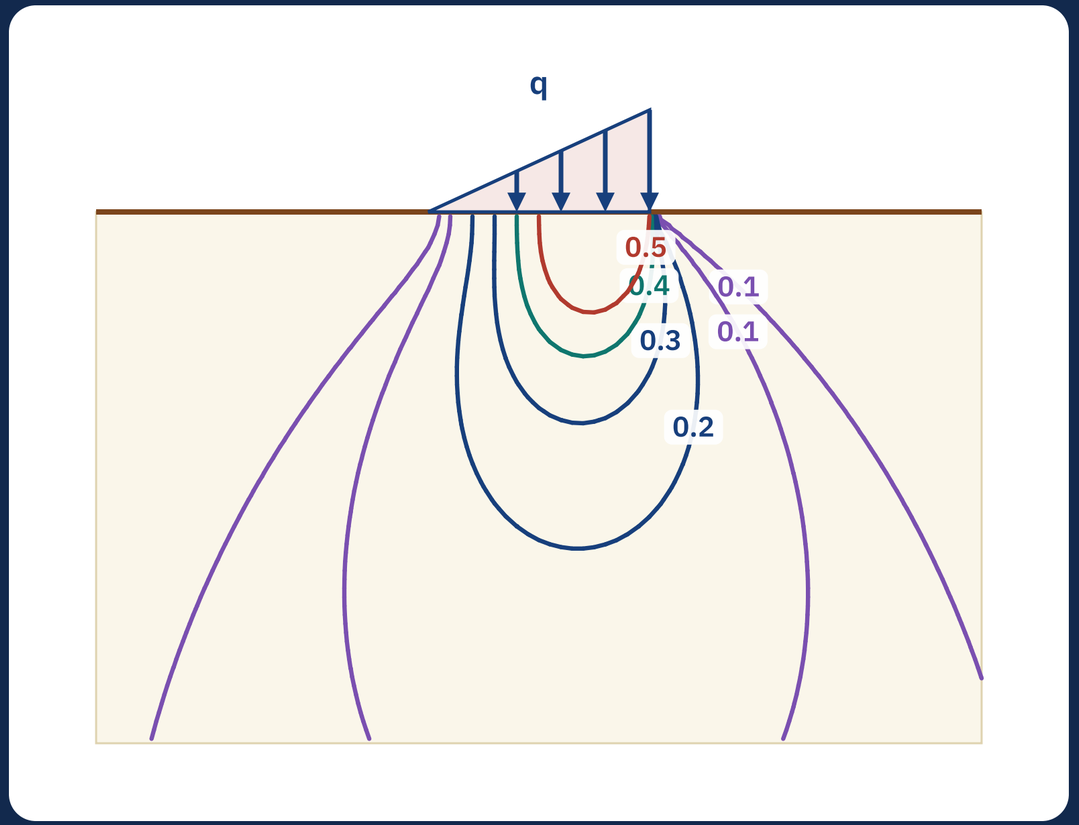
Apresentação de aula de geotecnia · Tensões no solo

Tensão sob uma carga triangular em faixa

Aula: carga em faixa triangular que cresce de zero a q ao longo de uma borda; um ponto à mão, perfis, triângulo simétrico e aterro.

- Integral da carga linear
- Forma angular
- Deslocamento da crista
- Aterro = uniforme + triângulos
- Resolúvel à mão



Introdução

O que veremos nesta aula?

Acréscimo de tensão vertical sob uma carga em faixa **crescente linearmente** de zero em uma borda a q na outra (talude de aterro, monte encostado a um muro, pé de aterro): a integral de uma carga linear de intensidade (q/B) r dr

A **forma angular**: $\Delta\sigma_z = (q/2\pi)[(2x/B)\alpha - \sin 2\delta]$; a definição de α e δ e o **sinal** de δ

Que, na superfície, a tensão acompanha a carga e, em profundidade, se espalha e o **pico** se desloca para o interior da faixa; o caso **espelho**, com a borda de valor zero à direita

Um ponto **de ponta a ponta, à mão**; com duas faixas, um **triângulo simétrico**; com uma faixa uniforme + dois triângulos, a carga de **aterro**

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: fórmula e justificativa

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Exemplo: q = 100 kN/m², B = 2 m, carga nula em x = 0 e igual a q em x = B; ponto A em x = −1 m, z = 1.5 m.

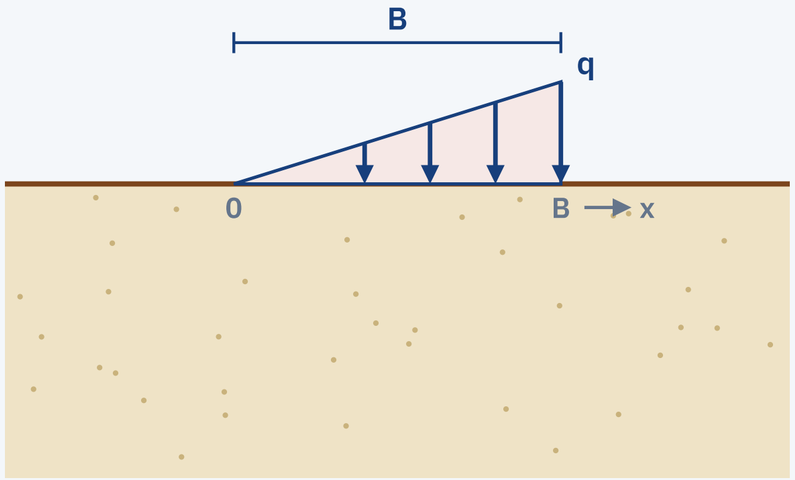
Faixa triangular: de zero a q em uma borda

TEORIA

O talude de um aterro, um monte encostado a um muro, o pé de um aterro: uma carga em faixa cuja intensidade cresce de zero em uma borda até o valor **q** na outra. Junto com uma carga em faixa uniforme, forma a **carga de aterro**

Faixa flexível, de largura B e comprimento infinito; a carga é **q·x/B** no intervalo 0 ≤ x ≤ B e nula nos demais pontos (estado plano de deformação)

O solo é um meio semi-infinito homogêneo, isótropo e elástico linear; $\Delta\sigma_z$ é apenas o acréscimo causado pela carga



Seção: a carga é nula em x = 0 e igual a q em x = B; a mesma tensão em qualquer seção

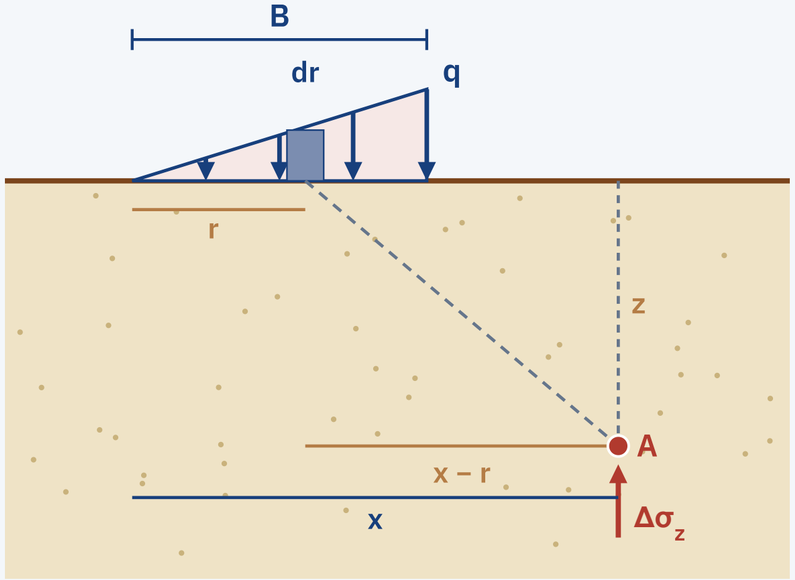
Carga linear de intensidade (q/B) r dr

TEORIA

O elemento de faixa elementar na posição r suporta, por unidade de comprimento, a carga **(q/B) r dr**. É tratado como uma **carga linear** à distância horizontal x − r do ponto A e somado ao longo da largura

$$\Delta\sigma_z = \int_0^B \frac{2\,(q/B)\,r\,dr\,z^3}{\pi\,[(x-r)^2+z^2]^2} = \frac{1}{B}\,\frac{2q}{\pi}\int_0^B \frac{z^3\,r\,dr}{[(x-r)^2+z^2]^2}$$

A integral é **elementar**; escrita com os ângulos da figura, o resultado está no próximo slide. Verificação numérica (q = 100, B = 2, x = −1, z = 1.5): valor de Simpson da integral **4.4699 kPa**, forma fechada **4.4699 kPa**



$\Delta\sigma_z = (q/2\pi)[(2x/B)\,\alpha - \sin 2\delta]$

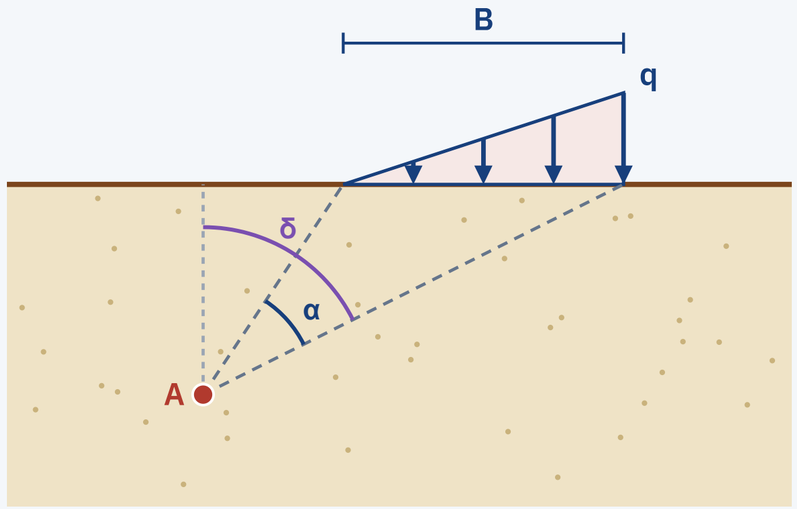
TEORIA

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{2\pi}\left(\frac{2x}{B}\,\alpha - \sin 2\delta\right)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x}{z} - \tan^{-1}\frac{x-B}{z} \qquad \delta = \tan^{-1}\frac{x-B}{z}$$

α é dado em radianos. **δ** é o ângulo entre a vertical que passa por A e a reta traçada até a **borda alta**. O sinal é importante: se a borda alta fica do lado +x de A, δ é negativo

Com as arcotangentes, o sinal é determinado automaticamente; o resultado é válido **para todo x**: ao lado da faixa, sob ela ou além dela. x é medido a partir da **borda nula** em direção à borda alta



A (x = −1, z = 1.5): α e δ (δ negativo)

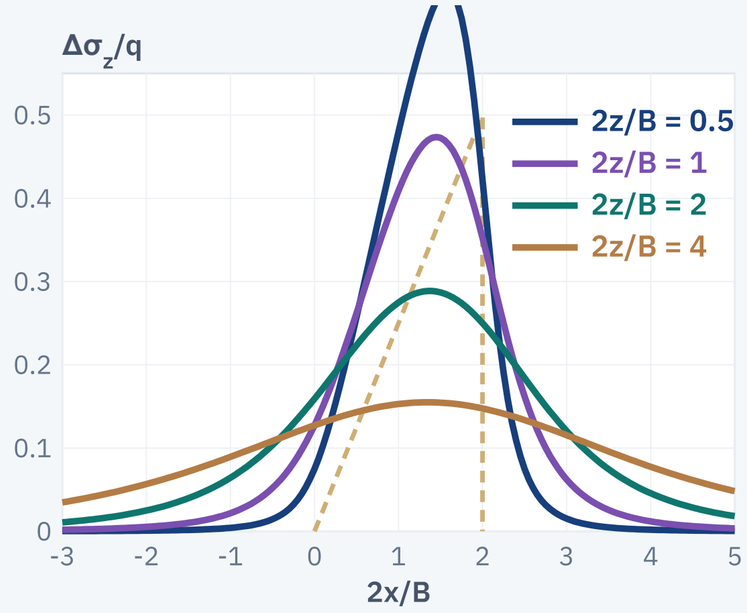
Segue a carga na superfície e se espalha em profundidade

TEORIA

Na região próxima à superfície, a tensão **acompanha a própria carga**; em maiores profundidades a tensão **se espalha** e seu valor máximo **desloca-se para o interior da faixa**

O pico está em 2x/B = 1.58 para 2z/B = 0.5 (0.65 q); para 2z/B = 4, em 2x/B = 1.34 (0.15 q): em grande profundidade, permanece sob o **centroide** da carga (x = 2B/3, isto é, 2x/B = 1.33)

Fora da borda de carga zero (x < 0), a tensão é pequena, mas não nula; não há carga ali, mas o solo suporta tensão



$\Delta\sigma_z/q$ — 2x/B (carga: triângulo amarelo tracejado)

Valores de $\Delta\sigma_z/q$

TEORIA

2z/B \ 2x/B	-2.0	-1.0	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
0.25	0.0001	0.0006	0.0392	0.2516	0.4969	0.7272	0.4604	0.0024	0.0003
0.50	0.0008	0.0041	0.0749	0.2574	0.4797	0.6448	0.4220	0.0152	0.0019
1.00	0.0053	0.0217	0.1273	0.2620	0.4092	0.4726	0.3524	0.0622	0.0119
1.50	0.0140	0.0447	0.1528	0.2473	0.3341	0.3598	0.2952	0.1010	0.0285
2.00	0.0249	0.0643	0.1592	0.2235	0.2749	0.2870	0.2500	0.1206	0.0457
3.00	0.0448	0.0854	0.1469	0.1774	0.1979	0.2017	0.1872	0.1259	0.0691
4.00	0.0567	0.0894	0.1273	0.1431	0.1529	0.1545	0.1476	0.1154	0.0775
6.00	0.0622	0.0798	0.0955	0.1010	0.1042	0.1047	0.1024	0.0909	0.0740

$\Delta\sigma_z = q \cdot$ (valor da tabela). A célula 2x/B = −1, 2z/B = 1.5 vale 0.0447: é o exemplo inicial do módulo. A carga ocupa o intervalo $0 \le 2x/B \le 2$; a borda mais alta é 2x/B = 2.

Se a borda de valor zero está à direita; várias faixas

TEORIA

Uma faixa também pode ser nula na sua **borda direita**: é a **imagem espelhada** da faixa do exemplo; usa-se a mesma equação e x é medido a partir da **borda nula** em direção à borda mais alta (se a borda direita é nula, $x = x_L + B - x_A$)

Como o solo é elástico, a tensão de cada faixa é obtida separadamente e somada. As faixas não podem se sobrepor (podem se encontrar em uma borda); o módulo admite no máximo oito faixas, cada uma com q, B, borda esquerda e direção próprios

Dispor os dois triângulos lado a lado, com orientações espelhadas, resulta em uma carga **triangular simétrica**; uma faixa uniforme mais dois triângulos forma a carga de **aterro**

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)}$$

Enunciado

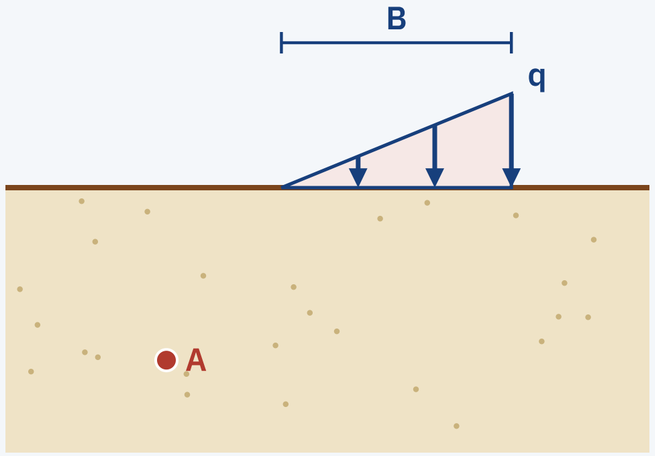
EXEMPLO

Dados

Carga em faixa	**Flexível, vertical; zero em $x = 0$, cresce linearmente até q em $x = B$: $q = 100$ kN/m², $B = 2$ m**
Ponto A	**$x = -1$ m (1 m fora da borda nula), $z = 1.5$ m**

PEDE-SE

Os ângulos **α** e **δ**, **$\Delta\sigma_z/q$** e **$\Delta\sigma_z$**; comparação com a faixa espelhada, na qual a borda nula está à direita.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Ângulos medidos a partir da superfície (de A até a borda alta e até a borda nula)

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{1.5}{3} = 26.57^\circ \qquad \alpha_2 = \tan^{-1}\frac{1.5}{1} = 56.31^\circ$$

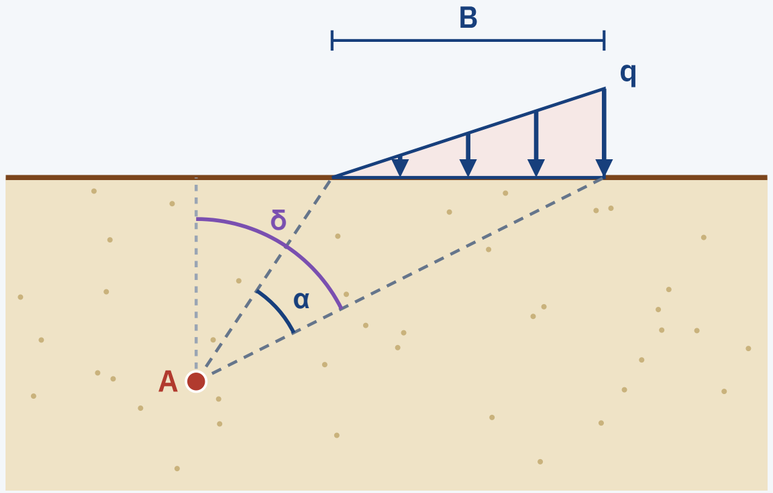
$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 29.74^\circ \qquad \delta = -(90^\circ - \alpha_2 + \alpha) = \mathbf{-63.43}^\circ$$

2 Mesmos ângulos pela equação (x = −1 m, B = 2 m, z = 1.5 m)

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x}{z} - \tan^{-1}\frac{x-B}{z}$$

$$= \tan^{-1}(-0.6667) - \tan^{-1}(-2) = 29.74^\circ = \mathbf{0.5191}\ \text{rad}$$

$$\delta = \tan^{-1}\frac{x-B}{z} = \tan^{-1}\frac{-3}{1.5} = \mathbf{-63.43}^\circ$$



Os dois caminhos fornecem os **mesmos** ângulos: α = 29.74° (0.5191 rad), δ = -63.43°. O ângulo δ é **negativo**, porque a borda mais alta (x = B = 2 m) está do lado +x de A.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Valor de influência e tensão

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2x}{B}\,\alpha - \sin 2\delta\right] = \frac{1}{2\pi}\left[(-1)(0.5191) - \sin(-126.87^\circ)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-0.5191 + 0.8000\right] = \mathbf{0.0447} \qquad \Delta\sigma_z = 0.0447\,(100) = \mathbf{4.47}\ \text{kPa}$$

4 Faixa espelhada: borda zero à direita (borda esquerda 0, B = 2 m), ponto A em x = 3 m

$$x = x_L + B - x_A = 0 + 2 - 3 = -1\ \text{m} \;\Rightarrow\; \text{mesmo valor: } \Delta\sigma_z = \mathbf{4.47}\ \text{kPa}$$

Não há carga a **1 m para fora** da borda nula e, mesmo assim, a tensão é de **4.47 kPa** (4.5% de q). Na faixa espelhada, o correspondente de A é x = 3 m; o módulo fornece o mesmo resultado nos dois casos.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

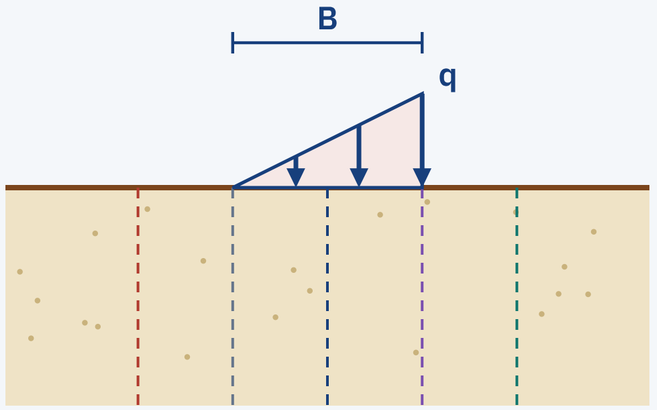
EXEMPLO

Dados

Carga em faixa	**Faixa do Exemplo 1: $q = 100$ kN/m², $B = 2$ m ($x = 0$ zero, $x = 2$ borda alta)**
Cálculo manual	**Em $z = 1.5$ m, abaixo da borda alta ($x = B$) e abaixo da borda nula ($x = 0$)**
Perfil	**retas $x = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ m; $z = 0.5$ … 8 m**

PEDE-SE

$\Delta\sigma_z$ nos dois pontos de borda, calculado à mão; variação da tensão com a profundidade ao longo de cinco retas.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Sob a borda mais alta (x = B = 2 m, z = 1.5 m): δ = 0

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{2}{1.5} - \tan^{-1}(0) = \mathbf{0.9273} \qquad \delta = 0 \;\Rightarrow\; \sin 2\delta = 0$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[(2)(0.9273) - 0\right] = 0.2952 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \mathbf{29.52}\ \text{kPa}$$

2 Sob a borda zero (x = 0, z = 1.5 m): 2x/B = 0

$$\alpha = \tan^{-1}(0) - \tan^{-1}\frac{-2}{1.5} = 0.9273 \qquad \delta = -0.9273 \;\Rightarrow\; \sin 2\delta = -0.9600$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[(0)(0.9273) - (-0.9600)\right] = 0.1528 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \mathbf{15.28}\ \text{kPa}$$

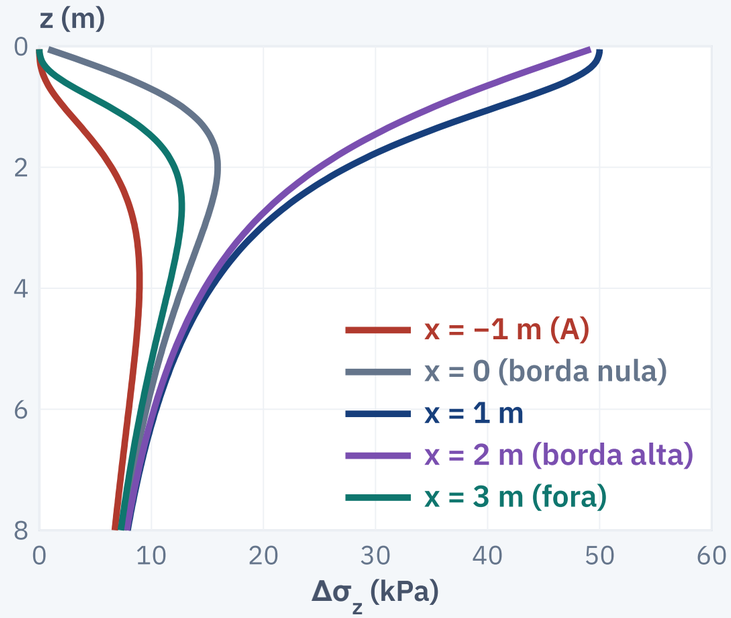
Sob a borda alta, na profundidade z = 1.5 m, **29.52 kPa** (30% de q); sob a borda nula, embora a carga seja zero, há uma tensão de **15.28 kPa**: a tensão existe não apenas sob a carga, mas também ao seu redor.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

z (m)	x = −1 m (A)	x = 0 (zero)	x = 1 m	x = 2 m (alto)	x = 3 m (fora)
0.5	0.41	7.49	47.97	42.20	1.52
1.0	2.17	12.73	40.92	35.24	6.22
1.5	**4.47**	**15.28**	**33.41**	**29.52**	**10.10**
2.0	6.43	15.92	27.49	25.00	12.06
3.0	8.54	14.69	19.79	18.72	12.59
4.0	8.94	12.73	15.29	14.76	11.54
6.0	7.98	9.55	10.42	10.24	9.09
8.0	6.73	7.49	7.88	7.80	7.27

Sob a borda mais alta, a tensão começa próxima de **q/2 = 50 kPa** na superfície (42.2 kPa em z = 0.5 m) e diminui com a profundidade; **sob a borda nula**, primeiro aumenta e atinge o pico de 15.9 kPa em z ≈ 2 m. Fora da faixa (x = −1 m), o valor é máximo em torno de z ≈ 4 m (8.9 kPa em z = 4 m).



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

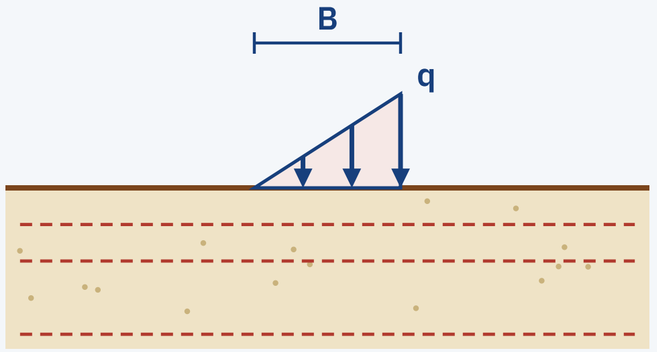
EXEMPLO

Dados

Carga em faixa	$q = 100$ **kN/m², $B = 2$ m: $2x/B = x$ (m), $2z/B = z$ (m)**
Retas	**retas horizontais nas profundidades $z = 0.5,\ 1,\ 2,\ 4$ m; $x = -2$ … 4 m**
Cálculo manual	**em $z = 2$ m, $x = 2B/3 = 1.333$ m (centroide da carga)**

PEDE-SE

Em cada profundidade, a variação de **$\Delta\sigma_z$** ao longo de x, **a posição e o valor do pico**; como o pico se desloca com a profundidade.



Solução (1/3)

SOLUÇÃO

z (m)	x = -2 m	x = -1 m	x = 0 m	x = 0.5 m	x = 1 m	x = 2 m	x = 2 m	x = 3 m	x = 4 m
0.5	0.08	0.41	7.49	25.74	47.97	64.48	42.20	1.52	0.19
1	0.53	2.17	12.73	26.20	40.92	47.26	35.24	6.22	1.19
2	2.49	6.43	15.92	22.35	27.49	28.70	25.00	12.06	4.57
4	5.67	8.94	12.73	14.31	15.29	15.45	14.76	11.54	7.75

Perto da superfície (z = 0.5 m), a tensão acompanha a carga e é grande junto à borda mais carregada (cerca de 65 kPa); com a profundidade, a curva **se espalha** e o pico **diminui** (15.5 kPa em z = 4 m). À esquerda da faixa (x < 0), os valores são pequenos, mas não nulos.

Solução (2/3)

SOLUÇÃO

1 x = 2B/3 = 1,333 m, z = 2 m

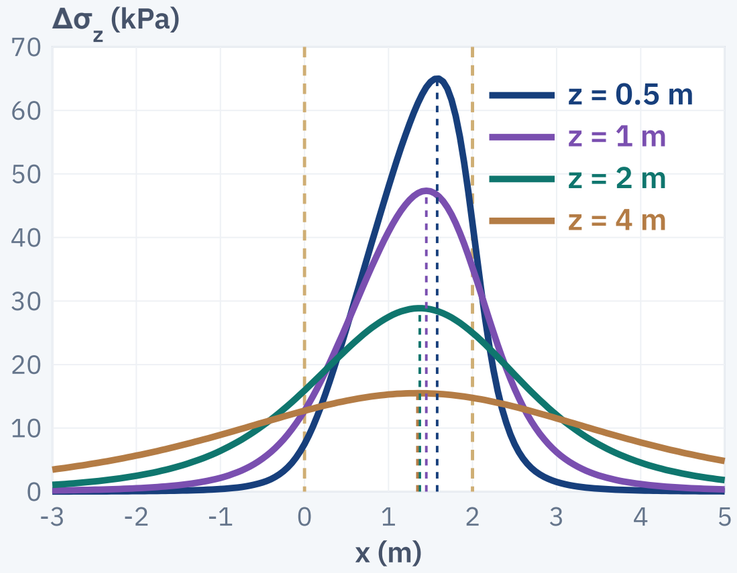
$$\alpha = \tan^{-1}\frac{1.333}{2} - \tan^{-1}\frac{-0.667}{2} = 0.9098$$

$$\delta = -0.3218 \;\Rightarrow\; \sin 2\delta = -0.6000$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[(1.333)(0.9098) - (-0.6000)\right] = 0.2885$$

$$\Delta\sigma_z = \mathbf{28.85}\ \text{kPa}$$

Para z = 2 m, o pico da curva é 28.87 kPa; o valor sob o centro de gravidade da carga (28.85 kPa) é muito próximo dele.



Solução (3/3)

SOLUÇÃO

z (m)	2z/B	Pico: x (m)	Pico: 2x/B	Pico: $\Delta\sigma_z$ (kPa)	Crista: $\Delta\sigma_z/q$
0.5	0.5	1.579	1.579	**65.04**	0.6504
1	1	1.450	1.450	**47.36**	0.4736
2	2	1.372	1.372	**28.87**	0.2887
4	4	1.344	1.344	**15.49**	0.1549
8	8	1.336	1.336	**7.90**	0.0790

O pico começa um pouco para dentro da borda mais alta, perto da superfície (2x/B ≈ 1.58), e, com o aumento da profundidade, aproxima-se do **centroide da carga** (2x/B = 1.333): 1.336 em z = 8 m. O valor de pico **diminui** com a profundidade: 65.0 kPa → 7.9 kPa.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

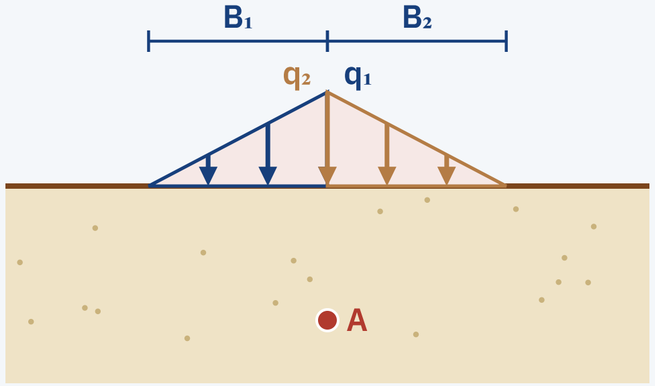
EXEMPLO

Dados

1ª faixa	$q_1 = 100$ kN/m², $B_1 = 2$ m, borda esquerda $x_{L1} = 0$, zero à esquerda (0 … 2 m)
2ª faixa	$q_2 = 100$ kN/m², $B_2 = 2$ m, borda esquerda $x_{L2} = 2$ m, zero à direita (2 … 4 m); as duas faixas se unem em $x = 2$
Pontos	$z = 1.5$ m em $x = 2$ m (abaixo da crista) e $x = 0$ (borda zero à esquerda); $x = 0$ … 5 m

PEDE-SE

Soma de $\Delta\sigma_z$ à mão em dois pontos; mostrar que a tensão de uma carga simétrica é **simétrica**.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Abaixo da crista (x = 2 m): as duas faixas estão em sua própria borda alta

$$x_1 = 2 - 0 = 2\ \text{m} \qquad x_2 = x_{L2} + B - x_A = 2 + 2 - 2 = 2\ \text{m}$$

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \Delta\sigma_{z(2)} = 29.52\ \text{kPa}\ \ (\text{Exemplo 2}) \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_z = \mathbf{59.03}\ \text{kPa}$$

2 Sob a borda nula da esquerda (x = 0)

$$x_1 = 0 - 0 = 0 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z(1)} = 15.28\ \text{kPa}\ \ (\text{Exemplo 2})$$

$$x_2 = 2 + 2 - 0 = 4\ \text{m} \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z(2)} = 2.85\ \text{kPa}; \qquad \Delta\sigma_z = 15.28 + 2.85 = \mathbf{18.13}\ \text{kPa}$$

Sob o pico, a tensão é de **59.03 kPa**; sob a borda esquerda de valor zero, de **18.13 kPa**. O módulo fornece os mesmos valores para as duas faixas.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

x (m)	1ª faixa (kPa)	2ª faixa (kPa)	Total (kPa)
0	15.28	2.85	**18.13**
1	33.41	10.10	**43.50**
2	29.52	29.52	**59.03**
3	10.10	33.41	**43.50**
4	2.85	15.28	**18.13**
5	0.97	4.47	**5.44**

O total é **simétrico** em relação ao eixo do aterro (x = 2 m): 18.13 kPa em x = 0 e x = 4 m, 43.50 kPa em x = 1 e x = 3 m. Os valores das duas faixas são espelhados entre si: o valor da faixa 1 em x é igual ao da faixa 2 em 4 − x.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

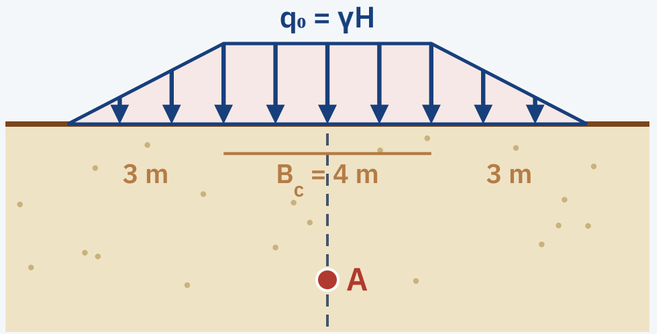
EXEMPLO

Dados

Aterro	**Largura da crista $B_c = 4$ m ($x = -2 \ldots 2$), dois taludes com largura horizontal de 3 m + 3 m; $q_0 = \gamma H = 100$ kN/m²**
Intemperismo	**faixa uniforme $B = 4$ m (solução de faixa vertical) + duas faixas triangulares $B = 3$ m (zero na borda externa)**
Ponto A	**sob o eixo $x = 0$, $z = 3$ m**

PEDE-SE

A parcela das três partes e o **$\Delta\sigma_z$ total**; perfil em profundidade e comparação com o cálculo da mesma carga como uma única faixa uniforme larga.



Solução (1/3)

SOLUÇÃO

1 Trecho uniforme (crista): x = 0, b = 2 m, z = 3 m

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{b}{z} + \frac{bz}{b^2+z^2}\right] = \frac{2}{\pi}\left[0.5880 + 0.4615\right] = 0.6682 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_{z,c} = \mathbf{66.82}\ \text{kPa}$$

2 Talude esquerdo: borda nula em x = −5 m, B = 3 m; para A, x = 0 − (−5) = 5 m

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{5}{3} - \tan^{-1}\frac{5-3}{3} = 0.4424 \qquad \delta = 0.5880 \;\Rightarrow\; \sin 2\delta = 0.9231$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[(3.333)(0.4424) - (0.9231)\right] = 0.0878 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_{z,s} = \mathbf{8.78}\ \text{kPa}$$

Como o talude da direita é espelhado, ele fornece o mesmo valor para A: x = x_L + B − x_A = 2 + 3 − 0 = 5 m. Total: 66.82 + 2(8.78) = **84.37 kPa**; as soluções do módulo para carga em faixa uniforme e triangular fornecem o mesmo valor.

Solução (2/3)

SOLUÇÃO

x (m)	Pico (kPa)	Talude esquerdo	Talude direito	Total
0	66.82	8.78	8.78	**84.37**
1	60.71	4.57	16.15	**81.43**
2	44.80	2.44	25.00	**72.24**
5	7.72	0.51	15.92	**24.15**
8	1.51	0.16	2.49	**4.16**

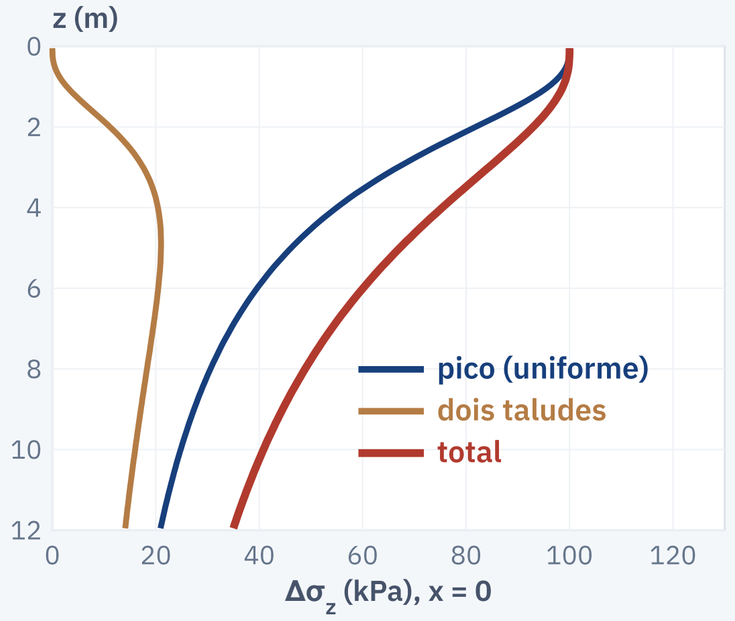
Na profundidade z = 3 m, a tensão sob o aterro é de **84.37 kPa** no eixo, **24.15 kPa** no pé do talude (x = 5 m) e **4.16 kPa** a 3 m além do pé (x = 8 m). Nos pontos à direita (x > 0), predomina o talude direito; nos da esquerda, o talude esquerdo; o total considera o eixo (x = 0) como eixo de **simetria**.

Solução (3/3)

SOLUÇÃO

z (m)	Pico (uniforme)	Dois taludes	Somatório do aterro	Faixa única (B = 10 m)
1	95.95	2.79	**98.73**	99.68
2	81.83	11.13	**92.96**	97.73
3	66.82	17.55	**84.37**	93.68
4	54.98	20.42	**75.40**	88.10
6	39.58	20.48	**60.06**	75.54
8	30.58	18.30	**48.87**	64.17
12	20.84	14.04	**34.88**	47.74

Na superfície, a tensão é próxima de q_0 = 100 kPa; com o aumento da profundidade, a parcela da crista diminui enquanto a **parcela dos taludes** aumenta (máxima em z = 4 – 6 m, 20.5 kPa). Se a mesma carga fosse uma única faixa uniforme larga (B = 10 m), obter-se-iam 75.5 kPa em z = 6 m: os taludes triangulares suportam metade da carga.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Resumo

Pontos-chave

Forma angular: $\Delta\sigma_z = (q/2\pi)[(2x/B)\,\alpha - \sin 2\delta]$; $\alpha = \tan^{-1}(x/z) - \tan^{-1}[(x - B)/z]$, $\delta = \tan^{-1}[(x - B)/z]$; x é medido a partir da borda de ordenada nula, e δ é negativo se a borda mais alta estiver do lado +x; o resultado é válido para qualquer x

Exemplo (q = 100 kPa, B = 2 m; A: x = −1, z = 1.5 m): α = 29.74° (0.5191 rad), δ = -63.43° → $\Delta\sigma_z/q$ = **0.0447**; **$\Delta\sigma_z$ = 4.47 kPa**; mesmo valor na faixa espelhada

Bordas (z = 1.5 m): sob a borda alta, 29.52 kPa; sob a borda nula, 15.28 kPa. O **pico** diminui com a profundidade e desloca-se em direção ao centroide da carga (x = 2B/3)

Superposição: duas faixas espelhadas dão um triângulo simétrico (59.03 kPa sob o vértice); a faixa uniforme mais dois triângulos formam o aterro (84.37 kPa em z = 3 m, sob o eixo)

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o motor de cálculo do próprio módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O módulo inicia com q = 100 kN/m², B = 2 m e A (x = −1 m, z = 1.5 m); a faixa com a borda nula à direita é a imagem espelhada desta faixa.

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva as próprias faixas triangulares (q, B, borda esquerda, direção) e o ponto A; o módulo fornece em conjunto a tensão, as curvas de isotensão, o perfil em profundidade, a solução passo a passo e o relatório.

Abrir o módulo → **Página de teoria →**

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.